М. И. БАТЬ. Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ. А. С. КЕЛЬЗОН

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ



М.И. БАТЬ, Г.Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, А.С. КЕЛЬЗОН

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

ТОМ II

ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ВОСЬМОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Государственным комитетом СССР по народному образованию в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1991

ББК 22.21
Б28
УДК 531.1/3(075.8)

Б а т ь М.И., Д ж а н е л и д з е Г.Ю., К е л ь з о н А.С. **Теоретическая механика в примерах и задачах**: Учеб. пособие для втузов. В 3-х т. Т. II. Динамика. – 8-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 640 с. – ISBN 5-02-014451-7.

Представлены следующие разделы динамики: дифференциальные уравнения динамики материальной точки (две основные задачи динамики, невесомость, колебания материальной точки, динамика относительного движения, электромеханические аналогии), моменты инерции твердых тел, общие теоремы динамики, динамика плоского движения твердого тела, приближенная теория гироскопов, динамика несвободной материальной системы (метод кинетостатики, давление вращающегося твердого тела на ось вращения, принцип возможных перемещений, общее уравнение динамики, уравнения Лагранжа второго рода), удар.

7-е изд. – 1984 г.

Для студентов втузов очной и заочной систем обучения, а также для самостоятельного изучения основ теоретической механики.

Табл. 3. Ил. 293.

Р е ц е н з е н т
кафедра теоретической механики
Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе

Б $\frac{1603020000-039}{053(02)-91}$ 76-90

ISBN 5-02-014451-7 (том II)

ISBN 5-02-014449-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

1*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Немногочисленные законы и теоремы, лежащие в основе теоретической механики, находят весьма разнообразные и обширные применения. Поэтому у лиц, изучающих или использующих в своей деятельности теоретическую механику, наибольшие затруднения вызывает приложение общих положений теории к решению конкретных задач.

В обширной литературе, посвященной теоретической механике, имеется мало книг, ставящих своей целью научить читателя методам решения задач. Между тем потребность в этих руководствах ощущается как студентами в процессе обучения (в особенности студентами заочных и вечерних отделений), так и инженерами и техниками в их практической деятельности.

Авторы настоящей книги, опираясь на многолетний опыт преподавания теоретической механики в Ленинградском политехническом институте им. М.И. Калинина и Ленинградском высшем инженерном морском училище им. адмирала С.О. Макарова, поставили своей целью создание руководства по решению задач.

В соответствии с этим замыслом в книге даны в конспективной форме лишь краткие сведения из теории; предполагается, что для ее изучения читатель пользуется одним из курсов теоретической механики.

Из большого числа учебников по этому предмету, опубликованных в СССР, отметим, прежде всего, курс: Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Теоретическая механика. Т. I. – 8-е изд. – М.: Наука, 1983; Т. II. – 6-е изд. – М.: Наука, 1983 (книга, определившая современные традиции преподавания теоретической механики во втузах), а также рекомендуем учебники: Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. I. – 4-е изд. – М.: Наука, 1985; Т. II. – 3-е изд. – М.: Наука, 1985; Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Физматгиз, 3-е изд., 1963 и последующих лет; Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Т. I. – М.: Высшая школа, 2-е изд., 1964 и последующих лет; Яблонский А.А. Курс

теоретической механики. Т. II. – М.: Высшая школа, 2-е изд., 1964 и последующих лет.

Наиболее эффективным путем обучения искусству приложения методов теоретической механики является не облегчение формального заучивания правил и приемов (чему часто способствуют обширные методические указания), а показ их в действии. Ввиду этого в настоящем руководстве основное внимание уделено решению конкретных задач, специально составленных для того, чтобы, с одной стороны, избежать разбора задач, входящих в сборник И.В. Мещерского и иные распространенные в СССР задачники, а с другой – дать возможность после изучения книги (или ее разделов) самостоятельно решать различные задачи.

Для облегчения активного изучения материала (а только такое изучение и имеет смысл) в каждом разделе книги даны краткие рекомендации о последовательности решения тех или иных типов задач и лишь после этого приведено подробное рассмотрение подобных задач, причем зачастую сравнены и оценены различные методы решения. Решения многих задач являются одновременно примерами инженерных расчетов.

Предполагается, что параллельно с разбором материала по руководству читатель на основе изученного самостоятельно решает соответствующие задачи и тем самым учится применять полученные знания.

В руководстве приведены списки рекомендованных к самостоятельному решению задач из книги: Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике, 36-е изд. – М.: Наука, 1986.

Сравнительно большой объем руководства объясняется тем, что оно составлено в расчете как на последовательное изучение, так и на выборочное использование. Последний способ и является главной формой применения ввиду различия объема материала и порядка его прохождения в разных высших учебных заведениях.

Первое издание этого учебного пособия вышло в свет в двух томах в 1961 г. Том I был посвящен статике и кинематике, а том II – динамике.

В 1964 г. авторский коллектив понес невосполнимую утрату в лице безвременно скончавшегося профессора Г.Ю. Джанелидзе, заведующего кафедрой теоретической механики Ленинградского политехнического института им. М.И. Калинина, соавтора и первого редактора книги. В 1983 г. скончался доцент М.И. Бать, автор многих задач и разделов этой книги.

Вплоть до пятого издания тома I и четвертого издания тома II книга переиздавалась без существенных изменений.

Идя навстречу многочисленным пожеланиям, авторы включили новые главы, освещающие дополнительные разделы курса теоретической механики. Это потребовало увеличения объема книги, в связи с чем книга стала выходить в трех томах. Тома I и II охватывают материал, отвечающий основному курсу теоретической механики, а том III содержит дополнительные главы.

Первые четыре издания тома II были написаны М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе и А.С. Кельзоном. В пятом, шестом и седьмом изданиях том II написал М.И. Бать.

При подготовке настоящего восьмого издания тома II был пересмотрен весь текст и внесены необходимые исправления. Том дополнен новым материалом в главах 8–12, написанным А.С. Кельзоном.

Считаем своим приятным долгом принести благодарность В.Г. Веретенникову и В.М. Закалюкину, прочитавшим рукопись и сделавшим ценные замечания, а также всем лицам, приславшим ценные указания и критические замечания.

Хочется надеяться, что и впредь читатели будут помогать совершенствованию книги своими предложениями, которые будут с благодарностью рассмотрены.

А.С. Кельзон

Раздел третий

ДИНАМИКА

ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются движения материальных тел в зависимости от сил, их вызывающих.

В статике изучались задачи о приведении систем сил к простейшему виду и относительном покое материальных тел, в кинематике рассматривались задачи о геометрических характеристиках механического движения.

В динамике – главном разделе курса – на основе законов динамики решаются задачи о движении тел под действием сил. При этом используются сведения из статики и кинематики.

Остановимся на важнейших понятиях динамики.

Материальной точкой называется материальное тело, вращательными движениями которого по сравнению с поступательными можно пренебречь. Таким образом, не обязательно понимать под материальной точкой тело очень малых размеров. Твердое тело, движущееся поступательно, рассматривается как материальная точка.

Материальная точка называется *свободной*, если на ее движение не наложено никаких ограничений.

Несвободной называется материальная точка, на которую наложены связи, ограничивающие ее движение.

В основе динамики, как и других наук, лежат физические законы, подтвержденные многовековой практической деятельностью человека. Их установление явилось результатом длительного пути развития механики.

Важнейшее значение имели исследования итальянского механика, математика, физика и астронома Галилео Галилея (1564–1642), опубликованные в 1638 г. в Голландии в книге "Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению". Он доказал неверность динамики Аристотеля и открыл путь к созданию новой, ньютонианской динамики.

Эту новую линию в науке завершил английский ученый Исаак Ньютон (1643–1727), создатель современной, классической механики, опублико-

ванной в его главном труде "Математические начала натуральной философии". И. Ньютон следующими словами определил основную задачу динамики: "По явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам изъяснить остальные явления" *).

Закон первый (*закон инерции*). Изолированная материальная точка сохраняет свою скорость неизменной по абсолютной величине и по направлению. Этот закон фактически утверждает существование инерциальных систем.

Материальные тела движутся с течением времени в пространстве, взаимодействуя друг с другом. Количественные меры этих механических взаимодействий называются *силами*. Материальная точка называется *изолированной* в том случае, когда действиями на нее всех прочих материальных тел можно пренебречь (это понятие является, конечно, абстракцией). Таким образом, в реальных условиях движение материальной точки в тех случаях, когда действием на нее сил можно пренебречь, происходит без ускорения, т.е. равномерно и прямолинейно, либо материальная точка находится в покое.

Инертность – свойство материального тела, проявляющееся в сохранении движения, совершаемого им при отсутствии действующих сил, и в постепенном изменении этого движения с течением времени, когда на тело начинают действовать силы.

Законы динамики описывают механическое движение материальных тел по отношению к инерциальной системе отсчета. Система отсчета называется *инерциальной*, если изолированная материальная точка по отношению к этой системе находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.

Начало инерциальной системы отсчета принимается в ряде случаев в центре Солнца, а оси направляются на отдаленные звезды (*гелиоцентрическая система*). В зависимости от требований, предъявляемых к результатам расчетов, можно и другие координатные системы приближенно считать инерциальными. Так, при решении многих практических задач систему, координатные оси которой связаны с Землей, можно считать инерциальной (*геоцентрическая система*).

Применение законов динамики к изучению механических движений материальных тел по отношению к неинерциальным системам отсчета рассмотрено ниже, в гл. 8, § 5.

Закон второй (*основной закон динамики*). Ускорение, сообщаемое свободной материальной точке приложенной к ней силой, имеет направление силы и по модулю пропорционально силе:

$$F = ma.$$

*) Newton I. Philosophiae naturalis principia mathematica. – London, 1687. Русский перевод академика А.Н. Крылова: Ньютон И. Математические начала натуральной философии. – Петроград: Изд-во Морской академии, 1916.

Силы характеризуются не скоростями точек, а изменениями скоростей, т.е. ускорениями. Из основного закона динамики $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ следует, что при $\boldsymbol{F} = 0$ ускорение $\boldsymbol{a} = 0$.

Величина m, стоящая множителем при ускорении в основном законе динамики, называется *массой*. Эта физическая величина характеризует степень сопротивляемости материальной точки изменению ее скорости, т.е. является мерой инертности материальной точки. Следовательно, масса оказывается одной из характеристик движущейся материи (из других характеристик можно назвать протяженность, упругость и т.д.).

В классической механике изучаются движения материальных тел, происходящие со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. При этом масса считается величиной постоянной (в механике теории относительности масса является величиной переменной, зависящей от скорости движения материальной точки).

В системе единиц СИ единицей длины является метр, единицей массы – килограмм, единицей времени – секунда. Сила является производной единицей, измеряемой в ньютонах (Н).

Закон третий (*закон равенства действия и противодействия*). Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны по одной прямой.

Следует иметь в виду, что силы, именуемые действием и противодействием, приложены к разным материальным точкам. Так, в случае несвободной материальной точки к точке приложено "действие", а к связи, наложенной на материальную точку, приложено "противодействие".

Закон четвертый (*закон независимости действия сил*). При одновременном действии нескольких сил ускорение материальной точки равно векторной сумме ускорений, которые имела бы эта точка при действии каждой из сил в отдельности:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n,$$

где $\boldsymbol{a}_1 = \dfrac{\boldsymbol{F}_1}{m}$, $\boldsymbol{a}_2 = \dfrac{\boldsymbol{F}_2}{m}$, ..., $\boldsymbol{a}_n = \dfrac{\boldsymbol{F}_n}{m}$.

Это значит, что при определении ускорения материальной точки можно пользоваться методом суперпозиции (наложения). Следует иметь в виду, что при определении скорости материальной точки аналогичная суперпозиция не имеет места, т.е. скорость материальной точки не равна векторной сумме скоростей, которые имела бы эта точка при действии каждой из сил в отдельности.

Глава 8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Ускорение $\boldsymbol{a}$ материальной точки массой m, движущейся под действием приложенных к ней сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, определяется с помощью основного закона динамики в сочетании с законом независимости действия сил: $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n$.

Основное уравнение динамики *в проекциях на оси неподвижных декартовых координат* имеет вид

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}; \tag{1*}$$

здесь $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции ускорения $\boldsymbol{a}$, а F_{kx}, F_{ky} и F_{kz} – проекции силы $\boldsymbol{F}_k$ на соответствующие оси декартовых координат.

Основное уравнение динамики *в проекциях на оси натурального триэдра* записывается в форме

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = \Sigma F_{k\tau}, \quad m\frac{v^2}{\rho} = \Sigma F_{kn}, \quad 0 = \Sigma F_{kb}; \tag{2*}$$

здесь v_τ – проекция скорости на направление касательной к траектории, v – модуль скорости, ρ – радиус кривизны траектории в данной точке, $F_{k\tau}$, F_{kn}, F_{kb} – проекции силы $\boldsymbol{F}_k$ на оси натурального триэдра ($\vec{\tau}$ – касательная, $\boldsymbol{n}$ – главная нормаль, $\boldsymbol{b}$ – бинормаль).

Как следует из последнего уравнения, проекция равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, на бинормаль равна нулю, т.е. траектория располагается так, что равнодействующая сила оказывается лежащей в соприкасающейся плоскости, проведенной в данной точке траектории.

Основное уравнение динамики плоского движения материальной точки в полярных координатах имеет вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \sum_{k=1}^{n} F_{kr}, \quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \sum_{k=1}^{n} F_{k\varphi}; \tag{3*}$$

здесь r – радиус-вектор точки, φ – полярный угол (рис. 8.1).

Основное уравнение динамики материальной точки записывается соответственно выбранной системе координат. Так, основное уравнение динамики можно составить в цилиндрических, сферических и других криволинейных координатах. Ниже, в гл. 10, § 6, приводится основное уравнение динамики материальной точки, отнесенное к любой системе координат.

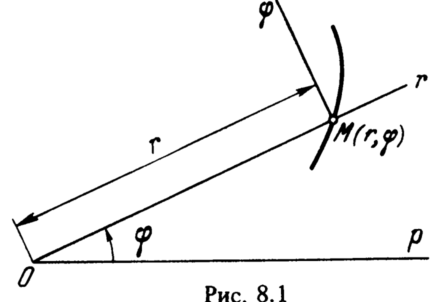


Рис. 8.1

С помощью основного уравнения динамики материальной точки можно решать две основные задачи динамики – первую и вторую.

Первой задачей динамики называется задача, в которой по заданным уравнениям движения и массе материальной точки определяется равнодействующая сил, приложенных к этой точке.

Второй задачей динамики называется задача, в которой по заданным силам и массе материальной точки определяется ее движение.

Следующий параграф посвящен решению первых задач динамики материальной точки.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ ПО ЗАДАННОМУ ДВИЖЕНИЮ (ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ)

Если даны уравнения движения материальной точки массой m в декартовых координатах: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то проекции F_x, F_y и F_z силы

$$\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k},$$

вызывающей это движение, определяются по формулам

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \qquad F_z = m\ddot{z}, \tag{1*}$$

откуда

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos(\widehat{x, \boldsymbol{F}}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\widehat{y, \boldsymbol{F}}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\widehat{z, \boldsymbol{F}}) = \frac{F_z}{F}.$$

Таким образом, первая задача динамики материальной точки легко решается посредством дифференцирогания заданных уравнений движения точки.

Если дано уравнение движения материальной точки массой m по траектории в естественной форме: $\sigma = f(t)$, то проекции F_τ, F_n и F_b силы

$$\boldsymbol{F} = F_\tau \vec{\tau} + F_n \boldsymbol{n} + F_b \boldsymbol{b},$$

вызывающей это движение, определяются по формулам

$$F_\tau = m\frac{dv_\tau}{dt}, \quad F_n = m\frac{v^2}{\rho}, \quad F_b = 0, \tag{2*}$$

откуда

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}, \quad \cos(\widehat{\vec{\tau}, F}) = \frac{F_\tau}{F}, \quad \cos(\widehat{n, F}) = \frac{F_n}{F}, \quad \cos(\widehat{b, F}) = 0.$$

В формулах (2*) $v_\tau = d\sigma/dt$.

Если даны уравнения плоского движения материальной точки массой m в полярных координатах $r = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$, то проекции F_r и F_φ силы $\boldsymbol{F}$, вызывающей это движение, определяются по формулам

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \quad F_\varphi = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}), \tag{3*}$$

откуда

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2}, \quad \cos(\widehat{r, F}) = \frac{F_r}{F}, \quad \cos(\widehat{\varphi, F}) = \frac{F_\varphi}{F}.$$

Сила, приложенная к материальной точке, называется *центральной*, если линия ее действия проходит во время движения через неподвижную точку, называемую *центром*. Сила, направленная к неподвижному центру, называется *силой притяжения*. Сила, направленная от неподвижного центра, называется *силой отталкивания*.

Движение материальной точки под действием центральной силы происходит в плоскости, проходящей через радиус-вектор и начальную скорость точки. Для его исследования удобно ввести полярные координаты и использовать формулу Бине (1786–1856, французский математик, механик и астроном)

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2}{4mC^2}F_r, \tag{4*}$$

где C — секторная скорость точки, которая при действии центральной силы постоянна: $C = \dot{S} = r^2\dot{\varphi}/2$. (*Секторной скоростью* называется производная по времени от площади S, описываемой радиусом-вектором r движущейся точки.)

Применение формулы Бине позволяет определить центральную силу по данному уравнению орбиты (первая задача динамики). Если проекция F_r оказывается положительной, то центральная сила является силой отталкивания, если отрицательной, то силой притяжения.

Указание. Первые задачи динамики свободной материальной точки, в которых требуется определить силу, рекомендуется решать в следующем порядке:

1) изобразить на рисунке материальную точку в текущем положении и приложенные к ней силы;

2) выбрать систему отсчета, если она не указана в условии задачи;

3) определить по заданному закону движения ускорение материальной точки и найти его проекции на выбранные оси координат;

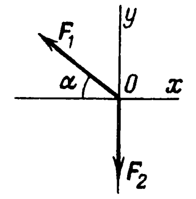
4) составить основные уравнения динамики материальной точки в проекциях на оси координат;

5) из системы составленных уравнений определить искомые величины.

Если при решении первой задачи динамики материальной точки требуется определить равнодействующую сил, приложенных к этой точке, то решение задачи сводится к дифференцированию заданных уравнений движения точки с последующим использованием формул (1*), (2*) или (для плоского движения) формул (3*).

Задача 8.1. Материальная точка, находящаяся под действием двух сил F_1 и F_2, движется вдоль оси x (рис.).

Какому условию должен удовлетворить модуль силы F_2 для того, чтобы точка двигалась по прямой?



К задаче 8.1

Решение. Для прямолинейного движения материальной точки, необходимо и достаточно, чтобы ее начальная скорость и равнодействующая сил во все время движения лежали на этой прямой. Поэтому сумма проекций сил на перпендикулярную к этой прямой ось y должна быть равна нулю: $\Sigma F_{ky} = 0$. В данном случае имеем $F_1 \sin\alpha - F_2 = 0$, откуда $F_2 = F_1 \sin\alpha$.

Задача 8.2. Материальная точка массой m движется на плоскости согласно уравнениям $x = bt$, $y = ct$, где b и c — постоянные; x, y — декартовы координаты точки.

Определить силу, вызывающую это движение.

Решение. Проекции искомой силы на оси декартовых координат определяем по формулам $F_x = m\ddot{x}$ и $F_y = m\ddot{y}$. Воспользовавшись заданными уравнениями движения, находим $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. Следовательно, $F_x = F_y = 0$, т.е. точка движется по инерции.

Эту задачу можно решить и иначе, определив траекторию и скорость точки. Точка движется по прямой $y = cx/b$ с постоянной скоростью $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Следовательно, согласно закону инерции, $F = 0$.

Задача 8.3. Материальная точка массой m движется согласно уравнениям $x = b\cos kt, y = c\sin kt$.

Определить силу F, вызывающую это движение, если известно, что сила зависит только от положения точки.

Решение. Проекции силы F, приложенной к материальной точке, определяются по формулам $F_x = m\ddot{x}$, $F_y = m\ddot{y}$. В данном случае

$$\ddot{x} = -bk^2\cos kt, \quad \ddot{y} = -ck^2\sin kt.$$

Следовательно,

$$F_x = -mbk^2\cos kt, \quad F_y = -mck^2\sin kt.$$

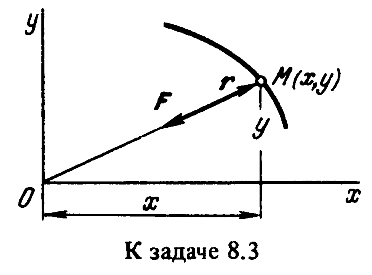
Воспользовавшись законом движения точки, получим

$$F_x = -mk^2x, \quad F_y = -mk^2y.$$

Модуль силы F равен

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2r,$$

где r — модуль радиуса-вектора материальной точки $r = \overline{OM}$ (рис.).



К задаче 8.3

Направление силы F определяем с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\widehat{x,F}) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r},$$

$$\cos(\widehat{y,F}) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Так как x/r и y/r определяют углы, образуемые соответственно осями x и y с радиусом-вектором r, то сила F направлена от M к O. Следовательно, данная материальная точка движется под действием силы притяжения к центру O, равной по модулю $F = k^2mr$.

Задача 8.4. Материальная точка массы m движется по окружности радиусом r согласно уравнению $\sigma = bt$.

Определить силу, вызывающую это движение(σ — дуговая координата, b — постоянная величина).

Решение. Воспользуемся осями натурального триэдра τ, n и b. Проекции искомой силы на эти оси определяются по формулам

$$F_\tau = m\frac{dv_\tau}{dt}, \quad F_n = m\frac{v^2}{\rho}, \quad F_b = 0.$$

Учитывая, что проекция скорости точки на касательную τ равна $v_\tau = d\sigma/dt$, находим, что $v_\tau = b$. Следовательно,

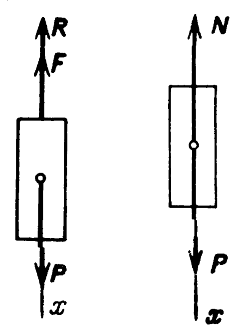
$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{b^2}{r}.$$

Итак, $F_\tau = 0$, $F_n = mb^2/r$, $F_b = 0$, т.е. сила F, вызывающая заданное движе-

ние материальной точки, направлена по радиусу окружности к ее центру и по модулю равна mb^2/r.

Задача 8.5. Пассажирский лифт массой $m = 800$ кг движется вниз с ускорением $a = 0{,}6g$, где g – ускорение свободного падения.

Определить натяжение поддерживающего троса, если сопротивлени движению F равно 0,2 силы тяжести лифта.



К задаче 8.5 К задаче 8.6

Р е ш е н и е. К лифту приложена активная сила – сила тяжести лифта P, сила сопротивления движению F, направленная в сторону, противоположную движению, т.е. по вертикали вверх (рис.) Применяя принцип освобождаемости от связей, мысленно разрезаем трос и заменяем его действие на лифт силой реакции R, направленной по вертикали вверх. Ось x направим вдоль траектории лифта, т.е. по вертикали вниз.

Дифференциальное уравнение движения лифта, рассматриваемого как движение материальной точки, в проекции на ось x будет иметь вид

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx},$$

откуда, внося все данные, находим

$$m\ddot{x} = P - F - R,$$

или

$$R = P - F - m\ddot{x}.$$

Учитывая, что $\ddot{x} = a = 0{,}6g$, $P = mg$, $F = 0{,}2mg$, имеем

$$R = 800g - 0{,}2 \cdot 800g - 0{,}6 \cdot 800g = 160g \text{ Н}.$$

П р и м е ч а н и е. Ускорение тела при свободном падении вблизи земной поверхности уменьшается от полюсов к экватору (вследствие сфероидальной формы Земли и ее вращения) и с удалением точки вверх от поверхности Земли (по закону всемирного тяготения Ньютона). Максимальное ускорение имеет тело при свободном падении на уровне моря на полюсах Земли $g = 9{,}83$ м/с^2. Минимальное ускорение – на экваторе $g = 9.78$ м/с^2.

Обычно в расчетах принимается среднее значение ускорения свободного падения тел у Земли на уровне моря на широте Парижа (48°51′), равное $g = 9{,}81$ м/с^2.

Задача 8.6. Человек массой m находится в кабине пассажирского лифта, движущегося вниз с ускорением $a = \alpha g$, где $0 < \alpha < 1$, g – ускорение свободного падения.

Найти силу давления человека на пол кабины. Определить также ускорение лифта, при котором человек будет находиться в состоянии невесомости.

Решение. К человеку приложена активная сила – его сила тяжести $P = mg$. Применив закон освобождаемости от связей, мысленно отбросим пол кабины, заменив его действие на человека реакцией N, направленной вертикально вверх. Направим ось x по вертикали вниз (рис.).

Напишем основное уравнение динамики материальной точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P - N. \qquad (1)$$

Так как $\ddot{x} = a = \alpha g$, то из уравнения (1) получим

$$N = P - m\ddot{x} = mg(1 - \alpha). \qquad (2)$$

Учитывая, что $0 < \alpha < 1$, имеем $N < mg$. Искомая сила давления равна по модулю силе N и направлена в противоположную сторону. Если ускорение a лифта направлено вверх, т.е. $\ddot{x} = -a = -\alpha g$, то формула (2) принимает вид $N = mg\,(1 + \alpha)$, т.е. $N > mg$.

Рассмотрим случай, когда сила давления, а значит, и сила раекции N равны нулю. Из формулы (2) при $N = 0$ имеем $\alpha = 1$, т.е. $a = g$. Итак, при свободном падении лифта с ускорением g давление человека на дно кабины отсутствует. Это состояние называется *невесомостью.* При невесомости отсутствуют взаимные давления отдельных частей тела человека. Это и вызывает у него необычные ощущения. Если бы при этом человек стоял на пружинных весах, то стрелка весов находилась бы на нулевой отметке. Показание весов не изменится, если на плечи человека положить дополнительный груз.

Следовательно, какой бы груз ни положить на плечи человека, он этого не почувствует, если движение лифта происходит вниз с ускорением, равным ускорению свободного падения g.

При состоянии невесомости все точки тела имеют равные ускорения.

В заключение отметим, что состояние невесомости имеет место не только при свободном падении.

Задача 8.7. Человек массой 80 кг стоит на палубе корабля во время качки. Определить наибольшую и наименьшую силы давления, оказываемого человеком на палубу, если корабль совершает в вертикальном направлении гармоническое колебательное движение с периодом $T = 9$ с и размахом $2A = 1{,}2$ м.

Решение. Уравнение гармонического колебательного движения корабля имеет вид

$$y = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 0{,}6\cos\left(\frac{2\pi}{9}t\right)\ \text{м}.$$

Находим ускорение корабля как вторую производную от y по времени:

$$a = \ddot{y} = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

На человека действуют две силы: сила тяжести mg и реакция палубы N. Но по отношению к палубе человек неподвижен. Поэтому ускорение корабля будет равно ускорению человека. Тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$ma = mg - N;$$

отсюда

$$N = mg - ma.$$

Реакция палубы будет принимать наибольшее и наименьшее значения, когда

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \pm 1. \quad (1)$$

Следовательно,

$$N_{max} = mg + mA\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 80\cdot 9{,}81 + 80\cdot 0{,}6\cdot\left(\frac{2\pi}{9}\right)^2 = 808{,}3\ \text{Н},$$

$$N_{min} = mg - mA\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 80\cdot 9{,}81 - 80\cdot 0{,}6\cdot\left(\frac{2\pi}{9}\right)^2 = 761{,}7\ \text{Н}.$$

Сила давления будет максимальной, когда корабль идет вниз с убывающей скоростью или поднимается вверх с возрастающей скоростью, и минимальной, когда корабль идет вниз с возрастающей скоростью или поднимается вверх с убывающей скоростью, причем моменты времени определяются формулой (1).

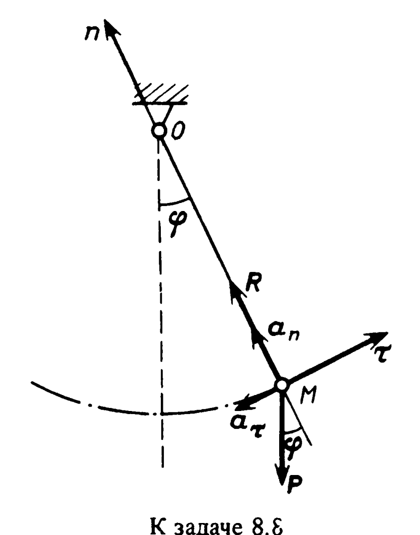
Задача 8.8. Математический маятник длиной l и массой m движется согласно уравнению

$$\varphi = \varphi_0 \sin kt, \quad (1)$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали, φ_0 и k — постоянные величины. Определить натяжение нити.

Решение. Изобразим маятник в произвольном положении (рис.), при котором его нить образует с вертикалью угол φ. Проведем ось главной нормали n вдоль нити, а ось касательной $\vec{\tau}$ – перпендикулярно оси n по касательной к траектории точки M в сторону возрастания угла φ.

К маятнику приложены следующие силы: сила тяжести маятника $P = mg$ и реакция нити R. На рисунке изображены эти силы, а также составляющие ускорения точки M: нормальное ускорение a_n, касательное ускорение a_τ.



К задаче 8.8

Для определения реакции нити R воспользуемся основным уравнением движения материальной точки в проекции на главную нормаль n:

$$ma_n = \Sigma F_{kn}. \tag{2}$$

Внося в это уравнение значение $a_n = l\dot{\varphi}^2$, находим

$$ml\dot{\varphi}^2 = R - P\cos\varphi, \tag{3}$$

откуда

$$R = P\cos\varphi + \frac{P}{g}\, l\dot{\varphi}^2. \tag{4}$$

Согласно условию, $\varphi = \varphi_0 \sin kt$. Следовательно,

$$\dot{\varphi} = \varphi_0 k \cos kt.$$

Внося значения φ и $\dot{\varphi}$ в уравнение (4), имеем

$$R = P\left[\cos(\varphi_0 \sin kt) + \frac{k^2 l \varphi_0^2}{g} \cos^2 kt\right].$$

Максимальное значение реакции нити достигается в отвесном положении, когда $kt = \pi n$ (где n – целое число):

$$R_{\max} = P\left(1 + \frac{lk^2}{g}\, \varphi_0^2\right).$$

Искомое натяжение нити T направлено противоположно реакции R и равно ей по модулю.

Задача 8.9. Под действием центральной силы, зависящей от расстояния, материальная точка описывает траекторию, уравнение которой в

полярных координатах имеет вид $r^n = b^n \cos n\varphi$ (синус-спираль). Центр – в начале координат.

Найти 1) зависимость силы от расстояния и 2) скорость в любой точке траектории как функцию расстояния.

Решение. Поскольку сила является центральной, нужно найти радиальную составляющую ускорения. Сила равна произведению массы на радиальную составляющую ускорения:

$$F = ma_r. \tag{1}$$

Радиальная составляющая ускорения в полярных координатах равна

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2. \tag{2}$$

Для центральной силы секторная скорость является постоянной:

$$r^2\dot{\varphi} = C. \tag{3}$$

Дифференцируя уравнение траектории, имеем

$$nr^{n-1}\dot{r} = -nb^n \sin n\varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Подставляя $\dot{\varphi}$ из (3), получим

$$\dot{r} = -\frac{b^n \sin n\varphi}{r^{n-1}} \frac{C}{r^2} = -\frac{Cb^n \sin n\varphi}{r^{n+1}}. \tag{4}$$

Отсюда

$$\ddot{r} = +\frac{Cb^n(n+1)\sin n\varphi}{r^{n+2}}\dot{r} - \frac{nCb^n \cos n\varphi}{r^{n+1}}\dot{\varphi}.$$

Подставляя вместо $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ их значения, получим

$$\ddot{r} = -\frac{C^2b^{2n}(n+1)}{r^{2n+3}}\sin^2 n\varphi - \frac{nC^2b^n}{r^{n+3}}\cos n\varphi. \tag{5}$$

Но из уравнения траектории следует, что

$$\cos n\varphi = \frac{r^n}{b^n}, \quad \sin^2 n\varphi = 1 - \cos^2 n\varphi = 1 - \frac{r^{2n}}{b^{2n}}. \tag{6}$$

Тогда (5) дает

$$\ddot{r} = -\frac{C^2b^{2n}(n+1)}{r^{2n+3}}\left(1 + \frac{r^{2n}}{b^{2n}}\right) - \frac{nC^2b^n}{r^{n+3}}\frac{r^n}{b^n},$$

или

$$\ddot{r} = -\frac{C^2b^{2n}(n+1)}{r^{2n+3}} + \frac{C^2(n+1)}{r^3} - \frac{nC^2}{r^3} = -\frac{C^2b^{2n}(n+1)}{r^{n+3}} + \frac{C^2}{r^3}. \tag{7}$$

Подставляя (7) и (3) в (2), окончательно получим

$$a_r = -\frac{C^2 b^{2n}(n+1)}{r^{2n+3}} + \frac{C^2}{r^3} - \frac{C^2}{r^4}\, r = -\frac{C^2 b^{2n}(n+1)}{r^{2n+3}} .$$

Отсюда

$$F = ma_r = -\frac{mC^2 b^{2n}(n+1)}{r^{2n+3}} .$$

Заметим, что при $n > -1$ сила направлена против радиуса (т.е. притягивающая), а при $n < -1$ – по радиусу (т.е. отталкивающая). При $n = -1$ сила отсутствует, что очевидно из того, что траектория при этом дается уравнением $r = b/\cos\varphi$ или в декартовых координатах: $x = b$ (прямая линия).

Для определения модуля скорости используем (4) и (3):

$$v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 = \frac{C^2 b^{2n}}{r^{2n+2}}\sin^2 n\varphi + r^2\,\frac{C^2}{r^4} .$$

Учитывая (6), получим

$$v^2 = \frac{C^2 b^{2n}}{r^{2n+2}}\left[1 - \frac{r^{2n}}{b^{2n}}\right] + \frac{C^2}{r^2} = \frac{C^2 b^{2n}}{r^{2n+2}} .$$

Отсюда для абсолютной величины скорости имеем

$$v = \frac{Cb^n}{r^{n+1}} = \frac{C}{b}\left(\frac{r}{b}\right)^{-n-1} .$$

При $n = -1$ скорость, разумеется, постоянна.

Примечания: 1. Тот же результат можно получить, воспользовавшись формулой Бине. 2. Нужно обратить внимание на важность того условия, что сила зависит только от расстояния. Иначе можно получить много разных зависимостей, но в них будет входить угол φ.

Задача 8.10. Точка массой m движется по винтовой линии согласно уравнениям

$$x = r\cos kt, \quad y = r\sin kt, \quad z = kbt. \tag{1}$$

Определить силу давления точки на поверхность цилиндра.

Решение. Прямой круговой цилиндр (рис.), высота которого h, а радиус основания r, развернем в плоскость, проходящую через одну из его образующих CD. Боковая поверхность цилиндра приняла вид прямоугольника CC_1D_1D, основание которого равно $2\pi r$.

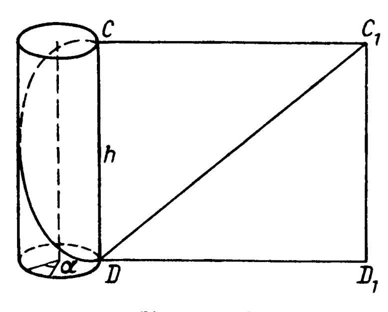
Проведем диагональ DC_1 и свернем прямоугольник опять в цилиндрическую поверхность. При этом прямая DC_1 превратится в кривую линию, которая и называется *винтовой*. Расстояние h между двумя точками винтовой линии, расположенными на одной и той же образующей цилиндра,

называется *ходом винтовой линии.* Отношение

$$b = \frac{h}{2\pi}$$

называется *параметром винтовой линии.*

Из данного определения следует, что расстояние s между прямоугольными проекциями двух точек винтовой линии M и M_1 пропорционально



К задаче 8.10

углу α между проектируемыми прямыми и что отношение s к α равно параметру винтовой линии:

$$\frac{s}{\alpha} = b = \frac{h}{2\pi} .$$

Когда точка движется по винтовой линии, то ее проекции на ось цилиндра и на его основание проходят пропорциональные пути.

Найдем проекции скорости точки, движущейся по винтовой линии согласно уравнениям (1) на декартовы оси координат:

$$\dot{x} = -rk\sin kt, \quad \dot{y} = rk\cos kt, \quad \dot{z} = kb.$$

Модуль скорости равен

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = k\sqrt{r^2 + b^2} = \text{const}.$$

Проекции ускорения точки на декартовы оси координат равны

$$\ddot{x} = -rk^2\cos kt, \quad \ddot{y} = -rk^2\sin kt, \quad \ddot{z} = 0. \qquad (2)$$

Так как скорость точки по модулю постоянная, то ее касательное ускорение равно нулю. Полное ускорение точки, равное по модулю

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = rk^2,$$

будет нормальным ускорением. Но последнее определяется формулой

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho} .$$

Отсюда определяется радиус кривизны винтовой линии

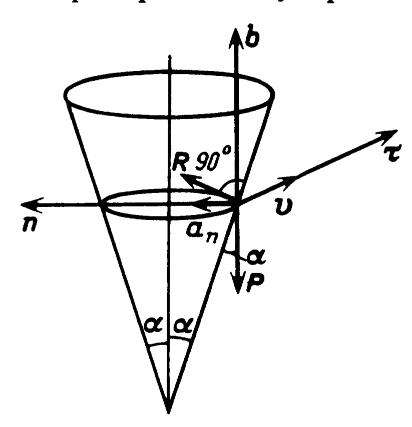
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{k^2(r^2 + b^2)}{rk^2} = r + \frac{b^2}{r}.$$

Теперь можно определить силу реакции, действующую со стороны цилиндра на движущуюся точку:

$$N = ma = ma_n = m\frac{v^2}{\rho} = m\frac{k^2(r^2 + b^2)r}{r^2 + b^2} = mk^2r.$$

Реакция лежит в плоскости, параллельной xy, и направлена, согласно (2), перпендикулярно оси цилиндра.

Задача 8.11. Материальная точка движется внутри неподвижного гладкого кругового конуса по горизонтальной окружности с постоянной по модулю скоростью v. Угол при вершине конуса равен 2α.



К задаче 8.11

Определить радиус ρ окружности, описываемой точкой.

Решение. Совместив начало координат с движущейся точкой, изобразим оси натурального триэдра $\vec{\tau}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ (рис.). Оси главной нормали $\boldsymbol{n}$ и бинормали $\boldsymbol{b}$ лежат в плоскости рисунка, ось касательной $\vec{\tau}$ направлена перпендикулярно плоскости рисунка (за нее).

На материальную точку действуют силы: сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и нормальная сила реакции внутренней боковой поверхности конуса R. Точка, движущаяся равномерно по горизонтальной окружности, имеет только нормальное ускорение $\boldsymbol{a}_n$, направленное по горизонтали к центру окружности.

Запишем дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на главную нормаль и бинормаль:

$$m\frac{v^2}{\rho} = \Sigma F_{kn}, \qquad 0 = \Sigma F_{kb}.$$

В данной задаче

$$m\frac{v^2}{\rho} = R\cos\alpha, \qquad R\sin\alpha - P = 0.$$

Исключив из этой системы уравнений R, находим радиус окружности

$$\rho = \frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\alpha.$$

Задача 8.12. Траектория точки массой m – логарифмическая спираль, уравнение которой имеет вид

$$r = be^{k\varphi}.$$

Пользуясь формулой Бине, определить силу, действующую на точку.

Решение. Формула Бине дает выражение центральной силы F через $u = 1/r$ и угол φ:

$$F = -mu^2C^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right),$$

где $u = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{be^{k\varphi}} = \dfrac{1}{b}e^{-k\varphi}$. Находим производные от u по углу φ:

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{k}{b}e^{-k\varphi}, \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{k^2}{b}e^{-k\varphi}.$$

Подставим найденные значения в формулу Бине:

$$\frac{F}{m} = -C^2\frac{1}{b^2}e^{-2k\varphi}\left(\frac{1}{b}e^{-k\varphi} + \frac{k^2}{b}e^{-k\varphi}\right) =$$

$$= -C^2\frac{1}{b^3}e^{-3k\varphi}(1 + k^2).$$

Выразим силу F через радиус-вектор r:

$$\frac{F}{m} = -C^2(1 + k^2)\frac{1}{r^3},$$

т.е. сила притяжения обратно пропорциональна кубу радиуса. Таким образом, если бы вместо ньютоновой силы всемирного тяготения действовала центральная сила, обратно пропорциональная кубу расстояния, то планеты или неограниченно приближались бы к Солнцу, или же (при силе отталкивания) неограниченно удалялись бы от Солнца, двигаясь по логарифмической спирали.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 26.1, 26.7, 26.9, 26.12, 26.15, 26.17, 26.22, 26.29, 26.30, 26.32, 26.34, 26.35.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ЗАДАННЫМ СИЛАМ (ВТОРАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ)

1. Свободное движение материальной точки. Даны силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$, приложенные к материальной точке массой m; требуется определить закон движения точки.

Для этого следует:

а) выбрать систему отсчета (систему координат);

б) составить дифференциальные уравнения движения в избранной системе отсчета;

в) проинтегрировав систему дифференциальных уравнений, определить произвольные постоянные и найти проекции скорости точки как функции времени;

г) проинтегрировав дифференциальные уравнения, полученные в предыдущем пункте, вновь найти координаты точки как функции времени; при этом необходимо также определить произвольные постоянные интегрирования.

При составлении дифференциальных уравнений движения материальной точки необходимо прежде всего определить силы, действующие на точку.

Выбор системы координат определяется, с одной стороны, характером движения точки (прямолинейное движение, движение на плоскости, движение в пространстве), с другой стороны, видом действующих на точку сил. Так, например, при прямолинейном движении точки естественно выбрать за ось координат прямую, по которой движется точка. При движении точки на плоскости под действием постоянных сил и сил, зависящих от скорости, можно применить декартовы координаты. Примером такого движения является движение точки, брошенной наклонно к горизонту, под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха.

При криволинейном движении точки целесообразно применять основное уравнение динамики в проекциях на оси натурального триэдра.

При действии центральных сил притяжения и отталкивания целесообразно выбирать систему полярных координат или пользоваться формулой Бине (см. § 2)

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=-\frac{r^2}{4mC^2}F_r.$$

Если задача решается в проекциях на оси инерциальной системы декартовых координат, то надо интегрировать систему дифференциальных уравнений

$$m\ddot{x}=\sum_{k=1}^{n}F_{kx},\qquad m\ddot{y}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky},\qquad m\ddot{z}=\sum_{k=1}^{n}F_{kz}. \tag{1*}$$

В результате интегрирования этой системы вначале находятся проекции

скорости на декартовы оси координат:

$$\dot{x} = \varphi_1(t), \quad \dot{y} = \varphi_2(t), \quad \dot{z} = \varphi_2(t). \qquad (2^*)$$

Интегрируя систему (2*), находим закон движения точки в декартовых координатах:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \qquad (3^*)$$

Так как система (1*) состоит из трех дифференциальных уравнений второго порядка, то при ее интегрировании появляются шесть произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_6$. Для их определения в условие задачи должны быть включены дополнительные данные, называемые *начальными условиями движения.*

Начальные условия движения материальной точки определяют положение точки и ее скорость в некоторый фиксированный момент времени. Положение точки определяется тремя координатами x, y, z, а скорость точки – тремя проекциями скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; таким образом, начальные условия имеют вид:

при $t = t_0$ $\quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$ (положение точки),

$\qquad\qquad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0$ (скорость точки).

Часто эти условия задаются для начального момента времени $t = 0$. Поэтому их и называют *начальными.* Однако в некоторых задачах, например о полете баллистической ракеты, эти условия задаются для конечного момента времени.

В результате подстановки начальных условий движения в уравнения (2*) и (3*) образуется система шести уравнений для определения шести неизвестных $C_1, \ldots, C_6$.

Если движение материальной точки происходит в плоскости xy, то число дифференциальных уравнений движения равно двум, а число начальных условий – четырем:

при $t = t_0$ $\quad x = x_0, \quad y = y_0$ (положение точки),

$\qquad\qquad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0$ (скорость точки)

(в данном случае $z = \dot{z}_0 = 0$).

Если материальная точка движется прямолинейно, то при направлении оси x вдоль траектории получим одно дифференциальное уравнение движения и два начальных условия:

при $t = t_0$ $\quad x = x_0$ (положение точки),

$\qquad\qquad \dot{x} = \dot{x}_0$ (скорость точки).

Аналогично решаются задачи при выборе других систем отсчета.

Силы, приложенные к точке, могут быть: постоянными, функцией времени, функцией расстояния, функцией скорости, функцией ускорения.

Примером постоянной силы по модулю и направлению является сила тяжести (при условии, что движение происходит вблизи земной поверхности).

Примером сил, зависящих от времени, являются периодически изменяющиеся силы, вызывающие колебания точки или тела. Такие силы могут менять с течением времени модуль и направление.

Примером силы, зависящей от расстояния, является сила, создаваемая растянутой или сжатой пружиной. Эта сила пропорциональна удлинению или сжатию пружины и, следовательно, является функцией расстояния. Другим примером силы, зависящей от расстояния, является сила взаимного притяжения небесных тел. Эта сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между двумя небесными телами.

Примером силы, зависящей от скорости, является сила сопротивления воздуха или воды. Эта сила пропорциональна скорости движущегося тела (при малых сккоростях) и квадрату скорости (при больших скоростях).

Примером силы, зависящей от ускорения, является сила, возникающая при прямолинейном поступательном движении шарика радиусом r в идеальной жидкости с ускорением $\boldsymbol{a}$. В этом случае сопротивление жидкости ускоренному движению шарика равно *)

$$\boldsymbol{F} = -\frac{2}{3}\pi r^3 \gamma \boldsymbol{a} = -k\boldsymbol{a},$$

где γ – плотность жидкости. Коэффициент k называется *присоединенной массой*. Он имеет размерность массы и равен половине массы жидкости в объеме шарика. Следовательно, обозначив буквой $\boldsymbol{Q}$ равнодействующую остальных сил, действующих на точку, запишем основной закон динамики материальной точки:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q} - k\boldsymbol{a},$$

или

$$(m + k)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q}.$$

Следовательно, под действием силы $\boldsymbol{Q}$ шарик движется в жидкости так же, как шарик в пустоте, но его масса увеличивается на присоединенную массу, равную половине массы жидкости в объеме шарика.

В более общем случае силы являются функциями времени, положения, скорости и ускорения точки. Тогда система дифференциальных уравнений движения точки (1*) имеет вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}),\\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}),\\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}). \end{aligned} \qquad (4^*)$$

---

*) Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987.– С. 325.

Пусть материальная точка движется под действием силы притяжения, пропорциональной расстоянию до центра. Если этот центр неподвижен, то сила будет функцией расстояния. Если же центр будет совершать колебания, зависящие от времени, то сила притяжения будет являться одновременно функцией координат и времени.

Для осуществления прямолинейного движения материальной точки необходимо и достаточно, чтобы начальная скорость точки и равнодействующая сил, приложенных к этой точке, лежали на одной прямой.

Для осуществления движения материальной точки в плоскости необходимо и достаточно, чтобы начальная скорость точки и равнодействующая сил, приложенных к точке, лежали в этой плоскости.

Решение задач на определение движения по заданным силам связано с интегрированием системы дифференциальных уравнений. Интегрирование этих уравнений в замкнутом виде может быть выполнено только в ограниченном числе случаев. Если интегрирование системы дифференциальных уравнений представляет значительные трудности, то приходится пользоваться приближенными методами; в частности, для этого можно использовать электронные вычислительные машины. Задача определения движения точки по заданным силам является одним из примеров математического моделирования процессов, происходящих в природе и технике.

Указание. Задачи динамики материальной точки на определение свободного движения по заданным силам рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать систему координат;

2) записать начальные условия движения точки;

3) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке;

4) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки, рассматривая ее в текущем положении;

5) проинтегрировав систему дифференциальных уравнений движения, найти проекции скорости точки и, пользуясь начальными условиями движения точки, определить произвольные постоянные;

6) проинтегрировав дифференциальные уравнения движения, определяющие зависимость проекций скорости от времени, найти уравнение движения точки и, пользуясь начальными условиями, определить произвольные постоянные;

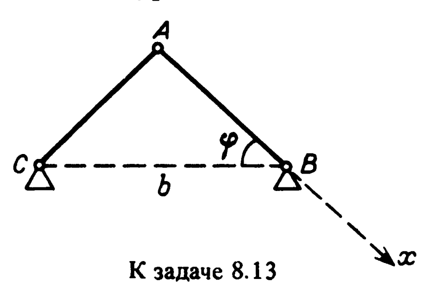
7) воспользовавшись уравнениями движения материальной точки, определить искомые величины (например, траекторию точки).

Задача 8.13. Капля воды начинает двигаться от конька крыши со скоростью v_0, направленной по линии наибольшего ската. Определить угол наклона крыши к горизонту φ, при котором капля будет стекать с крыши в минимальное время, если расстояние между стенами, поддерживающими крышу, равно b (рис.). Трением капли о крышу пренебречь.

Решение. Длина ската крыши равна

$$AB = AC = \frac{b}{2\cos\varphi}. \tag{1}$$

Составим дифференциальное уравнение движения точки по скату.



К задаче 8.13

Обозначая ось, совпадающую со скатом AB, через x и выбирая начало в точке A, имеем

$$m\ddot{x} = p\sin\varphi = mg\sin\varphi. \tag{2}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\dot{x} = C_1 + g\sin\varphi\cdot t. \tag{3}$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется с помощью начальных данных: $\dot{x} = v_0$ при $t = 0$. Следовательно, уравнение (3) примет вид

$$\dot{x} = v_0 + g\sin\varphi\cdot t. \tag{4}$$

Разделяя переменные, находим

$$dx = v_0 dt + g\sin\varphi\cdot t\,dt. \tag{5}$$

Интегрируя, находим

$$x = v_0 t + \frac{g\sin\varphi\cdot t^2}{2} + C_2. \tag{6}$$

Постоянная интегрирования C_2 равна нулю, так как при $t = 0$ $x = 0$. Следовательно,

$$x = v_0 t + \frac{g\sin\varphi\cdot t^2}{2}. \tag{7}$$

Приравняем длину ската крыши (1) пути, пройденному каплей (7)

$$\frac{b}{2\cos\varphi} = v_0 t + \frac{g\sin\varphi\cdot t^2}{2}, \tag{8}$$

где $t = f(\varphi)$ – время, необходимое для стока воды.

Для нахождения минимального времени продифференцируем уравнение (8) по переменной φ:

$$\frac{b \sin\varphi}{2\cos^2\varphi} = v_0 \frac{dt}{d\varphi} + \frac{g\cos\varphi \cdot t^2}{2} + \frac{g\sin\varphi \cdot 2t}{2} \frac{dt}{d\varphi}. \qquad (9)$$

Приравнивая производную $dt/d\varphi$ нулю, находим уравнение, определяющее искомый угол φ, при котором сток воды будет происходить в кратчайшее время:

$$\frac{b\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} = \frac{g\cos\varphi \cdot t^2}{2}. \qquad (10)$$

Отсюда

$$t^2 = \frac{b\sin\varphi}{g\cos^3\varphi}. \qquad (11)$$

Вносим это значение времени в уравнение движения капли (8):

$$\frac{b}{2\cos\varphi} = \frac{v_0\sqrt{b\sin\varphi}}{\sqrt{g\cos^3\varphi}} + \frac{g\sin^2\varphi \cdot b}{2g\cos^3\varphi}. \qquad (12)$$

или

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \frac{2v_0}{b} \frac{\sqrt{b\sin\varphi\cos^3\varphi}}{\sqrt{g}}. \qquad (13)$$

Отсюда окончательно получаем

$$(1 - \mathrm{tg}^2\varphi)^2 = \frac{4v_0^2}{bg}\,\mathrm{tg}\,\varphi. \qquad (14)$$

Угол φ, определяемый этим уравнением, и обеспечивает сток воды в кратчайший промежуток времени.

Если начальная скорость капли равна нулю, то искомый угол φ определяется из (14):

$$\mathrm{tg}\,\varphi = 1.$$

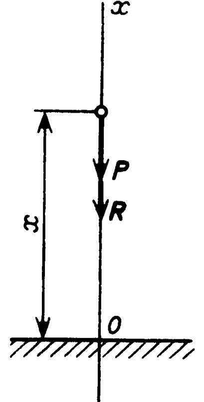
Задача 8.14. Материальная точка брошена вертикально вверх с начальной скростью v_0. Определить, на какой высоте h от поверхности Земли скорость точки уменьшится в два раза, если проекция силы сопротивления движению на ось x, направленную вертикально вверх, равна $R_x = -k^2 m\dot{x}^2$, где m - масса точки, $\dot{x}$ – проекция скорости точки на ось x, k^2 – постоянный коэффициент.

Р е ш е н и е. Выберем начало отсчета оси x на поверхности Земли в начальном положении точки (рис.). Тогда начальные условия движения

точки будут иметь вид

$$\text{при } t=0 \quad x=0, \quad \dot{x}=v_0. \tag{1}$$

К точке приложены две силы: $P = mg$ – сила тяжести точки и R – сила сопротивления движению, направленная в сторону, противоположную движению, т.е. по вертикали вниз.



К задаче 8.14

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -mg - k^2 m\dot{x}^2, \tag{2}$$

откуда

$$\ddot{x} = -(g + k^2\dot{x}^2). \tag{3}$$

По условию задачи требуется определить положение точки в зависимости от ее скорости. Поэтому умножим обе части уравнения (3) на dx:

$$\ddot{x}\,dx = -(g + k^2\dot{x}^2)\,dx. \tag{4}$$

Но

$$\ddot{x}\,dx = \frac{d\dot{x}}{dt}\,dx = \dot{x}\,d\dot{x}. \tag{5}$$

Внося это значение (5) в левую часть уравнения (4) и разделяя переменные, имеем

$$\frac{\dot{x}}{g + k^2\dot{x}^2}\,d\dot{x} = -\,dx. \tag{6}$$

Проинтегрировав это дифференциальное уравнение, найдем

$$\frac{1}{2k^2}\ln(g + k^2\dot{x}^2) = -x + C. \tag{7}$$

Подставив в уравнение (7) начальные условия движения (1), найдем произвольную постоянную интегрирования

$$C = \frac{1}{2k^2}\ln(g + k^2 v_0^2). \tag{8}$$

Подставив это значение в уравнение (7), получим

$$x = \frac{1}{2k^2}\ln\frac{g + k^2 v_0^2}{g + k^2\dot{x}^2}. \tag{9}$$

Уравнение (9) дает зависимость между положением точки и ее скоростью. Это уравнение позволяет сразу определить высоту подъема h, где скорость точки станет в два раза меньше первоначальной. Для этого под-

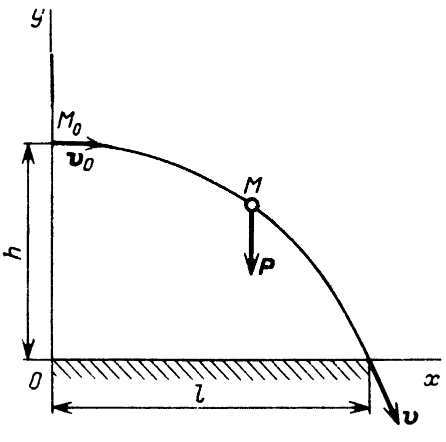
ставляем в (9) $x = h$, $\dot{x} = v_0/2$. Тогда

$$h = \frac{1}{2k^2} \ln\left(4 \frac{g + k^2 v_0^2}{4g + k^2 v_0^2}\right).$$

Задача 8.15. Из точки M_0, расположенной на высоте h над поверхностью Земли, вылетает точка массой m с начальной горизонтальной скоростью $\mathbf{v}_0$ (рис.).

Определить уравнение траектории точки, дальность полета и скорость в момент падения на Землю. Силой сопротивления воздуха и кривизной поверхности Земли пренебречь.

Решение. Выбираем систему координат с началом 0, где вертикальная ось y, проходящая через точку M_0, пересекает поверхность Земли. Ось x направляем по поверхности Земли вправо. Изобразим точку в промежуточном положении M во время движения. К точке приложена лишь одна сила – ее сила тяжести $\boldsymbol{P}$, направленная по вертикали вниз.



К задаче 8.15

Так как начальная скорость $\mathbf{v}_0$ и сила $\boldsymbol{P}$ лежат в вертикальной плоскости xy, то движение точки будет происходить в этой плоскости.

Начальные условия движения точки:

при $t = 0$ $x = 0$, $y = h$, $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$.

(Довольно часто при решении подобных задач ошибочно прикладывают к материальной точке некую движущую силу, направленную по касательной к траектории в данной точке в сторону движения. На самом же деле движение точки по траектории, отличной от вертикальной прямой, происходит в результате сообщения точке в начальный момент горизонтальной скорости $\mathbf{v}_0$. Начальня скорость $\mathbf{v}_0$ является результатом толчка, имевшего место в течение весьма малого промежутка времени. За начало отсчета времени принимаем момент конца толчка, когда точка приобретает скорость $\mathbf{v}_0$. Это указание следует учитывать при решении задач о полете пули, снаряда и т.п. Таким образом, сила давления пороховых газов на пулю или снаряд проявляется в сообщении им начальной скорости.)

Составим дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси x и y:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -P = -mg, \tag{1}$$

откуда

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g. \tag{2}$$

Интегрируя первое из этих уравнений, находим

$$\dot{x} = C_1. \tag{3}$$

Подставляя в это уравнение начальные данные $\dot{x} = v_0$ при $t = 0$, получаем

$$v_0 = C_1, \tag{4}$$

и, следовательно,

$$\dot{x} = v_0. \tag{5}$$

Заменив $\dot{x}$ на dx/dt и проинтегрировав уравнение (5), получим

$$x = v_0 t + C_2. \tag{6}$$

Так как в момент $t = 0$ координата x равна нулю, то из уравнения (6) следует, что $C_2 = 0$. Следовательно, окончательно уравнение (6) будет иметь вид

$$x = v_0 t. \tag{7}$$

Для интегрирования второго уравнения (2) ($\ddot{y} = -g$) заменим $\ddot{y}$ на $\frac{d\dot{y}}{dt}$. Разделяя затем переменные, находим

$$d\dot{y} = -g dt. \tag{8}$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\dot{y} = -gt + C_3. \tag{9}$$

Так как при $t = 0$ $\dot{y} = 0$, то из уравнения (9) следует, что $C_3 = 0$, и уравнение (9) принимает вид

$$\dot{y} = -gt. \tag{10}$$

Заменяя $\dot{y}$ на $\frac{dy}{dt}$, разделяя переменные и интегрируя, находим

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_4. \tag{11}$$

Так как при $t = 0$ $y = h$, то $C_4 = h$, и уравнение (11) принимает вид

$$y = h - \frac{gt^2}{2}. \tag{12}$$

Таким образом, уравнение (7) и (12) определяют закон движения точки:

$$x = v_0 t, \quad y = h - \frac{gt^2}{2}. \tag{13}$$

Для нахождения уравнения траектории точки исключаем из этой системы уравнений время.

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2. \tag{14}$$

Это – уравнение параболы.

Дальность полета точки определяется ее абсциссой в момент падения на Землю. Подставив в уравнение (14) $y = 0$, можем найти дальность полета L из уравнения

$$0 = h - \frac{g}{2v_0^2}L^2,$$

т.е. $L = v_0\sqrt{2h/g}$. Для нахождения скорости точки в момент падения точки на Землю положим в уравнении (12) $y = 0$. Тогда время падения равно

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Это значение времени вносим в уравнения для проекций скорости на оси x и y (см. (5) и (10)):

$$\dot x_T = v_0, \quad \dot y_T = -\sqrt{2gh}.$$

Тогда модуль скорости точки в момент падения равен

$$v_T = \sqrt{\dot x_T^2 + \dot y_T^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Направляющие косинусы скорости определяются равенствами

$$\cos(x\widehat{,}\mathbf{v}_T) = \frac{\dot x_T}{v_T} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}, \quad \cos(y\widehat{,}\mathbf{v}_T) = \frac{\dot y_T}{v_T} = -\sqrt{\frac{2gh}{v_0^2 + 2gh}}.$$

Задача 8.16 Решить предыдущую задачу с учетом силы сопротивления движению, пропорциональной скорости точки: $\boldsymbol{R} = -km\mathbf{v}$, где m – масса точки, $\mathbf{v}$ – скорость точки, k – постоянный коэффициент (рис.). Сила сопротивления воздуха пропорциональна первой степени скорости при малых скоростях ($v < 0{,}2$ м/с). Определить уравнение траектории точки.

Решение. Начальные условия движения точки:

при $t = 0 \quad x = 0, \ y = h, \ \dot x = v_0, \ \dot y = 0.$

К точке M приложены две силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ – сила тяжести и $\boldsymbol{R}$ – сила сопротивления движению, направленная по касательной к траектории в данной точке в сторону, противоположную движению.

Составим дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}. \tag{1}$$

Так как $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{R} = -mk\mathbf{v} = -mk\dot{\boldsymbol{r}}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, проведенный из начала координат O, то уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g} - k\dot{\boldsymbol{r}}. \tag{2}$$

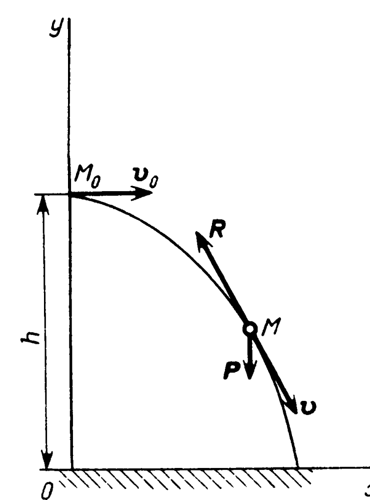
Проецируя уравнение (2) на оси x и y, получаем

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \qquad \ddot{y} = -g - k\dot{y}. \tag{3}$$

Так как $\ddot{x} = d\dot{x}/dt$, то, разделяя переменные, имеем $d\dot{x}/\dot{x} = -k\,dt$, откуда

$$\ln\dot{x} = -kt + C_1. \tag{4}$$

Постоянная интегрирования C_1 находится подстановкой в уравнение (4) начальных условий движения: при $t = 0$ $\dot{x} = v_0$, что дает $C_1 = \ln v_0$. Следовательно, $\ln\dot{x} = -kt + \ln v_0$, или $\ln\dfrac{\dot{x}}{v_0} = -kt$. Окончательно получаем



К задаче 8.16

$$\dot{x} = v_0 e^{-kt}.$$

Разделяя переменные, находим

$$dx = v_0 e^{-kt} dt.$$

Интегрируя, имеем

$$x = -\frac{v_0}{k}\, e^{-kt} + C_2. \tag{5}$$

Подставляя в это уравнение начальные данные: при $t = 0$ $x = 0$, определяем $C_2 = v_0/k$. Тогда уравнение (5) принимает вид

$$x = \frac{v_0}{k}\,(1 - e^{-kt}).$$

Переходим к интегрированию второго дифференциального уравнения (3). Заменяя $\ddot{y}$ на $d\dot{y}/dt$ и разделяя переменные, находим

$$-\frac{d\dot{y}}{k\dot{y} + g} = dt.$$

Интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{k}\ln(k\dot{y} + g) = t + C_3. \tag{6}$$

Подставляя в это уравнение начальные условия: при $t = 0$ $\dot{y} = 0$, определяем $C_3 = -\dfrac{1}{k}\ln g$. Внося это значение произвольной постоянной в уравне-

ние (6), имеем

$$\frac{1}{k}\ln\frac{g+k\dot{y}}{g}=-1,\quad \text{или}\quad \dot{y}=\frac{g}{k}e^{-kt}-\frac{g}{k}. \tag{7}$$

Заменяем в уравнении (7) $\dot{y}$ на dy/dt и, интегрируя, находим

$$\dot{y}=-\frac{g}{k}t-\frac{g}{k^2}e^{-kt}+C_4.$$

Так как при $t=0$ $y=h$, то $C_4=h+g/k^2$, и следовательно,

$$y=h-\frac{g}{k}t+\frac{g}{k^2}(1-e^{-kt}).$$

Итак, точка движется согласно уравнениям:

$$x=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt}),$$

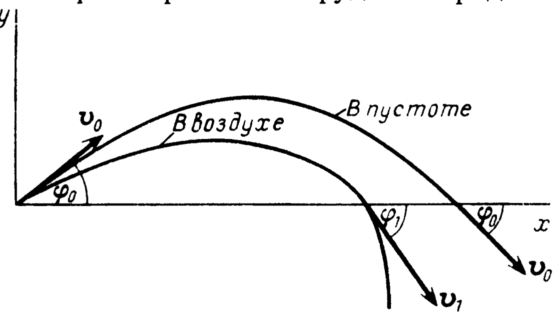
$$y=h-\frac{g}{h}t+\frac{g}{k^2}(1-e^{-kt}).$$

Исключив из этой системы время, найдем уравнение траектории

$$y=h-\frac{g}{k^2}\ln\frac{v_0}{v_0-kx}+\frac{gx}{kv_0}.$$

Согласно этому уравнению движется точка при малых скоростях.

Задача 8.17. Сопротивление воздуха при скоростях движения от $v=0{,}2$ м/с до $v=240$ м/с можно считать пропорциональным квадрату значения скорости. Из артиллерийского орудия снарядом массой m ведут



К задаче 8.17

стрельбу по хорошо видимым, допускающим прямое прицеливание объектам. При этом пользуются настильной траекторией. Настильная траектория – пологая кривая, которая образует малые (не более 15°) углы с горизонтом. Начальная скорость снаряда v_0 составляет угол φ_0 с горизонтом (рис.).

Определить уравнение настильной траектории.

Р е ш е н и е. Рассматривая артиллерийский снаряд как материальную точку, составим дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ – ускорение точки, $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ – сила тяжести, $R = mkv^2$ – сопротивление воздуха, направленное по касательной в сторону, противоположную движению.

Проектируя уравнение (1) на естественные оси координат, касательную и главную нормаль, находим

$$m\frac{dv}{dt} = -mkv^2 - mg\sin\varphi, \tag{2}$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\varphi. \tag{3}$$

Здесь φ – угол, образованный касательной с горизонтальной осью x, ρ – радиус кривизны траектории. При этом бесконечно малый угол $d\varphi$ равен углу между касательными в двух близких точках кривой (угол смежности). Тогда

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{d\sigma} = -\frac{1}{v}\frac{d\varphi}{dt}, \tag{4}$$

где $v = \dfrac{d\sigma}{dt}$ – скорость точки, σ – дуговая координата настильной траектории. Знак минус взят потому, что угол φ уменьшается при увеличении дуговой координаты σ.

Уравнения (2) и (3) тогда примут вид

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2 - g\sin\varphi, \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g\cos\varphi}{v}. \tag{6}$$

Исключая из этих уравнений dt, получаем

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{kv^3}{g\cos\varphi} + v\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d(v\cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{kv^3}{g}.$$

Деля обе части этого уравнения на $\cos^3\varphi$ и разделяя переменные, находим

$$\frac{d(v\cos\varphi)}{(v\cos\varphi)^3} = \frac{k}{g}\,\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}. \tag{7}$$

Уравнение (7) является точным для любых траекторий при квадратичном законе силы сопротивления воздуха.

При настильной траектории, когда $\cos\varphi$ изменяется в небольших размерах (при угле φ не более 15°, $\cos\varphi$ изменяется в пределах от 0,966 до 1), уравнение (7) можно представить в виде

$$\frac{d(v\cos\varphi)}{(v\cos\varphi)^3} = \frac{k}{g\cos\varphi_0}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \tag{8}$$

или

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{g\cos\varphi_0}{k}\,\frac{d(v\cos\varphi)}{(v\cos\varphi)^3}. \tag{9}$$

Далее находим

$$dx = v_x\,dt = v\cos\varphi\,dt.$$

Подставляя в это уравнение значение dt из (6)

$$dt = -\frac{v}{g\cos\varphi}\,d\varphi,$$

получаем

$$dx = -\frac{v^2}{g}\,d\varphi.$$

Вносим в это уравнение значение $d\varphi$ из (9). Тогда

$$dx = -\frac{v^2}{g}\,\frac{g\cos\varphi_0}{k}\,\frac{d(v\cos\varphi)}{v^3\cos\varphi} = -\frac{\cos\varphi_0}{k}\,\frac{d(v\cos\varphi)}{v\cos\varphi}. \tag{10}$$

Интегрируя (10), находим

$$x = \frac{\cos\varphi_0}{k}\ln\left(\frac{v_0\cos\varphi_0}{v\cos\varphi}\right),$$

откуда

$$v\cos\varphi = v_0 \cos\varphi_0 \cdot e^{-\lambda}, \tag{11}$$

где для краткости обозначено $\dfrac{kx}{\cos\varphi_0} = \lambda$.

Внесем найденное значение $v\cos\varphi$ (см. (11)) в уравнение (8):

$$\frac{1}{v_0^2\cos^2\varphi_0}\,\frac{d(e^{-\lambda})}{e^{-3\lambda}} = \frac{k}{g\cos\varphi_0}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_0 - \frac{g}{2kv_0^2\cos\varphi_0}\,(e^{2\lambda} - 1). \tag{12}$$

Но $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{dy}{dx}$. Внося это значение тангенса в (12), разделяя переменные, находим

$$dy = \left[\operatorname{tg}\varphi_0 - \frac{g}{2kv_0^2\cos\varphi_0}\,(e^{2\lambda} - 1)\right]dx.$$

Интегрируя, имеем

$$y = x\operatorname{tg}\varphi_0 - \frac{g}{4k^2v_0^2}\,(e^{2\lambda} - 2\lambda - 1).$$

Это и есть уравнение траектории снаряда при настильной стрельбе.

Разлагая $e^{2\lambda}$ в ряд по степеням λ, получаем

$$y = x\operatorname{tg}\varphi_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\varphi_0} - \frac{gkx^3}{3v_0^2\cos^2\varphi_0} - \ldots \tag{13}$$

Уравнение траектории снаряда без учета сопротивления воздуха имеет вид

$$y = x\operatorname{tg}\varphi_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\varphi_0}.$$

Сопоставляя это уравнение с (13), видим, что третий член в (13) является поправкой, определяющей влияние сопротивления воздуха на траекторию снаряда. Траектория с учетом сопротивления воздуха располагается ниже траектории снаряда в безвоздушном пространстве (рис.).

Эта задача о полете снаряда в воздухе с учетом сопротивления, пропорционального квадрату скорости снаряда, была впервые рассмотрена Ньютоном и затем Эйлером.

Способ интегрирования уравнений движения снаряда при полете по настильной траектории принадлежит Дидиону.

Задача 8.18. Тяжелая материальная точка, имеющая начальную горизонтальную скорость v_0, свободно падает в однородном поле силы тяжести с высоты h. Кроме силы тяжести на нее действует горизонтальная сила отталкивания, пропорциональная удалению от вертикальной оси, проходящей через начальное положение точки и направленная от этой оси.

Найти траекторию точки, время пересечения точкой нулевого уровня, координаты точки пересечения.

Р е ш е н и е. На точку действуют только две силы – вертикальная и горизонтальная. В виду того что направление горизонтального движения определяется направлением начальной горизонтальной скорости и направление горизонтальной силы остается постоянным, движение данной точки будет происходить в одной плоскости.

Направим ось Oy вверх через начальное положение точки, а ось Ox в направлении начальной скорости на нулевом уровне. Пусть m – масса точки, а mc^2 – коэффициент пропорциональности между силой и расстоянием у горизонтальной силы (этот коэффициент положителен, поскольку ось Ox направлена в сторону движения точки, т.е. в направлении действия силы).

Тогда дифференциальные уравнения движения точки примут вид

$$m\ddot{x} = mc^2x, \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = -mg, \tag{2}$$

или

$$\ddot{x} = c^2x, \tag{3}$$

$$\ddot{y} = -g. \tag{4}$$

Начальные условия: при $t = 0$ $x_0 = 0, y_0 = h, \dot{x}_0 = v_0, \dot{y}_0 = 0$.

Дифференциальное уравнение (3) представляет собой линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение

$$k^2 - c^2 = 0, \quad k = \pm c$$

показывает, что общее решение уравнения (3) можно искать в виде

$$x = Ae^{ct} + Be^{-ct}. \tag{5}$$

Подставляя в (5) начальные условия, получаем

$$x_0 = A + B = 0, \quad \dot{x}_0 = Ac - Bc = v_0.$$

Отсюда

$$A = -B = \frac{v_0}{2c}.$$

Подставляя в (5), находим

$$x = \frac{v_0}{2c} e^{ct} - \frac{v_0}{2c} e^{-ct} = \frac{v_0}{c} \operatorname{sh} ct. \tag{6}$$

Уравнение (4) – обычное дифференциальное уравнение свободного падения. Интегрируя его два раза, получаем

$$y = A_1 + B_1 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{7}$$

Из начальных условий находим произвольные постоянные:

$$y\,|_{t=0} = A_1 = h, \quad \dot{y}\,|_{t=0} = B_1 = 0,$$

подставляя которые в (7), имеем

$$y = h - \frac{gt^2}{2}. \tag{8}$$

Уравнения движения (6) и (8) представляют параметрические уравнения траектории. Для получения уравнения траектории в явном виде находим t из (8):

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}(h - y)}.$$

Подставляя в (6), имеем

$$x = \frac{v_0}{c} \operatorname{sh}\left(c\sqrt{\frac{2}{g}(h - y)}\right). \tag{9}$$

Если требуется получить в явном виде выражение y через x, то определяем t из (6):

$$t = \frac{1}{c} \operatorname{arsh} \frac{cx}{v_0}$$

и, подставляя в (8), получаем

$$y = h - \frac{g}{2c^2}\left(\operatorname{arsh}\frac{cx}{v_0}\right)^2 = h - \frac{g}{2c^2}\left[\ln\left(\frac{cx}{v_0} + \sqrt{\frac{c^2x^2}{v_0^2} + 1}\right)\right]^2.$$

Время достижения нулевого уровня получим из (8), положив $y = 0$:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{10}$$

Координату x точки пересечения с осью Ox получаем, полагая в (9) $y = 0$:

$$x_1 = \frac{v_0}{c}\,\mathrm{sh}\left(c\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

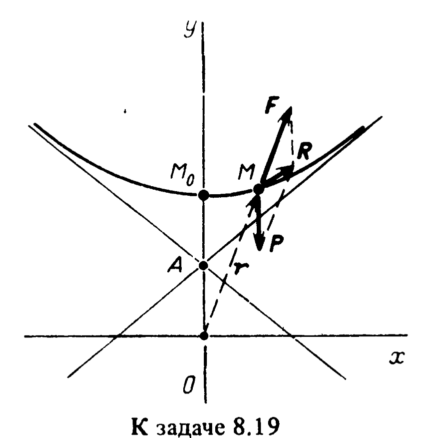
Разумеется, то же самое получится, если представить (10) в (6).

Задача 8.19. Материальная точка движется в вертикальной плоскости под действием центральной силы отталкивания, пропорциональной расстоянию до неподвижного центра: $\boldsymbol{F} = k^2 m\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M, m — ее масса, k — постоянный коэффициент.

Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент она занимала положение M_0 ($OM_0 = b$) и имела скорость $\mathbf{v}_0$, направленную по горизонтали направо (рис.).

Р е ш е н и е. Начало декартовых осей координат возьмем в неподвижном центре O, от которого отталкивается точка M. Ось x направим по горизонтали направо, ось y — через начальное положение точки по вертикали вверх. Запишем начальные условия движения точки в виде:

при $t = 0$ $x = 0$, $y = b$, $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$.



К задаче 8.19

К материальной точке M приложены следующие силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — ее сила тяжести, $\boldsymbol{F}$ — сила отталкивания, направленная вдоль OM от центра O.

Составим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}, \quad \text{или} \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g} + k^2\boldsymbol{r}.$$

Проектируя его на оси x и y, получаем

$$\ddot{x} - k^2 x = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} - k^2 y = -g. \tag{2}$$

Уравнение (1) является однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его интегрирования составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm k$. Следовательно, решение дифференциального уравнения (1) запишется в виде

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}. \tag{3}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt} \tag{4}$$

и затем подставим в уравнение (3) значения $t = 0$, $x = 0$, а в уравнение (4) значения $t = 0$, $\dot{x} = v_0$. Тогда получим систему уравнений

$$0 = C_1 + C_2, \quad v_0 = C_1 k - C_2 k.$$

Отсюда $C_1 = v_0/(2k)$ и $C_2 = -v_0/(2k)$. Окончательно получим

$$x = \frac{v_0}{2k}(e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k}\operatorname{sh} kt. \tag{5}$$

Так как дифференциальное уравнение (2) является неоднородным, то его общее решение y имеет вид

$$y = y_1 + y_2, \tag{6}$$

где y_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{y} - k^2 y = 0, \tag{7}$$

а y_2 – частное решение уравнения (2).

Дифференциальные уравнения (1) и (7) аналогичны, поэтому

$$y_1 = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt}. \tag{8}$$

Правая часть дифференциального уравнения (2) постоянна. Поэтому частное решение y_2 ищем в виде постоянного: $y_2 = A$. Полагая в уравнении (2) $y_2 = A$, находим

$$y_2 = g/k^2. \tag{9}$$

Воспользовавшись формулами (8) и (9), запишем общее решение по формуле (6):

$$y = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt} + \frac{g}{k^2}. \tag{10}$$

Для определения постоянных интегрирования C_3 и C_4 вычислим

$$\dot{y} = C_3 k e^{kt} - C_4 k e^{-kt}. \tag{11}$$

Затем подставим в уравнение (10) значения $t = 0$, $y = b$, а в уравнение (11) значения $t = 0$, $\dot{y} = 0$. Тогда получим систему уравнений

$$b = C_3 + C_4 + \frac{g}{k^2}, \quad 0 = C_3 k - C_4 k,$$

откуда

$$C_3 = C_4 = \frac{1}{2}\left(b - \frac{g}{k^2}\right).$$

Окончательно будем иметь

$$y = \frac{1}{2}\left(b - \frac{g}{k^2}\right)(e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{g}{k^2},$$

т.е.

$$y = \left(b - \frac{g}{k^2}\right)\operatorname{ch} kt + \frac{g}{k^2}\ . \qquad (12)$$

Итак, уравнения движения материальной точки имеют вид (5) и (12).

Для определения уравнений траектории точки следует из уравнений движений исключить время. Из (5) и (12) находим

$$\operatorname{sh} kt = \frac{kx}{v_0}, \quad \operatorname{ch} kt = \frac{y - g/k^2}{b - g/k^2}.$$

Учитывая, что $\operatorname{ch}^2 kt - \operatorname{sh}^2 kt = 1$, получаем искомое уравнение траектории точки M

$$\frac{(y - g/k^2)^2}{(b - g/k^2)^2} - \frac{x^2}{(v_0/k)^2} = 1.$$

Это — уравнение гиперболы с центром в точке $A(0, g/k^2)$. Действительная полуось равна $b - g/k^2$, а мнимая равна v_0/k.

Направление касательной к гиперболе определяется углом φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(b - g/k^2)k \operatorname{sh} kt}{(v_0/k)k \operatorname{ch} kt} = \frac{b - g/k^2}{v_0}\ k \operatorname{th} kt, \qquad (13)$$

а направление радиуса-вектора — углом φ_1:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y}{x} = \frac{(b - g/k^2)\operatorname{ch} kt + g/k^2}{(v_0/k)\operatorname{sh} kt} =$$

$$= \frac{(b - g/k^2)k}{v_0} \operatorname{cth} kt + \frac{g}{kv_0}\ \frac{1}{\operatorname{sh} kt}\ . \qquad (14)$$

Но $\operatorname{th} kt$ при $t > 0$ находится всегда в интервале $(0, 1)$, а $\operatorname{cth} kt$ при $t > 0$ лежит в интервале $(1, \infty)$.

Таким образом, уже первый член в формуле (14) больше, чем $\operatorname{tg}\varphi$, определяемый формулой (13). К тому же второе слагаемое в формуле (14) всегда положительное при $t > 0$. Следовательно, радиус-вектор не может касаться гиперболы: он ее пересекает, так как образует больший угол с

осью x, чем касательная. При $t \to \infty$

$$\operatorname{tg}\varphi \to \frac{(b - g/k^2)k}{v_0}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 \to \frac{(b - g/k^2)k}{v_0},$$

т.е. углы $\varphi = \varphi_1$ — это угловые коэффициенты асимптоты.

Следовательно, равнодействующая R силы тяжести и силы отталкивания направлена внутрь кривой. По мере увеличения t гипербола стремится к асимптоте и равнодействующая R все ближе и ближе подходит к касательной (но всегда с внутренней стороны). Это все справедливо при $b > g/k^2$.

Если $b = g/k^2$, то траектория — прямая линия, параллельная оси x.

Если $b < g/k^2$, то траекторией является другая ветвь той же гиперболы.

Задача 8.20. Материальная точка массой m, получив начальную скорость v_0, движется в среде, сопротивление которой пропорционально квадратному корню из скорости, при отсутствии других сил.

По истечении какого времени T точка остановится, если R — сила сопротивления при скорости, равной единице? Какой путь S пройдет точка до остановки?

Решение. Составим дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\ddot{x} = -R\sqrt{\dot{x}}, \tag{1}$$

где $R\sqrt{\dot{x}}$ — сила сопротивления среды.

Для определения времени T перепишем уравнение (1) в виде

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = -R\sqrt{\dot{x}}. \tag{2}$$

Разделим переменные:

$$m\frac{d\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}}} = -R\,dt. \tag{3}$$

Интегрируя, находим

$$m\int\frac{d\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}}} = -Rt + C_1, \tag{4}$$

или

$$m \cdot 2\sqrt{\dot{x}} = -Rt + C_1. \tag{5}$$

Произвольная постоянная интегрирования C_1 находится подстановкой в уравнение (5) начальных условий: при $t = 0$ $\dot{x} = v_0$. Тогда $C_1 = m \cdot 2\sqrt{v_0}$. Внося это значение произвольной постоянной в уравнение (5), находим

закон изменения скорости от времени:

$$2m(\sqrt{v_0} - \sqrt{\dot{x}}) = Rt. \quad (6)$$

Отсюда находится время T, по истечении которого точка остановится. Для этого надо положить $\dot{x} = 0$, тогда из (6) находим

$$T = \frac{2m}{R}\sqrt{v_0}.$$

Переходим ко второй части задачи – определению пути, пройденному точкой до остановки. Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = -R\sqrt{\dot{x}}.$$

Умножив обе части этого уравнения на dx и разделив на $\sqrt{\dot{x}}$, получим

$$m\,\frac{dx}{dt}\,\frac{d\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}}} = -Rdx,$$

или, замечая, что $dx/dt = \dot{x}$,

$$m\sqrt{\dot{x}}\,d\dot{x} = -Rdx.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, находим

$$m\,\frac{2}{3}\,\sqrt{\dot{x}^3} = -Rx + C_2. \quad (7)$$

Подставляя в это уравнение начальные условия движения: при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, находим произвольную постоянную интегрирования $C_2 = \frac{2}{3}m\sqrt{v_0^3}$.

Внося это значение C_2 в уравнение (7), имеем

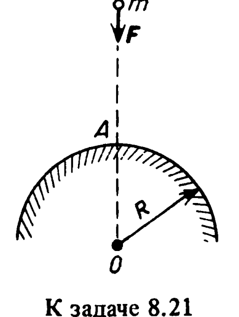
$$\frac{2}{3}\,m(\sqrt{v_0^3} - \sqrt{\dot{x}^3}) = Rx. \quad (8)$$

Эта зависимость пройденного пути от скорости позволяет найти искомое расстояние, пройденное точкой до остановки. Для этого положим в уравнении (8): $\dot{x} = 0, x = S$:

$$S = \frac{2}{3}\,\frac{m}{R}\,\sqrt{v_0^3}.$$

Задача 8.21. Тело массой m падает на Землю (масса которой M) под действием силы притяжения, обратно пропорциональной квадрату расстоя-

ния (рис.). Начальное расстояние тела от поверхности Земли равно h, радиус Земли R, начальная скорость тела $v_0 = 0$. Определить скорость падения тела на Землю, если оно падает с очень большой высоты ($h = \infty$). Сравнить это значение скорости с тем ее значением, которое можно было бы найти, считая ускорение постоянным (согласно Галилею ускорение свободного падения постоянно и равно $g = 9{,}81$ м/с^2). Тело принять за материальную точку.



К задаче 8.21

Решение. Сила, действующая на точку согласно закону всемирного притяжения, открытого Ньютоном, равна

$$F = -k\frac{mM}{x^2}, \tag{1}$$

где x – расстояние от центра Земли до точки. На поверхности Земли ($x = R$) сила притяжения равна силе тяжести mg:

$$F = -mg = -k\frac{mM}{R^2}, \tag{2}$$

откуда, вводя для краткости обозначение $\mu = kM = gR^2$, получим

$$F = -\mu\frac{m}{x^2}. \tag{3}$$

Согласно основному закону динамики,

$$ma = -\mu\frac{m}{x^2}, \tag{4}$$

откуда, умножая обе части уравнения (4) на dx, находим

$$\frac{dv}{dt}dx = -\frac{\mu}{x^2}dx, \quad v\,dv = -\mu\frac{dx}{x^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{v^2}{2} + C = \frac{\mu}{x}. \tag{5}$$

Произвольную постоянную интегрирования найдем, внося в (5) начальные условия: $x = h + R$, $v_0 = 0$. Тогда $C = \dfrac{\mu}{h + R}$, и уравнение (5) примет

следующий вид:

$$v^2 = 2\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h+R}\right). \qquad (6)$$

Из уравнения (6) находим

$$v = -\sqrt{2\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h+R}\right)}. \qquad (7)$$

Знак минус в правой части уравнения (7) взят потому, что скорость точки направлена в отрицательную сторону оси x. Эта формула определяет скорость точки при любом расстоянии от центра Земли.

Найдем, пользуясь формулой (7), скорость точки, падающей с бесконечно большой высоты ($h = \infty$) на поверхность Земли ($x = R$):

$$v = -\sqrt{\frac{2\mu}{R}}.$$

Внося в эту формулу значение $\mu = gR^2$, получим

$$v = -\sqrt{2gR} \approx -11\,000 \text{ м/с}^2.$$

Если же вычислить скорость точки, падающей из бесконечности на Землю, считая, согласно Галилею, ускорение свободного падения постоянным, то

$$v = -\sqrt{2gh} = -\infty.$$

Из этого сопоставления вытекает, что считать ускорение свободного падения постоянным можно только при движении вблизи Земли, когда h мало по сравнению с R.

2. Несвободное движение материальной точки. *Дана кривая, по которой движется точка.* Силы, действующие на точку, в этом случае делятся на активные силы и реакцию кривой. Точка оказывает давление на кривую, и кривая действует на точку равной и противоположно направленной реакцией. Если кривая абсолютно гладкая, то реакция будет направлена по нормали к кривой. Если между кривой и точкой возникает трение, то реакция кривой разбивается на две составляющие – нормальную реакцию N и силу трения, равную fN и направленную по касательной к кривой в сторону, противоположную направлению скорости точки. Коэффициент f является коэффициентом трения скольжения в начале движения. При решении задач на движение точки по кривой целесообразно применять естественные уравнения движения точки:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n, \quad 0 = F_b + N_b. \qquad (1^*)$$

Первое из них – уравнение движения точки в проекции на касательную

к кривой, второе – в проекции на главную нормаль, третье – в проекции на бинормаль. Напомним, что ускорение точки лежит в соприкасающейся плоскости, проходящей через касательную и главную нормаль. Поэтому сумма проекций всех сил на бинормаль (третье уравнение) равна нулю.

Если кривая негладкая, то в первом уравнении добавляется сила трения:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau - fN. \qquad (2^*)$$

Остальные два уравнения системы (1*) остаются без изменения. В этих уравнениях F_τ, F_n, F_b – проекции активных сил, приложенных к точке соответственно на касательную, главную нормаль и бинормаль; N_n, N_b – проекции нормальной реакции на главную нормаль и бинормаль, f – коэффициент трения скольжения. Если кривая, по которой движется точка, является неудерживающей связью, то точка сойдет с кривой в тот момент, когда реакция кривой обратится в нуль. Уравнение кривой задается двумя уравнениями поверхностей:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0,$$

пересечение которых и определяет кривую.

Дана поверхность, по которой движется точка. Силы, действующие на точку, делятся на активные силы и реакцию поверхности. Пусть на траектории, расположенной на поверхности, начало траектории находится в точке A. Возьмем на траектории произвольное положение движущейся точки и обозначим его M (рис. 8.2). Проведем в точке M касательную τ в направлении движения точки. Буквой C обозначим центр кривизны нормального сечения поверхности, касающегося τ, а $MC=R$ – радиус кривизны этого сечения в точке M (R – радиус кривизны поверхности). Пусть главная нормаль траектории движущейся точки M направлена по MC_1, а радиус кривизны траектории равен $\rho = MC_1$. Между радиусом кривизны R поверхности в точке M и радиусом кривизны ρ траектории в той же точке M существует зависимость

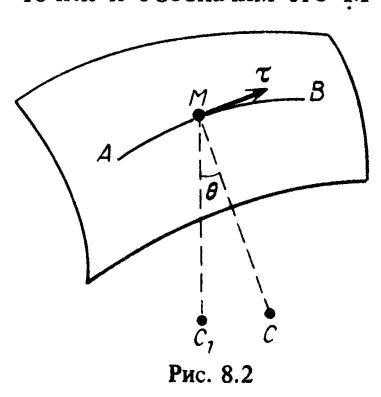


Рис. 8.2

$$\rho = R\cos\theta, \qquad (3^*)$$

где угол θ образован соприкасающейся плоскостью τMC_1 траектории и нормалью к поверхности MC. Эта теорема была доказана французским математиком Ж. Менье (1754–1793) в работе "Мемуар о кривизне поверхностей" (1785) и носит его имя (теорема Менье).

Проектируя направление главной нормали к траектории точки MC_1 на касательную плоскость поверхности, найдем полупрямую Mb. Составим

уравнения основного закона динамики в проекции на оси τ, MC, b:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho}\sin\theta = F_b, \quad m\frac{v^2}{\rho}\cos\theta = F_n + N. \qquad (4^*)$$

Здесь F_τ, F_n, F_b – проекции силы F на оси τ, MC, b, а N – нормальная реакция поверхности. Отношение $\rho/\sin\theta$ называется *радиусом геодезической кривизны* и обозначается ρ_1. Тогда с учетом (3*) система уравнений (4*) может быть записана в виде

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad \frac{mv^2}{\rho_1} = F_b, \quad \frac{mv^2}{R} = F_n + N. \qquad (5^*)$$

Как видно из этих уравнений, проекция ускорения на нормаль к поверхности не является нормальным ускорением точки. Последнее направлено по главной нормали к траектории, т.е. по той нормали, которая лежит в соприкасающейся плоскости. Но эта плоскость не совпадает, как правило, с плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности и через касательную к траектории.

В случае отсутствия активных сил, при движении точки по поверхности ее ускорение лежит в плоскости, нормальной к поверхности и содержащей касательную к траектории. С другой стороны, ускорение точки всегда лежит в соприкасающейся плоскости траектории, т.е. в той плоскости, которая содержит касательную и главную нормаль. Следовательно, при движении точки по поверхности в отсутствие активных сил главная нормаль к траектории в каждой ее точке совпадает с нормалью к поверхности. Линия, лежащая на поверхности, у которой ее главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности, называется *геодезической линией*. Итак, точка, движущаяся по поверхности в отсутствие активных сил, движется по геодезической линии. Геодезическая линия является кратчайшим расстоянием между двумя точками, лежащими на поверхности. При движении точки по поверхности в отсутствие активных сил основной закон динамики в проекциях на естественные оси координат при наличии трения будет иметь вид

$$m\frac{dv}{dt} = -fN, \quad m\frac{v^2}{\rho} = N. \qquad (6^*)$$

При движении по абсолютно гладкой поверхности правая часть первого уравнения (6*) равна нулю, и, следовательно. движение будет равномерным. На шаре геодезические линии – дуги большого круга. Геодезические линии на круговом цилиндре или конусе – винтовые линии.

Любая поверхность задается уравнением

$$f(x, y, z) = 0. \qquad (7^*)$$

Несвободное движение точки можно изучать и в системе декартовых координат. *Дифференциальные уравнения движения точки по идеально гладкой поверхности* в этом случае будут иметь вид

$$m\ddot{x} = F_x + N\cos(\widehat{N, x}),\quad m\ddot{y} = F_y + N\cos(\widehat{N, y}),\quad m\ddot{z} = F_z + N\cos(\widehat{N, z}), \tag{8*}$$

где F_x, F_y, F_z – проекции равнодействующей активных сил на оси координат, N – нормальная реакция поверхности. К этим уравнениям присоединяется уравнение поверхности

$$f(x, y, z) = 0. \tag{9*}$$

Направляющие косинусы определяются равенствами

$$\cos(\widehat{N, x}) = \frac{\partial f/\partial x}{\Delta_1 f},\quad \cos(\widehat{N, y}) = \frac{\partial f/\partial y}{\Delta_1 f},$$
$$\cos(\widehat{N, z}) = \frac{\partial f/\partial z}{\Delta_1 f}, \tag{10*}$$

где $\Delta_1 f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$. Из трех дифференциальных уравнений (8*) и четвертого уравнения поверхности (9*) можно определить координаты точки x, y, z и реакцию N как функции времени.

Так как кривая линия определяется уравнениями двух поверхностей

$$f_1(x, y, z) = 0,\quad f_2(x, y, z) = 0, \tag{11*}$$

то *при движении точки по заданной кривой под действием активной силы F и реакций N_1 и N_2 двух поверхностей* дифференциальные уравнения движения точки будут иметь вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_1\cos(\widehat{N_1, x}) + N_2\cos(\widehat{N_2, x}),\\ m\ddot{y} &= F_y + N_1\cos(\widehat{N_1, y}) + N_2\cos(\widehat{N_2, y}),\\ m\ddot{z} &= F_z + N_1\cos(\widehat{N_1, z}) + N_2\cos(\widehat{N_2, z}). \end{aligned} \tag{12*}$$

Косинусы нормальных реакций поверхностей (11*) определяются формулами, аналогичными (10*).

Таким образом, присоединяя к трем дифференциальным уравнениям движения точки (12*) два уравнения линии (11*), получаем систему пяти уравнений, из которых находятся координаты точки x, y, z и реакции поверхностей N_1 и N_2.

При движении материальной точки по заданной плоской кривой

$$y = f(x) \tag{13*}$$

под действием силы F, лежащей в плоскости кривой, реакция связи N направлена по нормали к траектории.

Дифференциальные уравнения движения по кривой, лежащей в плоскости, будут иметь вид

$$m\ddot{x} = F_x + N\cos(\widehat{N, x}), \quad m\ddot{y} = F_y + N\cos(\widehat{N, y}), \tag{14*}$$

где

$$\cos(\widehat{N, x}) = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos(\widehat{N, y}) = \frac{dx}{ds}, \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Вместе с уравнением плоской кривой $y = f(x)$ имеем три уравнения, с помощью которых находятся неизвестные x, y, N.

Уравнения поверхности (9*), кривой линии (11*) и (13*) написаны для удерживающих связей, при действии которых для любого возможного перемещения точки механической системы противоположное ему перемещение также является возможным.

Если же связи являются неудерживающими, при которых точки механической системы имеют возможные перемещения, противоположные которым не являются возможными, то выше указанные уравнения поверхностей и кривых линий заменяются зависимостями типа

$$f(x, y, z) \leqslant 0. \tag{15*}$$

При движении по негладкой поверхности или негладкой кривой линии к действующим на точку силам добавляется сила трения скольжения, равная произведению коэффициента трения на нормальное давление fN и направленная по касательной к траектории в сторону противоположную скорости.

Указание. Задачи динамики несвободного движения материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать систему координат;

2) записать начальные условия движения точки;

3) изобразить на рисунке активные силы и реакции связей, приложенные к материальной точке;

4) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки;

5) проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения;

6) использовав начальные условия движения, определить постоянные интегрирования;

7) воспользовавшись уравнениями движения материальной точки, определить искомые величины.

Задача 8.22. Материальная точка массой m движется между поверхностями двух шаровых оболочек. Радиус-вектор ее равен r. Ее начальная скорость v_0. На точку действуют только сила трения скольжения и нор-

мальная реакция (рис.). Зная коэффициент трения скольжения f, определить путь, который пройдет точка до остановки.

Р е ш е н и е. Задача представляет собой пример удерживающей связи. Основное уравнение динамики точки имеет вид

$$ma = N + T, \tag{1}$$

где a – ускорение, N – нормальная составляющая реакции шара, T – сила трения, равная по модулю



$$T = fN \tag{2}$$

и направленная по касательной в сторону, противоположную скорости.

К задаче 8.22

В случае, когда активные силы отсутствуют, нормальная реакция поверхности всегда направлена к центру кривизны нормального сечения поверхности, содержащего касательную к траектории. Проектируя равенство (1) на главную нормаль, совпадающую с радиусом шара, и на касательную, находим

$$m\frac{v^2}{r} = N, \tag{3}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -T = -fN. \tag{4}$$

Подставляя в уравнение (4) значение N из (3), получаем

$$\frac{dv}{dt} = -f\frac{v^2}{r}. \tag{5}$$

Разделяя переменные, имеем $\dfrac{dv}{v^2} = -\dfrac{f}{r}\,dt$, или $d\left(\dfrac{1}{v}\right) = \dfrac{f}{r}\,dt$. Интегрируя, находим

$$\frac{1}{v} = \frac{f}{r}t + C. \tag{6}$$

Произвольная постоянная интегрирования определяется из начальных условий: при $t = 0$ $v = v_0$. Тогда $C = 1/v_0$. Внося это значение произвольной постоянной в (6), имеем

$$v = \frac{v_0}{1 + \dfrac{fv_0}{r}t}. \tag{7}$$

Эта формула показывает, что движение продолжается неограниченное время. Действительно, умножая обе части уравнения (7) на dt и учитывая, что $v\ dt = ds$, находим пройденный путь

$$s = v_0 \int_0^\infty \frac{dt}{1 + \frac{fv_0}{r} t} = \left| \frac{r}{f} \ln\left(1 + \frac{fv_0}{r} t\right) \right|_{t=0}^{t=\infty} = \infty.$$

Такой неожиданный результат объясняется тем, что с уменьшением скорости уменьшается, согласно (3), и нормальная реакция, а следовательно, и пропорциональное ей трение.

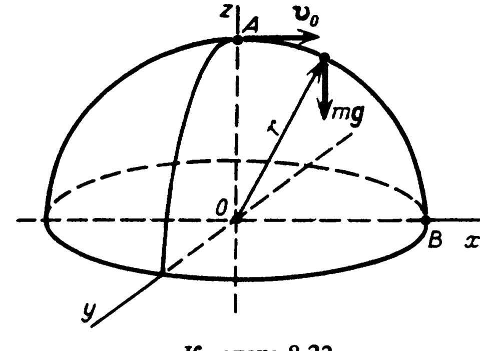
Так как в этой задаче движение точки по поверхности шара происходит в отсутствие активных сил, то траектория движения – геодезическая линия, для которой радиус кривизны траектории равен радиусу кривизны нормального сечения поверхности, касающегося касательной. Эта траектория – дуга большого круга.

Задача 8.23. Материальная точка движется по поверхности неподвижного шара под действием силы тяжести mg (рис.). В начальный момент времени $t = 0$ точка находилась на вершине шара A и имела скорость v_0. Радиус шара равен r.

Найти реакцию шара и место, где материальная точка сойдет с его поверхности.

Р е ш е н и е. Выберем начало координат в центре шара, ось x направим параллельно начальной скорости v_0. Ось z направим по вертикали, на которой находится материальная точка в начальный момент времени. Уравнение поверхности шара имеет вид

$$f = x^2 + y^2 + z^2 = 0. \tag{1}$$



К задаче 8.23

Проекции активной силы (силы тяжести шара) на оси координат равны

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg. \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered} E_x + \frac{N}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial x} = m\ddot{x}, \\ F_y + \frac{N}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial y} = m\ddot{y}, \quad F_z + \frac{N}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial z} = m\ddot{z}. \end{gathered} \tag{3}$$

Воспользовавшись уравнением (1), находим частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \tag{4}$$

откуда

$$\Delta = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = \pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \pm 2r.$$

Знак плюс в этой формуле соответствует положительному направлению внешней нормали. Внося найденные значения (4) в дифференциальные уравнения движения, находим

$$m\ddot{x} = N\frac{x}{r}, \quad m\ddot{y} = N\frac{y}{r}, \quad m\ddot{z} = N\frac{z}{r} - mg. \tag{5}$$

Умножая первое уравнение системы (5) на y, а второе уравнение на x, получаем

$$m\ddot{x}y = N\frac{xy}{r}, \quad m\ddot{y}x = N\frac{xy}{r}. \tag{6}$$

Вычитая из второго уравнения первое, находим

$$m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = 0,$$

или, сокращая на m,

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0.$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$x\dot{y} - y\dot{x} = C. \tag{7}$$

Это равенство – интеграл площадей для оси Oz. Его можно было бы записать непосредственно, так как из условия задачи вытекает равенство нулю суммы моментов сил, действующих на точку относительно оси z.

Произвольную постоянную C определяем, пользуясь начальными условиями: при $t = 0$ точка находилась в A и, следовательно, $x_0 = 0, y_0 = 0$. Внося эти значения в уравнение (7), находим $C = 0$. Итак,

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 0,$$

откуда, разделяя переменные, находим

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, имеем

$$\ln y = \ln x + \ln C_1,$$

или

$$y = C_1 x. \qquad (8)$$

Произвольную постоянную интегрирования C_1 из уравнения (8) определить нельзя, так как при $t = 0$ $y_0 = 0$ и $x_0 = 0$. Поэтому продифференцируем (8):

$$\dot{y} = C_1 \dot{x}. \qquad (9)$$

При $t = 0$ имеем $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$. Внося эти начальные условия в уравнение (9), находим $C_1 = 0$. Тогда из (8) получим

$$y = 0. \qquad (10)$$

Движение точки происходит в плоскости Oxz по меридиану AB.

Для определения нормальной реакции шара составим дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на нормаль к поверхности шара:

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\varphi - N.$$

Здесь $\cos\varphi = z/r$. Отсюда находим

$$N = mg\frac{z}{r} - \frac{mv^2}{r}. \qquad (11)$$

Остается найти v^2 и подставить в это уравнение. Но

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2.$$

Дифференцируем это уравнение по времени:

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{z}\ddot{z}$$

и подставляем в это уравнение значения $\ddot{x}$ и $\ddot{z}$ из уравнений (5):

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{2\dot{x}}{m} N\frac{x}{r} + 2\dot{z}\left(\frac{N}{m}\frac{z}{r} - g\right) = \frac{N}{mr}(2x\dot{x} + 2z\dot{z}) - 2g\dot{z}. \qquad (12)$$

Уравнение траектории точки, согласно (10), будет

$$x^2 + z^2 = r^2.$$

Дифференцируя это уравнение по времени, находим

$$2x\dot{x} + 2z\dot{z} = 0,$$

и уравнение (12) принимает вид

$$\frac{dv^2}{dt} + 2g\dot{z} = 0 \text{ или } \frac{d}{dt}(v^2 + 2gz) = 0.$$

Интегрируя, находим

$$v^2 + 2gz = C_2. \tag{13}$$

Произвольную постоянную C_2 находим из начальных условий:

$$\text{при } t = 0 \quad \dot{x} = v_0, \quad \dot{z} = 0,$$
$$x = 0, \quad z = r.$$

Подставляя эти значения в (13), имеем $v_0^2 + 2gr = C_2$. Подставим найденное значение C_2 в уравнение (13):

$$v^2 + 2gz = v_0^2 + 2gr,$$

откуда $v^2 = v_0^2 + 2g(r - z)$. Вносим это значение в формулу (11):

$$N = mg\frac{z}{r} - 2mg\left(1 - \frac{z}{r}\right) - \frac{mv_0^2}{r},$$

или

$$N = m\left(\frac{3gz}{r} - 2g - \frac{v_0^2}{r}\right). \tag{14}$$

Формула (14) определяет нормальную реакцию шаровой поверхности.

Материальная точка оторвется от поверхности шара в тот момент, когда нормальная реакция обратится в нуль:

$$\frac{3gz}{r} - 2g - \frac{v_0^2}{r} = 0.$$

Отсюда

$$z = \frac{2}{3}r + \frac{v_0^2}{3g}. \tag{15}$$

При ничтожно малой начальной скорости точка покинет поверхность шара при $z = \frac{2}{3}r$. Точка покинет шар в наивысшей точке A, если положить $z = r$ в (15). Тогда $v_0 = \sqrt{gr}$.

Задача 8.24. Материальная точка A массой m движется под действием силы тяжести по гладкой внутренней поверхности вертикального круглого цилиндра, радиус основания которого r. Определить уравнения движе-

ния точки и реакцию цилиндра, если скорость точки в начальный момент равна v_0 и образует угол α с вертикальной образующей цилиндра.

Решение. Проведем оси x, y, z с началом в точке O. Ось Ox проходит через начальное положение точки A, ось Oz направлена по вертикали вниз.

Уравнение поверхности цилиндра в этих осях имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{или} \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2 = 0. \tag{1}$$

На точку действует сила тяжести, проекции которой на оси координат равны

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = mg. \tag{2}$$

Проекции нормальной реакции поверхности цилиндра N на оси декартовых координат определяются следующими формулами аналитической геометрии:

$$\cos(\widehat{N, x}) = -\frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{\Delta}, \quad \cos(\widehat{N, y}) = -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{\Delta}, \quad \cos(\widehat{N, z}) = -\frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{\Delta}, \tag{3}$$

где $\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$.

Составим дифференциальные уравнения движения несвободной точки:

$$m\ddot{x} = -\frac{N}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{N}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = mg - \frac{N}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{4}$$

Пользуясь уравнением (1), находим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

откуда

$$\Delta = \pm 2\sqrt{x^2 + y^2} = \pm 2r.$$

Взятое со знаком плюс значение Δ соответствует внешней нормали. Внося эти значения в дифференциальные уравнения (4), находим

$$m\ddot{x} = N\frac{x}{r}, \quad m\ddot{y} = N\frac{y}{r}, \quad \ddot{z} = g. \tag{6}$$

Третье уравнение (6) интегрируется непосредственно:

$$\dot{z} = gt + C_1. \tag{7}$$

Начальные условия движения: при $t = 0$ $\dot{z}_0 = v_0 \cos\alpha$. Внося эти данные в уравнение (7), находим $C_1 = v_0 \cos\alpha$, и, следовательно,

$$\dot{z} = gt + v_0 \cos\alpha. \tag{8}$$

Разделяя переменные, находим

$$dz = gt\,dt + v_0 \cos\alpha\,dt. \tag{9}$$

Интегрируя, имеем

$$z = \frac{gt^2}{2} + v_0 t \cos\alpha + C_2. \tag{10}$$

Произвольная постоянная C_2 находится из начальных условий: при $t = 0$ $z_0 = 0$. Следовательно, согласно (10), $C_2 = 0$, и окончательно

$$z = \frac{gt^2}{2} + v_0 t \cos\alpha. \tag{11}$$

Переходим к интегрированию двух первых уравнений системы (6). Для этого умножаем первое уравнение системы (6) на y, а второе умножаем на x и вычитаем из второго первое Получим

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0. \tag{12}$$

Сокращая на массу, не равную нулю, имеем

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0. \tag{13}$$

Замечая, что

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}), \tag{14}$$

находим интеграл уравнения (13):

$$x\dot{y} - y\dot{x} = C_3. \tag{15}$$

Это уравнение является интегралом площадей, так как равнодействующая реакции поверхности и силы тяжести пересекает одну и ту же ось. Этот результат может быть представлен в полярных координатах:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = C_3. \tag{16}$$

Секторная скорость, равная производной по времени от площади, описываемой радиусом-вектором r, есть величина постоянная. Здесь угол φ

измеряется между радиусом r и осью x. В начальный момент при $t = 0$

$$\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = v_0 \cos(90^\circ - \alpha) = v_0 \sin\alpha. \qquad (17)$$

Следовательно, интеграл площадей равен

$$r v_0 \sin\alpha = C_3. \qquad (18)$$

Подставляя найденное значение произвольной постоянной в уравнение (16), находим

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = r v_0 \sin\alpha, \qquad (19)$$

или, сокращая на r,

$$r \frac{d\varphi}{dt} = v_0 \sin\alpha. \qquad (20)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\varphi = \frac{v_0}{r} t \sin\alpha + C_4. \qquad (21)$$

В начальный момент времени при $t = 0$ угол φ равен нулю и, следовательно, $C_4 = 0$. Уравнение (21) принимает окончательный вид

$$\varphi = \frac{v_0}{r} t \sin\alpha. \qquad (22)$$

Уравнения движения в декартовых координатах имеют вид

$$x = r\cos\varphi = r\cos\left(\frac{v_0}{r} t \sin\alpha\right),$$
$$y = r\sin\varphi = r\sin\left(\frac{v_0}{r} t \sin\alpha\right). \qquad (23)$$

Для нахождения траектории будем искать зависимость между координатой z и длиной дуги $s = r\varphi$. Из (22) находим

$$t = \frac{r\varphi}{v_0 \sin\alpha} = \frac{s}{v_0 \sin\alpha} \qquad (24)$$

и вносим это значение в уравнение (11):

$$z = s \operatorname{ctg}\alpha + \frac{g}{2v_0^2 \sin^2\alpha} s^2. \qquad (25)$$

Согласно (25), траектория точки - параболический винт. Если развернуть цилиндр на плоскость, то параболический винт превратится в параболу.

Для определения реакции поверхности цилиндра N воспользуемся первым уравнением системы (6). Тогда

$$N = \frac{r}{x} m\ddot{x}. \tag{26}$$

Находим, согласно (23), вторую производную от координаты x:

$$\dot{x} = -v_0 \sin\alpha \sin\left(\frac{v_0}{r} t \sin\alpha\right), \tag{27}$$

$$\ddot{x} = -\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{r} \cos\left(\frac{v_0}{r} t \sin\alpha\right). \tag{28}$$

Внося значения x и $\ddot{x}$, определяемые уравнениями (23) и (28), в формулу (26), окончательно находим

$$N = -\frac{m v_0^2 \sin^2\alpha}{r}. \tag{29}$$

Реакция цилиндрической поверхности равна произведению нормального ускорения точки, движущейся по окружности основания цилиндра со скоростью $v_0 \sin\alpha$, на массу.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 27.4–27.7, 27.9, 27.15, 27.16, 27.18, 27.41, 27.53–27.55.

§ 4. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

1. Линейная восстанавливающая сила. Теория колебаний является одним из важнейших разделов теоретической механики. Ее роль в современной технике все время возрастает. При проектировании двигателей, машин и механизмов, мостов и других сооружений всегда производятся расчеты на колебания. Это объясняется увеличением скоростей движущихся частей современных машин. Если раньше – при малых скоростях – допустимо было выбирать основные размеры машин такими, чтобы можно было пренебречь колебаниями ввиду их малости, то при больших скоростях добиться снижения амплитуд колебаний только лишь выбором размеров основных частей машин невозможно. Необходимо применять специальные способы уменьшения амплитуд колебаний. Некоторые из них рассмотрены в этой главе, другие – в томе III, в главе о малых колебаниях системы материальных точек.

В данном параграфе рассматривается простейшая задача о линейных колебаниях материальной точки (крутильные колебания рассмотрены в гл. 9, малые колебания материальных систем – в томе III. *Линейными* называются колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями.

При движении материальной точки может действовать сила упругости, стремящаяся вернуть точку к некоторому положению. Эта сила упругости называется *восстанавливающей*. В большинстве задач рассматривается *восстанавливающая сила* F, изменяющаяся по линейному законку (по закону Гука) (рис. 8.3). При растяжении пружины эта сила прямо пропорциональна удлинению: $F = - c\Delta$, где Δ – смещение конца пружины из ненапряженного состояния, c – *коэффициенты упругости* (*коэффициент жесткости*), численно равный силе, которую надо приложить к пружине для того, чтобы изменить ее длину на единицу. В технических задачах коэффициент упругости измеряется в кгс/см, кгс/мм, а в системе СИ – в Н/м. В связи с неудобством измерения деформации в метрах, считают в Н/см.

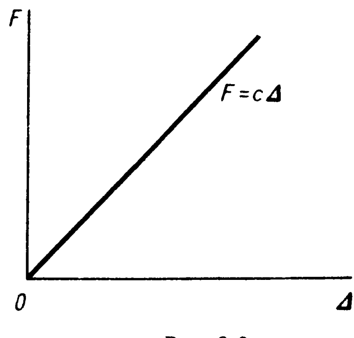


Рис. 8.3

Вообще *линейной восстанавливающей* называется сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия и пропорциональная отклонению этой точки от положения равновесия.

В томе III рассмотрены нелинейные колебания, которые происходят под действием восстанавливающей силы, изменяющейся по нелинейному закону.

2. Свободные колебания материальной точки. *Свободными* называются колебания материальной точки, которые происходят под действием восстанавливающей силы. При движении материальной точки M массой m

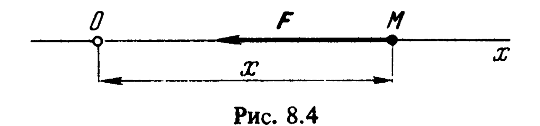


Рис. 8.4

по горизонтальной оси x (рис. 8.4) под действием восстанавливающей силы F, равной по модулю $F = c|x|$ (O – положение равновесия точки M), имеет место дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = c/m$.

Рассмотрим колебания материальной точки M массой m, подвешенной к нижнему концу пружины, верхний конец которой прикреплен к потолку; сила F при движении точки M вниз направлена вверх (рис. 8.5).

На рис. 8.6, *а* изображена недеформированная пружина, не нагруженная материальной точкой M.

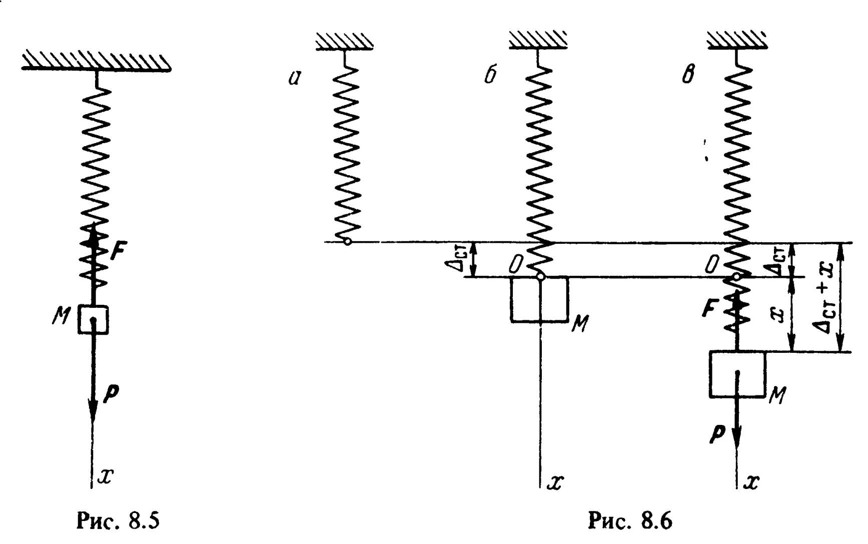


Рис. 8.5 Рис. 8.6

На рис. 8.6, *б* ось x направлена вдоль оси пружины в сторону ее растяжения, т.е. вниз. Начало отсчета O взято в положении статического равновесия материальной точки M, подвешенной к пружине. В этом положении нижний конец пружины растянут под действием силы тяжести $P = mg$ на $\Delta_{ст} = P/c$, где c – коэффициент упругости пружины.

На рис. 8.6, *в* материальная точка M изображена во время движения в текущем положении, смещенном относительно нуля на x вниз. При этом нижний конец пружины удлинен на $\Delta = \Delta_{ст} + x$. Поэтому проекция силы упругости F на ось x равна $F_x = -c\Delta = -c(\Delta_{ст} + x)$. Дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки M имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1^*)$$

где $k^2 = c/m$.

При начальных условиях движения материальной точки, записанных в виде

при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$,

закон ее свободных колебаний имеет вид

$$x = b\sin(kt + \alpha), \qquad (2^*)$$

т.е. материальная точка совершает гармоническое колебательное движение; здесь b – *амплитуда колебаний* – абсолютная величина наибольшего отклонения колеблющейся точки от положения равновесия

$$b = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}\,; \tag{3*}$$

$kt + \alpha$ – *фаза колебаний*, α – *начальная фаза колебаний*, определяемая по начальным данным:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}\,; \tag{4*}$$

k – *круговая частота колебаний* – число колебаний материальной точки за 2π секунд:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}}\,. \tag{5*}$$

Круговая частота колебаний от начальных условий движения (x_0 и $\dot{x}_0$) не зависит. Это свойство называется *изохронностью*, а колебания – *изохронными* (амплитуда колебаний b и начальная фаза α зависят от начальных условий движения).

Периодом колебаний T материальной точки называется наименьший промежуток времени, по истечении которого точка имеет ту же координату и ту же проекцию скорости

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta_{\text{ст}}}{g}}\,. \tag{6*}$$

3. Влияние силы сопротивления на свободные колебания материальной точки. При движении материальной точки в среде, препятствующей движению (воздух, жидкость), возникает сила сопротивления движению. Эта сила при малых скоростях движения точки может приближенно считаться прямо пропорциональной первой степени скорости точки: $R = \beta v$, где β – постоянный коэффициент; при больших скоростях – квадрату скорости точки: $R = \beta_1 v^2$, где β_1 – постоянный коэффициент.

Ниже рассмотрены свободные колебания материальной точки при наличии силы, пропорциональной первой степени скорости точки: $R = \beta v$. В этом случае дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где

$$k^2 = c/m, \quad 2n = \beta/m.$$

Различаются три вида движения: а) $n < k$ – случай малого сопротивления, б) $n > k$ – случай большого сопротивления, в) $n = k$ – предельный случай.

а) $n < k$ – случай малого сопротивления. Материальная точка совершает затухающие колебания по закону

$$x = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \alpha) \quad (\text{при } t \to \infty \quad x \to 0). \tag{7*}$$

При заданных начальных условиях движения (при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$) A и α имеют вид

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{x} + nx_0}. \tag{8*}$$

Это движение не является периодическим, так как величина Ae^{-nt} переменна и убывает по экспоненциальному закону. Однако по аналогии со свободными колебаниями и здесь вводят круговую частоту, период и амплитуду колебаний.

Круговая частота колебаний k_c материальной точки при наличии силы сопротивления равна

$$k_c = \sqrt{k^2 - n^2}, \tag{9*}$$

т.е. $k_c < k$. Итак, сила сопротивления движению, пропорциональная скорости, уменьшает круговую частоту колебаний.

Период колебаний T_c материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, равен

$$T_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \tag{10*}$$

Так как при отсутствии силы сопротивления $T = 2\pi/k$, то

$$T_c = \frac{1}{\sqrt{1 - (n/k)^2}}\,T,$$

т.е. $T_c > T$. Итак, сила сопротивления, пропорциональная скорости, увеличивает период колебаний.

Амплитуды колебаний $b_0, b_1, b_2, \ldots$ убывают с каждым полупериодом (рис. 8.7) по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой равен

$$q = \frac{b_{i+1}}{b_i} = e^{-nT_c/2}.$$

Логарифмическим декрементом колебаний называется логарифм отношения двух смежных амплитуд, отличающихся во времени на $T_c/2$,

т.е.

$$\ln \frac{b_i}{b_{i+1}} = \frac{nT_c}{2} .$$

б) $n > k$ – случай большого сопротивления. Материальная точка совершает затухающее апериодическое (непериодическое) движение согласно уравнению

$$x = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}). \qquad (11^*)$$

При $t \to \infty$ $x \to 0$. Вследствие изменения по показательному закону движение быстро затухает. Характер движения зависит от начальных условий. При $x = x_0 \geqslant 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 > 0$, т.е. когда в начальный момент материальная точка смещена из положения статического равновесия на x_0 и ей сообщена начальная скорость в том же направлении, материальная точка

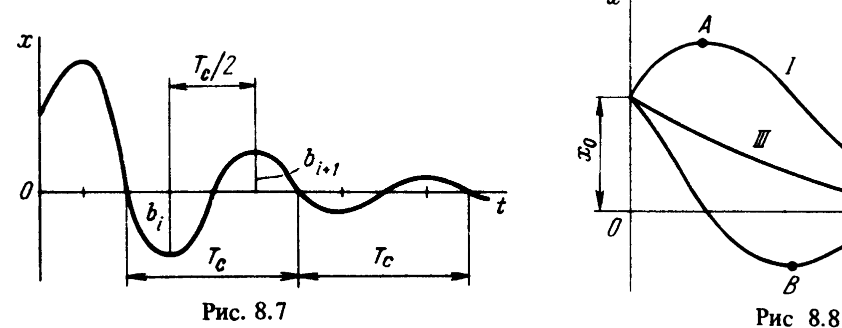


Рис. 8.7

Рис 8.8

вначале отклоняется в указанном направлении до точки A (рис. 8.8, кривая I), а затем асимптотически приближается к положению равновесия (не переходя через него).

При $x = x_0 > 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 < 0$ (причем $|\dot{x}_0| > x_0(n + \sqrt{n^2 - k^2})$), т.е. когда в начальный момент материальная точка смещена из положения статического равновесия на x_0 и ей сообщена в противоположном направлении скорость, модуль которой удовлетворяет указанному выше неравенству, материальная точка приближается к положению равновесия, проходит его (рис. 8.8, кривая II), отклоняется в противоположную сторону до точки B и затем асимптотически приближается к положению равновесия (больше не переходя через него).

При $x = x_0 > 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 < 0$ (причем $|\dot{x}_0| < x_0(n + \sqrt{n^2 - k^2})$), т.е. когда в начальный момент материальная точка смещена из положения равновесия на x_0 и отпущена без начальной скорости либо ей сообщена в противоположном направлении начальная скорость, модуль которой удовлетворяет указанному неравенству, материальная точка асимптотически приближается к положению равновесия, не переходя через него (кривая III).

Во всех трех случаях движение быстро затухает.

в) $n = k$ – предельный случай. Материальная точка совершает затухающее апериодическое движение: $x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t)$. При $t \to \infty$ x становится неопределенностью типа $0 \cdot \infty$. Раскрытие неопределенности по правилу Лопиталя дает $\lim\limits_{t \to \infty} x = 0$, что указывает на затухание движения.

При заданных начальных условиях движения $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ уравнение движения имеет вид

$$x = e^{-nt}[x_0 + (\dot{x}_0 + nx_0)t]. \tag{12*}$$

Характер затухания зависит от начальных условий движения. При $x = x_0 \geqslant 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 > 0$ движение материальной точки соответствует кривой *I*. При $x = x_0 > 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 < 0$ (причем $|\dot{x}_0| > nx_0$) движение материальной точки соответствует кривой *II*. При $x = x_0 > 0$ $\dot{x}_0 < 0$ (причем $|\dot{x}_0| < nx_0$) движение материальной точки соответствует кривой *III*.

Во всех трех случаях движение быстро затухает.

Указание. Решение задач на свободные колебания материальной точки рекомендуется выполнять в следующем порядке:

1) выбрать систему отсчета, взяв начало координат в положении статического равновесия материальной точки;

2) записать начальные условия движения материальной точки;

3) изобразить на рисунке активные силы, приложенные к материальной точке. Применив закон освобождаемости от связей, добавить реакции связей;

4) составить дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на соответствующую ось;

5) проинтегрировать дифференциальное уравнение движения, использовав начальные условия движения для определения постоянных интегрирования.

Для определения круговой частоты k и k_c и периода колебаний T и T_c нет необходимости в интегрировании дифференциального уравнения движения. Достаточно, составив дифференциальное уравнение движения, определить коэффициент k^2 при координате, коэффициент $2n$ при проекции скорости $\dot{x}$ точки и вычислить круговую частоту и период колебаний по указанным выше формулам.

При составлении дифференциального уравнения надо изобразить материальную точку в промежуточном положении, соответствующем ее положительной координате, предположив при этом, что точка перемещается в сторону возрастания этой координаты.

После составления дифференциального уравнения движения (пункт 4) следует рассмотреть условие статического равновесия материальной точки, совершающей колебания. Использовав это условие, часто удается уничтожить ряд постоянных слагаемых в правой части уравнения.

Рассматривая задачу о свободных колебаниях материальной точки при отсутствии силы сопротивления, можно довести решение до результата в общем виде и затем подставить в него численные данные. Решая же задачу о свободных колебаниях материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, надо подставить численные данные в составленное дифференциальное уравнение и определить n и k, так как в зависимости от соотношения коэффициентов n и k приходится записывать решение уравнения в тригонометрических либо в гиперболических функциях (случаи малого, большого сопротивлений и предельный случай).

В заключение этого пункта в задаче 8.35 рассмотрены свободные колебания материальной точки при наличии силы сухого трения.

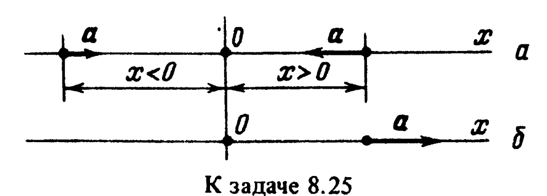
Задача 8.25. Движение материальной точки вдоль оси x описывается дифференциальными уравнениями: а) $2\ddot{x} + 5x = 0$, б) $2\ddot{x} - 5x = 0$.

Не интегрируя эти дифференциальные уравнения, выяснить, движется ли точка в одном направлении либо совершает колебания вдоль оси x.

Решение. а) Из дифференциального уравнения

$$2\ddot{x} + 5x = 0$$

следует, что абсцисса x точки и проекция $a_x = \ddot{x}$ ее ускорения $\boldsymbol{a}$ имеют все время разные знаки. Так, при $x > 0$ $\ddot{x} < 0$, т.е. ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено налево (рис. *а*), если же $x < 0$, то $\ddot{x} > 0$ – ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено



К задаче 8.25

направо. При $x = 0$ из уравнения следует $\ddot{x} = 0$. Значит, при движении материальной точки ее ускорение $\boldsymbol{a}$ постоянно направлено к началу отсчета (рис. *а*), в котором оно обращается в нуль. Отсюда следует, что точка совершает колебания вдоль оси x. Действительно, если в силу начальных условий движения точка, имея $x > 0$, движется направо, т.е. $v_x = \dot{x} > 0$, то при ускорении $\boldsymbol{a}$, направленном налево, движение оказывается замедленным вплоть до обращения скорости в нуль (в этом положении ускорение не равно нулю). После этого точка при наличии ускорения $\boldsymbol{a}$, по-прежнему направленному налево, начнет ускоренно двигаться налево. После перехода нуля, где $a = 0$, и попадания в зону отрицательных значений x ускорение $\boldsymbol{a}$ будет уже направлено направо. Так как точка после прохождения нуля продолжает двигаться налево, то движение вновь оказывается замедленным и т.д.

Итак, материальная точка, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$2\ddot{x} + 5x = 0,$$

совершает колебания вдоль оси x.

б) Из дифференциального уравнения

$$2\ddot{x} - 5x = 0$$

следует, что абсцисса x точки и проекция $a_x = \ddot{x}$ ее ускорения $\boldsymbol{a}$ имеют все время одинаковые знаки: при $x > 0$ $\ddot{x} > 0$, а при $x < 0$ $\ddot{x} < 0$.

Если в силу начальных условий движения точка, находясь в зоне $x > 0$, движется направо ($v_x = \dot{x} > 0$), то и $a_x = \ddot{x} > 0$, т.е. ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено направо. Следовательно, в данном случае движение точки является ускоренным при любых значениях $x > 0$. Это значит, что точка совершает апериодическое движение вдоль оси x в сторону ее возрастания.

Если же при $x > 0$ и $\ddot{x} > 0$ начальная скорость направлена налево ($v_x = \dot{x} < 0$), то точка движется замедленно налево до положения, в котором ее скорость обратится в нуль, а затем начинает двигаться ускоренно направо.

Итак, материальная точка, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$2\ddot{x} - 5x = 0,$$

совершает апериодическое движение вдоль оси x.

Задача 8.26. Груз массой $m = 10$ кг подвешен к концу пружины, находившейся в начальный момент в покое в недеформированном состоянии, и отпущен без толчка.

Найти уравнение колебаний груза, если известно, что для деформации пружины на 1 см надо приложить к ней силу, модуль которой равен 14,4 Н.

Решение. Направим ось x по вертикали вниз, если начало отсчета O в положении статического равновесия груза.

В начальный момент груз подвешивался к концу M_0 недеформированной пружины, следовательно, он находился выше положения статического равновесия на величину статической деформации пружины $\Delta_{\text{ст}} = P/c$, где c – коэффициент упругости пружины. Отсутствие в начальный момент толчка указывает на движение без начальной скорости. Итак, начальные условия движения груза имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = -\frac{P}{c}, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0$$

(x_0 имеет знак минус, так как ось x направлена по вертикали вниз, а груз в начальный момент находился над положением статического равновесия).

Изобразим груз в положении, смещенном относительно нуля на x вниз (рис. *а*), и предположим, что он движется в сторону возрастания x, т.е. вниз. При этом пружина растягивается и ее сила упругости F (восстанавливающая сила) равна $F = -c\Delta$, где Δ – смещение конца пружины, из ненапряженного состояния, т.е. $\Delta_x = M_0M = \Delta_{ст} + x$. Следовательно,

$$F_x = -c(\Delta_{ст} + x). \tag{1}$$

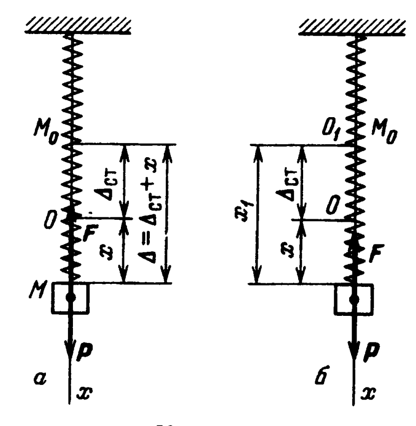
Кроме восстанавливающей силы F, к грузу приложена его сила тяжести.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P + F_x. \tag{2}$$

Применив формулу (1), имеем

$$m\ddot{x} = P - c\Delta_{ст} - cx. \tag{3}$$



К задаче 8.26

Рассмотрим груз в положении статического равновесия. К грузу приложена его сила тяжести P, направленная по вертикали вниз, и статическая сила упругости $F_{ст}$, которая появилась при растяжении пружины на $\Delta_{ст}$ под действием силы тяжести груза, т.е. $F_{ст} = c\Delta_{ст}$. Сила упругости $F_{ст}$ направлена по вертикали вверх. Из условия равновесия груза следует:

$$P - F_{ст} = 0,$$

т.е.

$$P - c\Delta_{ст} = 0. \tag{4}$$

Воспользовавшись этим результатом, запишем дифференциальное уравнение (3) в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{5}$$

где

$$k^2 = c/m.$$

Таким образом, выбирая начало координат в положении статического равновесия, всегда получаем дифференциальное уравнение свободных колебаний без постоянного члена в правой части.

Дифференциальное уравнение (5) свободных колебаний груза является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно, решение уравнения записывается в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (6)$$

Для определения постсянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (7)$$

Подставив в (6) начальное условие движения

$$t = 0 \quad x = x_0 = -\frac{mg}{c}, \quad \text{а в (7)} \quad t = 0 \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0,$$

находим

$$C_1 = x_0 = -\frac{mg}{c}, \quad C_2 = 0.$$

Уравнение (6) движения груза после подстановки значений C_1 и C_2 принимает вид

$$x = -\frac{mg}{c} \cos kt, \qquad (8)$$

где

$$k = \sqrt{c/m}.$$

Воспользовавшись численными данными, получаем

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = 121 \text{ рад/с}, \quad \frac{mg}{c} = 6{,}8 \text{ см}.$$

Итак,

$$x = -6{,}8 \cos 12t \text{ см},$$

или, делая множитель при тригонометрической функции положительным, находим

$$x = 6{,}8 \sin(12t - \pi/2) \text{ см}.$$

Сопоставляя этот результат с уравнением свободных колебаний, записанным в общем виде: $x = b \sin(kt + \alpha)$, видим, что амплитуда колебаний $b = 6{,}8$ см, начальная фаза колебаний $\alpha = -\pi/2$ и круговая частота колебаний $k = 12$ рад/с.

Колебания происходят около положения статического равновесия, т.е. около начала отсчета.

Период колебаний груза определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{12} = 0{,}52 \text{ с}.$$

Эти результаты можно непосредственно получить с помощью формул

$$b = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \frac{mg}{c} = 6{,}8\ \text{см}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

В обзоре теории была отмечена целесообразность выбора начала отсчета в положении статического равновесия материальной точки. Проиллюстрируем это, выбрав начало отсчета O_1 в другом положении груза, например в его начальном положении, т.е. в нижнем конце недеформированной пружины.

В связи с этим изменяются начальные условия движения груза. Они примут вид

$$\text{при } t = 0 \quad x_1 = 0, \quad \dot{x}_1 = 0. \tag{9}$$

Теперь новая координата x_1 (см. рис. *б*) равна сумме старой координаты и статического удлинения: $x_1 = x + \Delta_{\text{ст}}$, а проекция силы упругости F равна $F_x = -cx_1$. Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x}_1 = F_x + P_x.$$

Так как $P_x = P = mg$, то $m\ddot{x}_1 = -cx_1 + mg$, отсюда

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = g, \tag{10}$$

где обозначено $c/m = k^2$.

Из сопоставления уравнений (10) и (6) следует, что вместо однородного дифференциального уравнения (5) при новом положении отсчета O_1 составлено неоднородное уравнение (10). Его общее решение имеет вид

$$x_1 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, \tag{11}$$

где $x_1^{(1)}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, приведенное в формуле (6), а $x_1^{(2)}$ – частное решение уравнения (10).

Приняв во внимание, что правая часть уравнения (10) постоянна, ищем частное решение $x_1^{(2)}$ в виде постоянного A, т.е. $x_1^{(2)} = A$. Так как при этом $\ddot{x}_1^{(2)} = 0$, то из уравнения (10) непосредственно следует

$$x_1^{(2)} = A = g/k^2. \tag{12}$$

После внесения результатов (6) и (12) в формулу (11) найдем

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + g/k^2. \tag{13}$$

Вычислим производную x_1 по времени t:

$$\dot{x}_1 = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{14}$$

Использовав начальные условия (9) в уравнениях (13) и (14), найдем $C_1 = -g/k^2$, $C_2 = 0$. Теперь искомый закон движения (13) окончательно

примет вид

$$x_1 = (g/k^2)(1 - \cos kt).$$

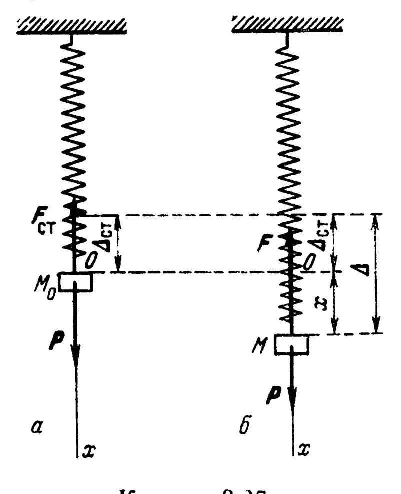
Так как $g/k = P/c$, то

$$x_1 = \frac{P}{c}(1 - \cos kt). \qquad (15)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (8), в котором координата отсчитывается от точки O — положения статического равновесия, соответствует уравнению (15), где отсчет координаты принят в начальном положении груза O_1, причем $x_1 = P/c + x = \Delta_{ст} + x$. Это значит, что выполнен перенос координат из начала O в O_1, причем $OO_1 = \Delta_{ст}$.

В первом варианте решения задачи было составлено однородное дифференциальное уравнение (5), решение которого несколько проще и короче, чем решение неоднородного уравнения (10), составленного во втором варианте. Поэтому следует отдать предпочтение выбору начала отсчета в положении статического равновесия материальной точки.

Задача 8.27. Под действием груза, подвешенного к концу пружины, пружина получила статическое удлинение $\Delta_{ст} = 5$ см.



К задаче 8.27

Найти закон колебаний этого груза на пружине, если в начальный момент грузу, находившемуся в положении статического равновесия, была сообщена вверх начальная скорость $v_0 = 28$ см/с.

Решение. Направим ось x по вертикали вниз, взяв начало отсчета в положении статического равновесия груза. В этом положении пружина под действием силы тяжести груза растянута на $\Delta_{ст}$.

До сообщения начальной скорости груз находится в равновесии под действием двух сил: силы тяжести $P = mg$ и силы упругости пружины $F_{ст}$, направленной по вертикали вверх (рис. *а*). По модулю $F_{ст} = c\Delta_{ст}$, где c — коэффициент упругости пружины. Запишем условие равновесия груза:

$$P - F_{ст} = 0 \quad \text{или} \quad P - c\Delta_{ст} = 0. \qquad (1)$$

Начальные условия движения груза имеют вид

при $t = 0$ $\quad x = x_0 = 0$,

$\dot{x} = \dot{x}_0 = -28$ см/с

($\dot{x}_0$ отрицательно, так как начальная скорость v_0, сообщенная грузу, направлена вверх).

Изобразим груз в промежуточном положении M, соответствующем его положительной абсциссе x (рис. *б*). При этом пружина оказывается растянутой на $\Delta = \Delta_{\text{ст}} + x$, а сила упругости F (восстанавливающая сила) – направленной по вертикали вверх. Тогда

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{\text{ст}} + x). \tag{2}$$

К грузу, помимо силы упругости F, приложена его сила тяжести P. Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P + F_x.$$

Воспользовавшись формулами (2) и (1), получим

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{3}$$

где

$$k = \sqrt{c/m}.$$

Вычисление k^2 непосредственно провести невозможно, так как неизвестен коэффициент упругости c пружины. Подставив в формулу (1) $P = mg$, представим ее в виде $c/m = g/\Delta_{\text{ст}}$. Следовательно,

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{g/\Delta_{\text{ст}}} \tag{4}$$

($\Delta_{\text{ст}}$ в условии задачи задано).

Интегрирование дифференциального уравнения (3) не представляет затруднений. Составим соответствующее характеристическое уравнение: $\lambda^2 + k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Так как корни характеристического уравнения мнимые, то решение уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{5}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{6}$$

Подставим в уравнение (5): $t = 0$, $x = x_0 = 0$, а в уравнение (6): $t = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$. Тогда $C_1 = 0$, $C_2 = \dot{x}_0/k$, и уравнение (5) принимает вид

$$x = \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \tag{7}$$

Использовав числовые данные, получим

$$k = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{980}{5}} = 14 \text{ рад/с}, \quad \frac{\dot{x}_0}{k} = -\frac{28}{14} = -2 \text{ см}.$$

Итак, груз совершает на пружине гармонические колебания согласно уравнению $x = -2\sin 14t$ см. Делая множитель при тригонометрической функции положительным, имеем

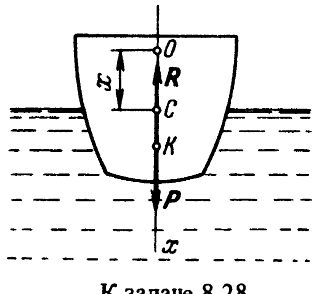
$$x = 2\sin(14t + \pi) \text{ см}.$$

Амплитуда колебаний груза $b = 2$ см, начальная фаза колебаний $\alpha = \pi$, круговая частота колебаний $k = 14$ рад/с.

Период колебаний T можно вычислить по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{14} = 0{,}45 \text{ с}.$$

Задача 8.28. Найти уравнение свободных вертикальных колебаний судна весом P в спокойной воде. Площадь его сечения на уровне свободной поверхности воды считать не зависящей от колебаний и равной S. В начальный момент центру тяжести C, находившемуся в положении статического равновесия, была сообщена вертикально вниз скорость v_0. Вязкостью воды пренебречь. Удельный вес воды равен γ.



К задаче 8.28

Решение. Направим ось x по вертикали вниз, взяв начало отсчета O в положении статического равновесия центра тяжести C судна. При этом высота подводной части судна равна $\Delta_{ст}$.

Запишем условие статического равновесия судна. К нему приложены: сила тяжести $P = mg$ в центре тяжести C судна и нормальная статическая реакция $R_{ст}$ воды в центре тяжести K объема воды, вытесненной судном. Модуль $R_{ст}$ равен весу объема v воды, вытесненной судном, т.е. $R_{ст} = \gamma v = \gamma S \Delta_{ст}$. Имеем $R_{ст} = \gamma S \Delta_{ст}$. Поэтому условие статического равновесия имеет вид

$$mg - \gamma S \Delta_{ст} = 0. \quad (1)$$

Так как центр тяжести находился в начальный момент в положении статического равновесия и имел скорость $\mathbf{v}_0$, направленную по вертикали вниз, то начальные условия движения центра тяжести C будут:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0. \quad (2)$$

Из-за наличия начальной скорости $\mathbf{v}_0$ судно начинает двигаться в вертикальном направлении вниз. На рисунке оно изображено в момент, когда его центр тяжести C переместился из положения статического равновесия вниз на x. При этом под водой оказалась часть судна высотой $\Delta_{ст} + x$. Объем v воды, вытесненной судном, равен $S(\Delta_{ст} + x)$. Значит, проекция

на ось x нормальной реакции R равна

$$R_x = -\gamma S(\Delta_{ст} + x). \tag{3}$$

Составим дифференциальное уравнение движения центра тяжести C в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P_x + R_x.$$

Приняв во внимание, что $P_x = mg$, и воспользовавшись формулами (1) и (3), получим

$$m\ddot{x} = -\gamma Sx,$$

т.е.

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{4}$$

где обозначено

$$\frac{\gamma S}{m} = k^2. \tag{5}$$

Использовав формулы, данные в обзоре теории, запишем искомое уравнение движения в виде

$$x = b\sin(kt + \alpha), \tag{6}$$

где круговая частота колебаний k в соответствии с формулой (5) равна

$$k = \sqrt{\frac{\gamma S}{m}}. \tag{7}$$

Амплитуду колебаний b определим по формуле

$$b = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}.$$

Использовав начальные условия движения (2), находим

$$b = \frac{v_0}{k} = v_0\sqrt{\frac{m}{\gamma S}}. \tag{8}$$

Начальная фаза α равна

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{\dot{x}_0}.$$

Подставив $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = v_0$, получим

$$\alpha = 0. \tag{9}$$

Внеся результаты (7), (8) и (9) в уравнение (6), окончательно получим его в виде

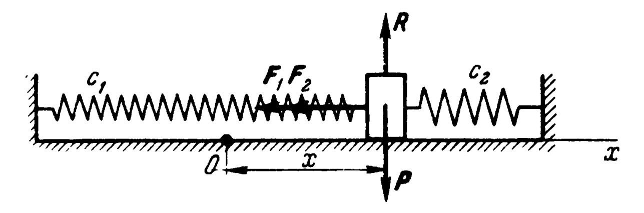
$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{\gamma S}}\ \sin\sqrt{\frac{\gamma S}{m}}\ t. \tag{10}$$

Уравнение (10) описывает свободные вертикальные колебания центра тяжести C судна.

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\gamma S}}\ .$$

Задача 8.29. Груз массой $m = 1$ кг лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Слева и справа он соединен с концами двух горизонтально расположенных пружин (рис.) с коэффициентами упругости $c_1 = 4$ Н/см, $c_2 = 5$ Н/см. В положении равновесия груза обе пружины недеформированы.



К задаче 8.29

Найти уравнение движения и период колебаний груза, если в начальный момент он был смещен из положения равновесия направо на 4 см и ему была сообщена направо начальная скорость 90 см/с.

Решение. Направим ось x по горизонтали направо, взяв начало отсчета в положении равновесия груза.

Запишем начальные условия движения груза:

при $t = 0$ $\quad x_0 = 4$ см, $\quad \dot{x}_0 = 90$ см/с.

Изобразим груз в промежуточном положении смещенным по отношению к началу отсчета направо на x и представим, что он движется в сторону возрастания x. При этом правая пружина сжимается на x и ее сила упругости F_2 направлена налево. Одновременно левая пружина растягивается на x и, следовательно, ес сила упругости F_1 также направлена налево, т.е.

$$F_{1x} = -c_1 x, \quad F_{2x} = -c_2 x.$$

Кроме двух восстанавливающих сил F_1 и F_2, к грузу приложены его сила тяжести P и нормальная реакция R гладкой плоскости.

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x. В данном случае получим

$$m\ddot{x} = F_{1x} + F_{2x}, \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -(c_1 + c_2)x. \tag{1}$$

Как следует из дифференциального уравнения (1), обе пружины можно заменить одной эквивалентной пружиной, коэффициент упругости которой равен сумме коэффициентов упругости двух данных пружин, т.е. $c = c_1 + c_2$. Запишем дифференциальное уравнение (1) в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{2}$$

где

$$k^2 = \frac{c_1 + c_2}{m}.$$

Использовав формулы (2*)–(6*), данные в обзоре теории, имеем: круговая частота колебаний равна

$$k = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} = \sqrt{\frac{400 + 500}{1}} = 30 \text{ рад/с},$$

амплитуда колебаний

$$b = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{4^2 + \frac{90^2}{30^2}} = 5 \text{ см},$$

начальная фаза колебаний

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \operatorname{arctg}\frac{30 \cdot 4}{90} = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = 0{,}92 \text{ рад}$$

Итак, закон колебаний груза дается формулой

$$x = 5\sin(30t + 0{,}92) \text{ см},$$

причем период колебаний

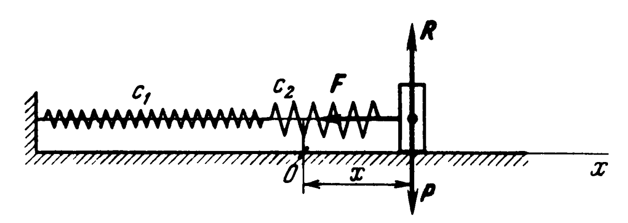
$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{30} = 0{,}21 \text{ с}.$$

Задача 8.30. Решить предыдущую задачу в предположении, что обе пружины соединены последовательно (рис.).

Решение. Начало отсчета на оси x принимаем в положении равновесия груза при недеформированных пружинах. Ось x направляем по горизонтали направо. Начальные условия движения остаются прежними:

при $t = 0$ $\quad x = x_0 = 4$ см, $\quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 90$ см/с.

Изобразим груз в промежуточном положении смещенным направо на x. При этом в пружинах возникает восстанавливающая сила $\boldsymbol{F}$, направленная налево.



К задаче 8.30

Вычислим коэффициент упругости c пружины, эквивалентной двум данным пружинам. Суммарное удлинение пружин равно смещению груза, т.е. $|x|$; поэтому

$$|x| = \frac{F}{c}. \tag{1}$$

При смещении груза направо на x каждая из пружин получила удлинение. Сумма этих удлинений равна $|x|$, т.е.

$$|x| = |x_1| + |x_2|. \tag{2}$$

Так как каждая из пружин растягивается под действием силы F, то

$$|x_1| = \frac{F}{c_1}, \quad |x_2| = \frac{F}{c_2}. \tag{3}$$

Подставив значения (1) и (3) в формулу (2), находим

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}. \tag{4}$$

Величины, обратные коэффициентам упругости (жесткости), называются *коэффициентами податливости.* Итак, при последовательном соединении пружин податливость эквивалентной пружины равна сумме податливостей данных пружин. Из формулы (4) находим коэффициент упругости c эквивалентной пружины:

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \tag{5}$$

В дальнейшем вместо двух данных последовательно соединенных пружин будем рассматривать одну эквивалентную пружину с коэффициентом упругости c.

При смещении груза направо на x проекция восстанавливающей силы F, направленной налево, равна

$$F_x = -cx = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x. \tag{6}$$

Кроме силы F, к грузу приложены следующие силы: P – его сила тяжести, R – нормальная реакция гладкой горизонтальной плоскости.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x.$$

Полученное уравнение перепишем так:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{7}$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{1}{m}} = 14{,}9 \text{ рад/с}. \tag{8}$$

Нетрудно обнаружить тождественность дифференциального уравнения (7) и дифференциального уравнения (2), полученного в предыдущей задаче. Поэтому можно, минуя промежуточные выкладки, написать ответ с учетом вышеупомянутых формул (2*)–(6*):

$$b = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{90}{14{,}9}\right)^2} = 7{,}25 \text{ см},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \frac{14{,}9 \cdot 4}{90} = 0{,}66, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0{,}66 = 0{,}58 \text{ рад},$$

$$x = 7{,}25 \sin(14{,}9t + 0{,}58) \text{ см}.$$

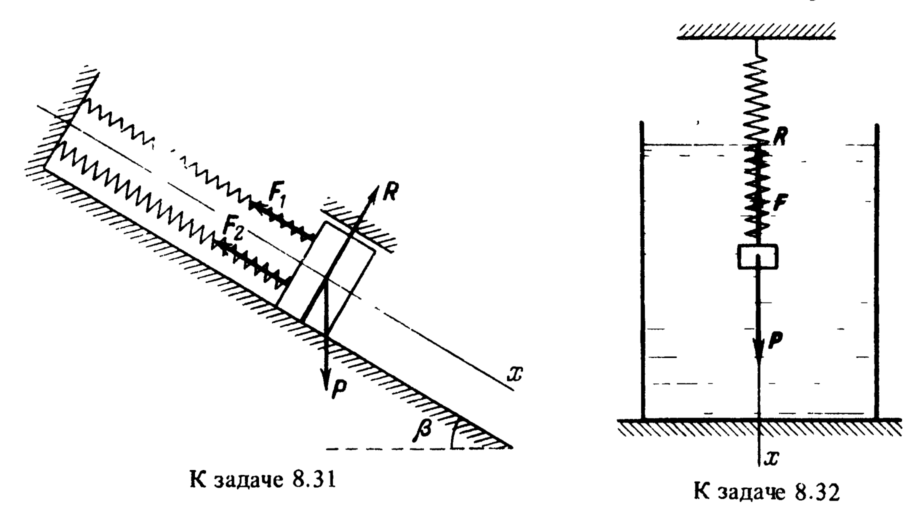
Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{14{,}9} = 0{,}42 \text{ с}.$$

Задача 8.31. Груз массой $m = 1$ кг колеблется вдоль гладкой наклонной плоскости. Груз присоединен к концам двух параллельных пружин (рис.) с коэффициентами упругости $c_1 = 4$ Н/см, $c_2 = 5$ Н/см.

Найти уравнение движения и период колебаний груза, если в начальный момент он был смещен из положения статического равновесия на 4 см направо вниз и ему в этом направлении была сообщена начальная скорость 90 см/с.

Решение. Направим ось x параллельно наклонной плоскости направо вниз, взяв ее начало отсчета в положении статического равновесия груза. При этом обе пружины получили статическое удлинение $\Delta_{ст}$. Обозначим буквой β угол, образуемый наклонной плоскостью с горизонталью.



К задаче 8.31

К задаче 8.32

К грузу приложены: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ – сила тяжести, $\boldsymbol{R}$ – нормальная реакция наклонной плоскости, $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ – силы упругости пружин.

Изобразим груз в промежуточном положении с координатой $x > 0$. При этом обе пружины получат смещения $\Delta_{ст} + x$, а проекции их сил упругости на ось x равны

$$F_{1x} = -c_1(\Delta_{ст} + x), \quad F_{2x} = -c_2(\Delta_{ст} + x). \tag{1}$$

Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P_x + R_x + F_{1x} + F_{2x}. \tag{2}$$

Приняв во внимание формулы (1), а также $P_x = mg\sin\beta$, $R_x = 0$, получим уравнение (2) в виде

$$m\ddot{x} = mg\sin\beta - (c_1 + c_2)\Delta_{ст} - (c_1 + c_2)x. \tag{3}$$

Для упрощения уравнения (3) рассмотрим условие статического равновесия груза. В этом положении обе пружины растянуты на $\Delta_{ст}$ и потому $F_{1стx} = -c_1\Delta_{ст}$, $F_{2стx} = -c_2\Delta_{ст}$. Внеся эти значения в уравнение равновесия: $mg\sin\beta + F_{1стx} + F_{2стx} = 0$, найдем

$$mg\sin\beta - (c_1 + c_2)\Delta_{ст} = 0. \tag{4}$$

Использовав условие (4) в уравнении (3), получим $m\ddot{x} = -(c_1 + c_2)x$, или

$$m\ddot{x} = -cx, \qquad (5)$$

где c обозначает коэффициент упругости эквивалентной пружины:

$$c = c_1 + c_2. \qquad (6)$$

Таким образом, при параллельном соединении пружин коэффициент упругости эквивалентной пружины равен сумме коэффициентов упругости данных пружин.

Дифференциальное уравнение (5) представим в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (7)$$

где $k^2 = c/m = (c_1 + c_2)/m$.

Заметив, что начальные условия движения имеют вид: при $t = 0$ $x_0 = 4$ см, $\dot{x}_0 = 90$ см/с, используем формулы (2*) – (6*), приведенные в обзоре теории.

Круговая частота колебаний k равна

$$k = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} = \sqrt{\frac{400 + 500}{1}} = 30 \text{ рад/с},$$

амплитуда колебаний

$$b = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{4^2 + \frac{90^2}{30^2}} = 5 \text{ см},$$

начальная фаза колебаний

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \operatorname{arctg}\frac{30 \cdot 4}{90} = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = 0{,}92 \text{ рад},$$

период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{30} = 0{,}21 \text{ с}.$$

Итак, искомое уравнение колебаний груза имеет вид

$$x = b\sin(kt + \alpha) = 5\sin(30t + 0{,}92) \text{ см}.$$

В заключение заметим, что при выполнении данной конструкции для каждой из пружин, учитывая их силу тяжести, должна быть предусмотрена отдельная направляющая, не изображенная на рисунке.

Задача 8.32. Груз массой $m = 10$ кг, подвешенный к концу пружины, движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины $c = 10$ Н/см.

Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости груза: $R = \beta v$, где $\beta = 1{,}6$ Н · с/см.

Найти уравнение движения груза, если в начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия вниз на 4 см и ему была сообщена вниз начальная скорость $v_0 = 4$ см/с.

Решение. Направим ось x вдоль пружины по вертикали вниз, взяв начало отсчета в положении статического равновесия груза. Запишем начальные условия движения груза:

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = 4 \text{ см}, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 4 \text{ см/с}.$$

Изобразим груз в положении, при котором его абсцисса x положительна. Так как пружина при этом получит удлинение $\Delta = \Delta_{\text{ст}} + x$, то проекция на ось x силы упругости $\boldsymbol{F}$ пружины, направленной по вертикали вверх, равна

$$F_x = -c(\Delta_{\text{ст}} + x). \qquad (1)$$

Предположим, что груз движется в сторону возрастания абсциссы x. Сила сопротивления $\boldsymbol{R}$ движению груза направлена противоположно скорости, т.е. по вертикали вверх. Кроме сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$, к грузу приложена его сила тяжести $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$. Составим дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = mg + F_x + R_x.$$

Подставив в это уравнение $R_x = -\beta v_x$ и значение F_x из формулы (1), находим

$$m\ddot{x} = mg - c\Delta_{\text{ст}} - cx - \beta v_x. \qquad (2)$$

Нетрудно видеть, что

$$mg - c\Delta_{\text{ст}} = 0. \qquad (3)$$

Действительно, в положении статического равновесия к грузу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P}$ — его сила тяжести, направленная по вертикали вниз, и статическая сила упругости пружины $F_{\text{ст}} = c\Delta_{\text{ст}}$, направленная по вертикали вверх. Так как груз находится в равновесии, то $mg - F_{\text{ст}} = 0$, откуда и следует формула (3).

Первые два слагаемых в правой части дифференциального уравнения (2), на основании формулы (3), уничтожаются. Заменив в последнем слагаемом v_x на $\dot{x}$, имеем

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (4)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad n = \frac{\beta}{2m}.$$

Подставив числовые значения, находим, что k = 10 рад/с, n = 8 рад/с; таким образом, $n < k$ (случай малого сопротивления).

Запишем характеристическое уравнение дифференциального уравнения (4): $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, откуда

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}.$$

Следовательно, уравнение движения груза имеет вид

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}t). \tag{5}$$

Для определения постоянных интегрирования вычислим

$$\dot{x} = e^{-nt}(-C_1\sqrt{k^2 - n^2}\sin\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2\sqrt{k^2 - n^2}\cos\sqrt{k^2 - n^2}t) -$$
$$- ne^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}t). \tag{6}$$

Подставив в уравнение (5) $t = 0$, $x = x_0$, а в уравнение (6) $t = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, получаем $C_1 = x_0$, $C_2 = \dfrac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}$. Внеся значения C_1 и C_2 в уравнение (5), найдем

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin\sqrt{k^2 - n^2}t\right). \tag{7}$$

Преобразуем полученное уравнение. Для этого положим

$$x_0 = A \sin\alpha, \quad \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} = A\cos\alpha, \tag{8}$$

где A и α – постоянные. Из (8) легко найти, что

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}, \tag{9}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{x}_0 + nx_0}. \tag{10}$$

Теперь уравнение (7) принимает вид

$$x = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha). \tag{11}$$

Движение груза является затухающим (так как при $t \to \infty$ $x \to 0$) с круговой частотой

$$k_c = \sqrt{k^2 - n^2}. \tag{12}$$

Выше было найдено, что k = 10 рад/с, n = 8 рад/с. Из условия задачи следует, что x_0 = 4 см, $\dot{x}_0$ = 4 см/с. Подставив эти числовые значения в формулы (9), (10), (12), находим: A = 7,2 см, α = 0,59 рад, k_c = 6 рад/с.

Итак, груз совершает затухающие колебания по закону

$$x = 7{,}2e^{-8t}\sin(6t + 0{,}59)\ \text{см}. \qquad (13)$$

Период колебаний T_c груза равен $T_c = 2\pi/k_c = 2\pi/6 = 1{,}05$ с. Если бы груз совершал колебания при отсутствии силы сопротивления, то период его колебаний был бы меньше. Действительно, по формуле $T = 2\pi/k$ получим $T = 0{,}63$ с.

Амплитуда колебаний груза убывает по экспоненциальному закону. Допустим, что моменту времени t_i соответствует i-я амплитуда b_i. Следующая амплитуда b_{i+1} имеет место через полпериода, т.е. при $t_{i+1} = t_i + T_c/2$. Следовательно,

$$b_i = 7{,}2e^{-8t_i}, \quad b_{i+1} = 7{,}2e^{-8t_{i+1}} = 7{,}2e^{-8(t_i + T_c/2)}.$$

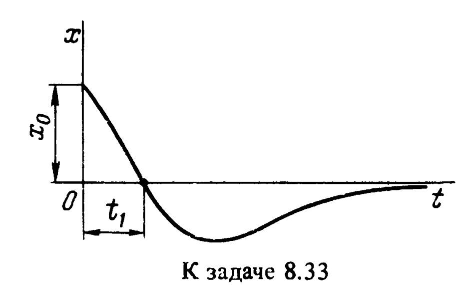
Разделив b_{i+1} на b_i, находим

$$\frac{b_{i+1}}{b_i} = e^{-4T_c};$$

так как $T_c = 1{,}05$ с, то $\dfrac{b_{i+1}}{b_i} = e^{-4{,}2} \approx 0{,}02$.

Таким образом, последовательность амплитуд образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q \approx 0{,}02$.

Задача 8.33. Решить предыдущую задачу в предположении, что сила сопротивления движению равна $R = \beta v$, где $\beta = 5{,}2$ Н·с/см. В начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия на 4 см и ему была сообщена вверх начальная скорость $v_0 = 240$ см/с.



К задаче 8.33

Р е ш е н и е. Начало отсчета на оси x по-прежнему расположим в положении статического равновесия груза и ось x направим по вертикали вниз. В данном случае начальные условия движения груза имеют вид:

при $t = 0 \quad x = x_0 = 4$ см, $\quad \dot{x} = \dot{x}_0 = -240$ см/с

($\dot{x}_0$ отрицательно, так как начальная скорость направлена вверх).

Следуя решению предыдущей задачи, получим дифференциальное уравнение движения груза (см. формулу (4) предыдущей задачи)

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad n = \frac{\beta}{2m}.$$

Подставив численные значения, получим, что $k = 10$ рад/с, $n = 26$ рад/с; таким образом, $n > k$ (случай большого сопротивления). Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, откуда

$$\lambda_1 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}, \quad \lambda_2 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Так как $n > k$, то корни λ_1 и λ_2 являются вещественными и отрицательными. Уравнение движения груза имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{1}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{2}$$

Подставив в уравнение (1) $t = 0$, $x = x_0$, а в уравнение (2) $t = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, получим систему уравнений

$$x_0 = C_1 + C_2; \quad \dot{x}_0 = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Заменив в уравнении (1) C_1 и C_2 вычисленными значениями, находим уравнение движения груза

$$x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[(\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0) e^{\lambda_2 t} - (\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0) e^{\lambda_1 t}\right]. \tag{3}$$

Воспользовавшись значениями λ_1 и λ_2 и гиперболическими функциями, запишем уравнение движения (3) в виде

$$x = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n^2 - k^2}} \left[(\dot{x}_0 + n x_0) \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2}\, t + x_0 \sqrt{n^2 - k^2} \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2}\, t\right]. \tag{4}$$

Движение груза является апериодическим и притом затухающим, так как при $t \to \infty$ $x \to 0$.

После подстановки в уравнения (3) и (4) числовых значений: $n = 26$ рад/с, $k = 10$ рад/с, $x_0 = 4$ см, $\dot{x}_0 = -240$ см/с, получим

$$x = \frac{1}{6} e^{-26t}(29e^{-24t} - 5e^{24t}) \qquad (5)$$

или

$$x = \frac{1}{3} e^{-26t}(12 \operatorname{ch} 24t - 17 \operatorname{sh} 24t). \qquad (6)$$

Выясним теперь, переходит ли груз положение статического равновесия. Для этого приравняем x в уравнении (5) нулю:

$$\frac{1}{6} e^{-26t}(29e^{-24t} - 5e^{24t}) = 0.$$

Моменты времени, в которые груз находится в положении статического равновесия, определяются из уравнений

$$29e^{-24t_1} - 5e^{24t_1} = 0, \quad e^{-26t_2} = 0.$$

Произведя вычисления, найдем, что $t_1 = 0{,}037$ с, $t_2 \to \infty$.

Значение $t_1 = 0{,}037$ с соответствует переходу груза через положение статического равновесия. Значение $t_2 \to \infty$ соответствует затуханию движения (рис.).

(Если бы при решении задачи значение t_1 оказалось отрицательным, то это указывало бы на отсутствие перехода груза через положение статического равновесия.)

Итак, в данной задаче груз переходит один раз через положение статического равновесия и затем асимптотически к нему приближается с другой стороны (больше одного раза груз через положение статического равновесия перейти не может, так как при $x = 0$ получается только одно значение t, отличное от бесконечности).

Задача 8.34. Решить задачу 8.32 в предположении, что сила сопротивления движению равна $R = \beta v$, где $\beta = 2$ Н · с/см. В начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия вниз на 4 см и отпущен без начальной скорости.

Решение. Как и в двух предыдущих задачах, начало отсчета расположим в положении статического равновесия и ось x направим по вертикали вниз. Запишем начальные условия движения груза:

при $t = 0$ $x = x_0 = 4$ см, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$.

Аналогично тому, как делалось в двух предыдущих задачах, получим дифференциальное уравнение движения груза:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где, как обычно,

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad n = \frac{\beta}{2m}.$$

Подставив сюда числовые значения, получим, что $k = 10$ рад/с, $n = 10$ рад/с; таким образом, $n = k$ (предельный случай).

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$.

Так как $n = k$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = -n$, т.е. корни характеристического уравнения являются вещественными и равными. Уравнение движения груза имеет вид

$$x = C_1 e^{-nt} + C_2 t e^{-nt}. \tag{1}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -nC_1 e^{-nt} + C_2 e^{-nt} - nC_2 t e^{-nt}. \tag{2}$$

Подставив в уравнение (1) $x = x_0$ при $t = 0$, а в уравнение (2) $\dot{x} = 0$ при $t = 0$, имеем $C_1 = x_0$, $C_2 = nx_0$.

Заменив в уравнении (1) C_1 и C_2 вычисленными значениями, получим уравнение движения груза в виде

$$x = x_0 e^{-nt}(1 + nt). \tag{3}$$

Движение груза является апериодическим. При $t \to \infty$ выражение (3) оказывается неопределенностью типа $0 \cdot \infty$. Для раскрытия неопределенности применяем правило Лопиталя, предварительно представив (3) в виде

$$x = \frac{x_0(1 + nt)}{e^{nt}}.$$

Тогда

$$\lim_{t \to \infty} x = \lim_{t \to \infty} \frac{x_0(1 + nt)}{e^{nt}} = \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{d}{dt}[x_0(1 + nt)]}{\frac{d}{dt}(e^{nt})} = \lim_{t \to \infty} \frac{nx_0}{ne^{nt}} = 0;$$

таким образом, при $t \to \infty$ $x \to 0$. Итак, груз, согласно уравнению (3), совершает апериодическое затухающее движение. Подставив числовые значения: $n = 10$ рад/с, $x_0 = 4$ см, получим уравнение движения груза

$$x = 4e^{-10t}(1 + 10t) \text{ см}. \tag{4}$$

Выясним теперь, переходит ли груз через положение статического равновесия. Для этого приравняем x в уравнении (4) нулю и определим

соответствующие значения времени, т.е.

$$4e^{-10t}(1+10t)=0, \text{ откуда } 1+10t_1=0, \; e^{-10t_2}=0.$$

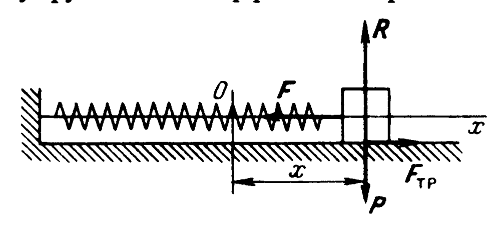
Находим: $t_1=-0{,}1$ с, $t_2\to\infty$.

Отрицательное значение t_1 указывает на то, что груз не переходит через положение статического равновесия при значениях $t>0$. Значение $t_2\to\infty$ соответствует затуханию движения.

Таким образом, картина движения существенно отличается от рассмотренной в предыдущей задаче – при данных начальных условиях движения груз асимптотически приближается к положению статического равновесия, ни разу не переходя через него. Кроме того, благодаря равенству нулю скорости груза в начальный момент времени, касательная к кривой $x=x(t)$ в точке $t=0$ параллельна оси t.

В задачах 8.32–8.34 мы рассмотрели свободные колебания материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости. В следующей задаче рассматриваются свободные колебания материальной точки при наличии силы сухого трения. Ее решение представляет бóльшие трудности по сравнению с решениями предыдущих задач.

Задача 8.35. Груз массой m, прикрепленный к концу пружины, движется по негладкой горизонтальной плоскости под действием силы упругости $\boldsymbol{F}$, проекция которой на ось x (рис. а) равна $F_x=-cx$, где c – постоянный коэффициент упругости. Коэффициент трения скольжения груза о



К задаче 8.35а

плоскость как при покое, так и при движении равен f. В начальный момент груз был отклонен от положения статического равновесия вправо на b_0 и отпущен без начальной скорости.

Написать уравнение движения груза и определить закон убывания его наибольших отклонений.

Решение. Движение груза невозможно описать одним дифференциальным уравнением. Действительно, при движении груза налево сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$ направлена направо (рис. а), т.е. $F_{тр\,x}=F_{тр}=fmg$. При движении же груза направо сила трения направлена налево и, значит, $F_{тр\,x}=-F_{тр}=-fmg$. Поэтому в правую часть дифференциального уравнения движения груза попеременно будет входить слагаемое fmg либо $-fmg$.

Последовательно составим и проинтегрируем дифференциальные уравнения движения груза: 1) справа налево и затем 2) слева направо. При этом конечные значения x и $\dot{x}$ при движении груза справа налево одновременно являются начальными условиями последующего движения слева направо.

На рис. а груз изображен в текущем положении, отклоненном от нуля, т.е. от его положения статического равновесия, направо на x. К грузу приложены активные силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ – сила тяжести груза, $\boldsymbol{F}$ – сила упругости пружины, а также две составляющие реакции негладкой горизонтальной плоскости: $\boldsymbol{R}$ -- нормальная составляющая, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ – касательная составляющая, т.е. сила трения скольжения.

Запишем дифференциальные уравнения движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P_x + R_x + F_x + F_{\text{тр}\,x}. \qquad (1)$$

Силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ перпендикулярны к оси x. Поэтому $P_x = R_x = 0$. Проекция силы упругости $\boldsymbol{F}$ равна $F_x = -cx$. При движении налево сила трения направлена направо, значит, $F_{\text{тр}\,x} = F_{\text{тр}} = fmg$. Приняв во внимание эти значения проекций сил, запишем уравнение (1) в виде

$$m\ddot{x} = -cx + fmg, \qquad (2)$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = fg, \qquad (3)$$

где обозначено $k^2 = c/m$ (напомним, что k – круговая частота свободных колебаний груза при отсутствии силы трения).

Общее решение x неоднородного дифференциального уравнения (3) равно сумме общего решения x_1 соответствующего однородного уравнения и частного решения x_2 данного уравнения (3), т.е.

$$x = x_1 + x_2. \qquad (4)$$

Правая часть уравнения (3) постоянна. Поэтому ищем частное решение x_2 в виде постоянного: $x_2 = A$. Подставив это значение x_2, а также $\ddot{x}_2 = 0$ в уравнение (3) и решив его относительно A, получим $A = fg/k^2$, т.е.

$$x_2 = \frac{fg}{k^2}. \qquad (5)$$

Характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$ имеет вид $r^2 + k^2 = 0$. Его корни равны $r_{1,2} = \pm ki$, значит, x_1 равно

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (6)$$

Использовав результаты (5) и (6) в формуле (4), мы получим общее решение неоднородного дифференциального уравнения (3):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{fg}{k^2}. \tag{7}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим производную x по t:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{8}$$

По условию, груз в начальный момент находился в покое, в положении, отклоненном от нуля направо на b_0. Значит, начальные условия движения имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x = b_0, \quad \dot{x} = 0. \tag{9}$$

Подставим начальные условия (9): $t = 0$, $x = b_0$ – в уравнение (7) и $t = 0, \dot{x} = 0$ – в уравнение (8). Получим систему

$$b_0 = C_1 + \frac{fg}{k^2}, \quad 0 = C_2 k,$$

откуда $C_1 = b_0 - fg/k^2, C_2 = 0$. Теперь уравнения (7) и (8) принимают вид

$$x = \left(b_0 - \frac{fg}{k^2}\right)\cos kt + \frac{fg}{k^2}, \quad \dot{x} = -k\left(b_0 - \frac{fg}{k^2}\right)\sin kt. \tag{10}$$

Первое уравнение (10) описывает движение груза справа налево. В крайнем левом положении его скорость обращается в нуль. Подставив во второе уравнение (10): $\dot{x} = 0$, $t = \tau_1$, мы найдем продолжительность τ_1 движения груза из крайнего правого в крайнее левое положение:

$$\tau_1 = \frac{\pi}{k}. \tag{11}$$

Определим наибольшее отклонение x_1 груза налево, подставив в первое уравнение (10) $\tau_1 = \pi/k, x = x_1$. Получим

$$x_1 = -b_0 + \frac{2fg}{k^2}. \tag{12}$$

Абсолютная величина x_1 равна

$$b_1 = |x_1| = b_0 - \frac{2fg}{k^2}. \tag{13}$$

Из формулы (13) вычислим разность $\Delta b_{0,1}$ абсолютных величин наиболь-

ших отклонений b_0 и b_1. Получим

$$\Delta b_{0,1} = b_0 - b_1 = \frac{2fg}{k^2}. \qquad (14)$$

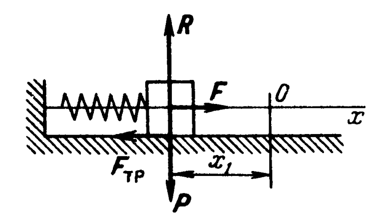
В крайнем левом положении M_1 к грузу приложены силы: $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$. Сила упругости $\boldsymbol{F}$, направленная слева направо, по модулю равна

$$F = c\,|x_1|. \qquad (15)$$

Сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ теперь направлена налево (рис. б). Если в этом положении модуль наибольшей силы трения больше или равен модулю силы упругости (15), т.е.

$$fmg \geqslant c\,|x_1|, \qquad (16)$$

то груз останется в покое и его движение прекратится. Допустим, что условие (16) не выполнено, т.е. $fmg < c|x_1|$. Тогда начнется движение груза



К задаче 8.35б

направо. При этом $F_{\text{тр}\,x} = -F_{\text{тр}} = -fmg$ и, значит, дифференциальное уравнение (2) примет вид $m\ddot{x} = -cx - fmg$, откуда

$$\ddot{x} + k^2 x = -fg, \qquad (17)$$

где $k^2 = c/m$.

Дифференциальные уравнения (3) и (17) отличаются только знаком правой части. Поэтому частное решение x_2 уравнения (17) можно сразу записать, изменив в формуле (5) знак, т.е. $x_2 = -fg/k^2$. Общее решение (7) запишется в виде

$$x = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - \frac{fg}{k^2}, \qquad (18)$$

откуда имеем

$$\dot{x} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt. \qquad (19)$$

Для упрощения вычислений будем теперь отсчитывать время с момента выхода груза из крайнего левого положения. Начальные условия движения груза слева направо одновременно являются конечными условиями

его движения справа налево, поэтому имеем

$$\text{при } t=0 \quad x=x_1, \quad \dot{x}=0. \tag{20}$$

Подставим начальные условия (20): $t = 0, x = x_1$ — в уравнение (18), а $t = 0, \dot{x} = 0$ — в уравнение (19). Получим систему: $x_1 = C_3 - fg/k^2$, $0 = C_4 k$, откуда $C_3 = x_1 + fg/k^2$, $C_4 = 0$. Теперь уравнения (18) и (19) примут вид

$$x=\left(x_1+\frac{fg}{k^2}\right)\cos kt-\frac{fg}{k^2}, \quad \dot{x}=-k\left(x_1+\frac{fg}{k^2}\right)\sin kt. \tag{21}$$

Первое уравнение (21) является уравнением движения груза слева направо. Движение закончится в момент $t = \tau_2$, когда скорость груза обратится в нуль. Поэтому, подставив во второе уравнение (21): $t = \tau_2, \dot{x} = 0$, получим

$$\tau_2=\frac{\pi}{k}. \tag{22}$$

Сопоставив формулы (22) и (11), мы видим, что продолжительность движения груза из одного крайнего положения в другое постоянна ($\tau_1 = \tau_2 = \pi/k$). Она не зависит от направления движения и начальных условий движения груза. Груз вернется в крайнее правое положение через промежуток времени

$$T=\tau_1+\tau_2=\frac{2\pi}{k}. \tag{23}$$

Как известно, по формуле (23) определяется период свободных колебаний груза при отсутствии силы трения. Значит, сила трения скольжения на период свободных колебаний не влияет (конечно, при наличии силы трения периодичность движения отсутствует и величина T названа периодом колебаний условно).

Для определения наибольшего отклонения b_2 груза направо, подставим в первое уравнение (21): $t = \tau_2, x = b_2$.

При этом получим

$$b_2=-x_1-\frac{2fg}{k^2}. \tag{24}$$

Использовав в выражении (24) формулу (12), находим

$$b_2=b_1-\frac{2fg}{k^2}=b_0-\frac{4fg}{k^2}. \tag{25}$$

Воспользовавшись формулами (25) и (13), вычислим разность $\Delta b_{1,2}$ абсолютных величин наибольших отклонений b_1 и b_2:

$$\Delta b_{1,2}=\frac{2fg}{k^2}. \tag{26}$$

Сопоставив формулы (14) и (26), мы видим, что разности абсолютных величин наибольших отклонений равны между собой: $\Delta b_{0,1} = \Delta b_{1,2} = 2fg/k^2$. Значит, абсолютные величины наибольших последовательных отклонений убывают по закону арифметической прогрессии с разностью, равной $2fg/k^2$ (напомним, что при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, абсолютные величины последовательных наибольших отклонений убывают по закону геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{-nT_c/2}$, т.е. колебания затухают значительно быстрее).

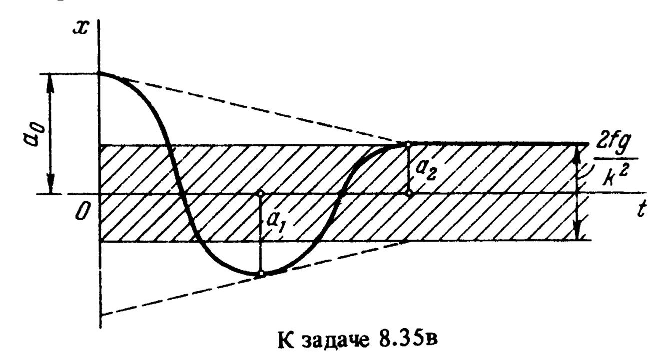
Груз останется в крайнем правом положении в покое, если, по аналогии с формулой (16), будет удовлетворено неравенство

$$fmg \geqslant cb_2. \tag{27}$$

Если же $fmg < cb_2$, то груз вновь начнет двигаться налево. Затухающие колебания груза будут продолжаться до некоторого i-го наибольшего отклонения x_i, при котором будет выполнено неравенство

$$fmg \geqslant c\,|x_i|, \tag{28}$$

т.е. модуль наибольшей силы трения окажется больше или равным модулю силы упругости пружины.



К задаче 8.35в

Как следует из формулы (28), абсолютная величина i-го последнего наибольшего отклонения определится неравенством $|x_i| \leqslant fmg/c$, т.е.

$$|x_i| \leqslant \frac{fg}{k^2}. \tag{29}$$

На рис. в построен график движения точки. Проведем прямые, соответствующие уравнениям: $x = fg/k^2$ и $x = -fg/k^2$. Область, заключенная между этими прямыми — горизонтальная полоса шириной $2fg/k^2$, называется *зоной застоя*. Если наибольшее отклонение точки окажется внутри или на границе зоны застоя, то, в соответствии с формулой (29), движение прекратится.

В заключение приведем числовой пример. Даны: масса груза m = = 10,2 кг, коэффициент упругости пружины c = 10 Н/см, коэффициент трения скольжения f = 0,1. В начальный момент груз был отклонен из положения равновесия на 7 см направо и отпущен без начальной скорости. Определить период колебаний, а также величины наибольших отклонений груза до момента остановки.

Круговая частота колебаний равна

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{10{,}2}} = 9{,}9 \text{ рад/с}.$$

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 0{,}64 \text{ с}.$$

Согласно формуле (29) движение прекратится при $|x_i| \leqslant \frac{fg}{k^2}$, т.е. при $|x_i| \leqslant \frac{0{,}1 \cdot 980}{98}$ см. Итак, условие остановки груза определяется неравенством

$$|x_i| \leqslant 1 \text{ см}.$$

Абсолютные величины наибольших отклонений убывают по закону арифметической прогрессии с разностью:

$$r = \frac{2fg}{k^2} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 980}{98} = 2 \text{ см}.$$

В начальный момент, по условию, b_0 = 7 см. Через полпериода, т.е. в момент t = 0,32 с, груз получит наибольшее отклонение влево, равное по абсолютной величине $b_1 = b_0 - r$ = 5 см. Так как $b_1 > 1$ см, то движение будет продолжаться. Через полпериода, т.е. в момент t = 0,64 с груз окажется в крайнем правом положении, причем $b_2 = b_1 - r$ = 3 см. В данном случае также $b_2 > 1$ см и груз начнет двигаться влево, через 0,32 с, т.е. в момент t = 0,96 с груз будет занимать крайнее левое положение с абсолютной величиной наибольшего отклонения $b_3 = b_2 - r$ = 1 см. При этом b_3 удовлетворяет неравенству $b_3 \leqslant 1$ см. Значит, груз оказывается на границе зоны застоя и его движение прекратится.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 32.1, 32.4, 32.6, 32.7, 32.10, 32.11, 32.24, 32.26, 32.28, 32.53, 32.54, 32.57, 32.64, 32.67, 32.68.

4. Вынужденные колебания материальной точки. Влияние силы сопротивления, пропорциональной скорости, на вынужденные колебания ма-

териальной точки. В теории колебаний *возмущающей* называется сила, приложенная к материальной точке и заданная как функция времени. Эта сила большей частью является непрерывной функцией времени. В машинных агрегатах и механизмах возмущающая сила возникает в результате неуравновешенности вращающихся частей машин (турбинных дисков, роторов электромоторов, маховиков) либо при наличии периодически изменяющейся силы давления воды, газа или пара в цилиндрах двигателей и т.д.

Простейшей является возмущающая сила S, изменяющаяся по гармоническому закону: $S = H\sin(pt + \delta)$, где H – наибольшая величина возмущающей силы (амплитуда силы), p – круговая частота изменения возмущающей силы, δ – начальная фаза.

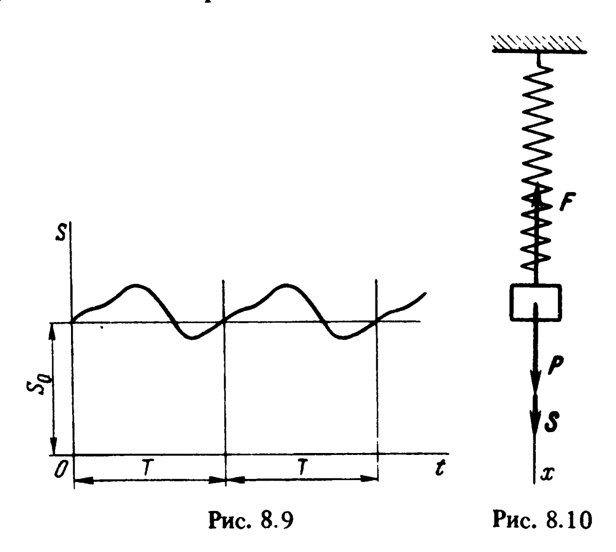


Рис. 8.9 Рис. 8.10

Если возмущающая сила $S(t)$ является периодической функцией времени (рис. 8.9) с периодом $T = 2\pi/p$, т.е. $S(t + T) = S(t)$, и удовлетворяет условиям Дирихле (наличие на протяжении одного периода конечного числа максимумов и минимумов и конечного числа точек разрыва первого рода), то эту функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos ipt + B_i \sin ipt),$$

где $p = 2\pi/T$,

$$A_i = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos ipt\,dt, \qquad B_i = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin ipt\,dt; \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Вынужденные колебания материальной точки вызываются действием системы сил, в составе которой имеются восстанавливающая сила $\boldsymbol{F}$ и возмущающая сила $\boldsymbol{S}$. На рис. 8.10 ось x направлена вдоль линии действия сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{S}$. Начало отсчета взято в положении статического равновесия материальной точки. Сила $\boldsymbol{S}$ условно направлена вниз, однако, как следует из закона ее изменения, ее направление является переменным.

Если возмущающая сила изменяется по гармоническому закону $S = H\sin(pt + \delta)$, то дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin (pt + \delta), \qquad (13^*)$$

где

$$k^2 = c/m, \quad h = H/m.$$

Закон движения материальной точки в случае $p \neq k$ дается формулой $x = x_1 + x_2$ (x_1 – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, x_2 – частное решение неоднородного уравнения), где

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta),$$

значит,

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

При начальных условиях движения материальной точки, т.е. при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, постоянные интегрирования выражаются формулами:

$$C_1 = x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin\delta, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{ph}{k(k^2 - p^2)} \cos\delta.$$

Окончательное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - p^2}\left(\sin\delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos\delta \sin kt\right) + \\ + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \qquad (14^*)$$

Последний член правой части уравнения движения $\dfrac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$ определяет вынужденные колебания, первые два слагаемых, $x_0 \cos kt$ и $\dfrac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$, определяют свободные колебания, которые совершала бы ма-

териальная точка при отсутствии возмущающей силы, а слагаемое

$$-\frac{h}{k^2-p^2}\left(\sin\delta\cos kt+\frac{p}{k}\cos\delta\sin kt\right)$$

– колебания материальной точки, имеющие частоту свободных и вызванные возмущающей силой S.

Вынужденные колебания материальной точки: $x_2=\dfrac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\delta)$ имеют круговую частоту p, равную круговой частоте p изменения возмущающей силы (т.е. период вынужденных колебаний x_2, вызванных возмущающей силой S, равен периоду этой силы).

Амплитуда вынужденных колебаний A, т.е. величина наибольшего динамического смещения материальной точки, равна $A=h/|k^2-p^2|$.

Статическое смещение материальной точки под действием постоянной силы H равно $\Delta_H=H/c$.

Коэффициентом динамичности λ называется отношение амплитуды A вынужденных колебаний к статическому смещению Δ_H, т.е. $\lambda=A/\Delta_H$. Коэффициент динамичности λ определяет, во сколько раз наибольшее динамическое смещение материальной точки, вызываемое переменной возмущающей силой $S=H\sin(pt+\delta)$, больше статического смещения Δ_H, происходящего под действием постоянной силы, равной по величине амплитуде возмущающей силы.

Коэффициентом расстройки z называется отношение круговой частоты p вынужденных колебаний материальной точки к круговой частоте k ее собственных колебаний, т.е. $z=p/k$.

Коэффициент динамичности λ связан с коэффициентом расстройки z зависимостью $\lambda=1/|1-z^2|$. График этой функции изображен на рис. 8.11. Рассмотрим его подробнее:

1. В случае $0<z<1$, т.е. при $p<k$, происходят вынужденные колебания малой частоты. При этом коэффициент динамичности λ растет от единицы до бесконечности.

2. При $z\to 1$, т.е. при $p\to k$, $\lambda\to\infty$. При $p=k$, т.е. при равенстве круговых частот свободных и вынужденных колебаний, имеет место явление, называемое *резонансом*. При резонансе переменная амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает (в реальных условиях при учете сил сопротивления движению амплитуда является конечной).

3. В случае $z>1$, т.е. при $p>k$, происходят вынужденные колебания большой частоты. При $z\to\infty$ коэффициент динамичности λ убывает до нуля.

В случае *резонанса* (при $p=k$) частное решение x_2 неоднородного уравнения $\ddot{x}+k^2x=h\sin(pt+\delta)$ имеет вид $-\dfrac{h}{2k}t\cos(kt+\delta)$. При резо-

нансе переменная амплитуда вынужденных колебаний $A = \frac{h}{2k}t$ растет прямо пропорционально времени (рис. 8.12).

Уравнение движения материальной точки в случае резонанса, т.е. при $p = k$, имеет вид

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt + \frac{h}{2k^2}\cos\delta \sin kt - \frac{h}{2k}t\cos(kt+\delta). \qquad (15^*)$$

Последнее слагаемое справа $-\frac{h}{2k}t\cos(kt+\delta)$ определяет вынужденные колебания, первые два слагаемых, $x_0\cos kt$ и $\frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt$, соответствуют

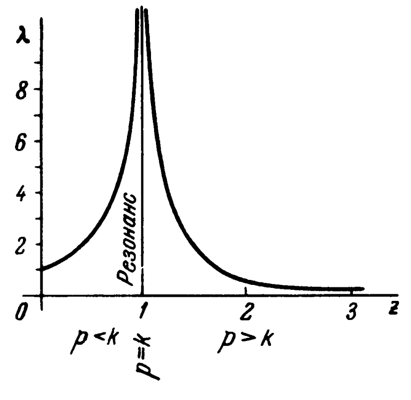


Рис. 8.11

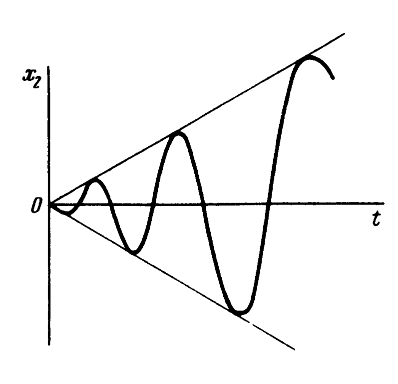


Рис. 8.12

свободным колебаниям, которые имели бы место при отсутствии возмущающей силы, слагаемое $\frac{h}{2k^2}\cos\delta\sin kt$ определяет колебания, вызванные возмущающей силой, имеющие круговую частоту свободных колебаний.

Сдвиг между фазами возмущающей силы и вынужденных колебаний материальной точки (рис. 8.13).

1. В случае вынужденных колебаний малой частоты, т.е. при $p < k$, сдвиг ϵ между фазами возмущающей силы S и вызванными ею вынужденными колебаниями x_2 равен нулю. (Возмущающая сила и вынужденные колебания одновременно достигают наибольших, наименьших значений и обращаются в нуль.)

2. В случае резонанса, т.е. при $p = k$, сдвиг ϵ между фазами возмущающей силы S и вынужденных колебаний x_2 равен $\pi/2$ (вынужденные колебания, вызванные возмущающей силой, отстают по фазе от этой силы на $\pi/2$).

3. В случае вынужденных колебаний большой частоты, т.е. при $p > k$, сдвиг ϵ между фазами возмущающей силы S и вынужденных колебаний x_2 равен π (вынужденные колебания отстают по фазе от соответствующей возмущающей силы на π).

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила $S(t)$ является периодической функцией времени периода T. Разложим ее в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cos ipt + B_i \sin ipt),$$

где

$$p = \frac{2\pi}{T}, \quad A_i = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos ipt\, dt,$$

$$B_i = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin ipt\, dt;$$

здесь $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Рис. 8.13

Тогда дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{1}{2}\frac{A_0}{m} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cos ipt + B_i \sin ipt).$$

Уравнение движения материальной точки при $p \neq k$ будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, x_2 – частное решение неоднородного уравнения:

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\cos ipt + \frac{B_i}{k^2 - i^2p^2}\sin ipt\right).$$

При начальных условиях вида: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ постоянные интегрирования имеют значения:

$$C_1 = x_0 - \left(\frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\right),$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{1}{m}\frac{p}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{iB_i}{k^2 - i^2p^2}.$$

Окончательно уравнение движения материальной точки запишется в форме

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\right)\cos kt - \left(\frac{1}{m}\frac{p}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{iB_i}{k^2 - i^2p^2}\right)\sin kt +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\cos ipt + \frac{B_i}{k^2 - i^2p^2}\sin ipt\right).$$

Здесь $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\cos ipt + \frac{B_i}{k^2 - i^2p^2}\sin ipt\right)$ – вынужденные колебания материальной точки; $x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt$ – свободные колебания материальной точки, которые имели бы место в случае отсутствия возмущающей силы;

$$-\left(\frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\right)\cos kt - \left(\frac{1}{m}\frac{p}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{iB_i}{k^2 - i^2p^2}\right)\sin kt$$

– колебания материальной точки, вызванные возмущающей силой и имеющие круговую частоту свободных колебаний.

При $k = ip$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$, наступают резонансные колебания i-го порядка, т.е.

при $k = p$ – резонансные колебания первого порядка,

при $k = 2p$ – резонансные колебания второго порядка и т.д.

При одинаковом порядке коэффициентов A_i и B_i по мере повышения порядка резонансных колебаний амплитуды их убывают. Поэтому в таких случаях наиболее опасными являются резонансные колебания низших порядков.

Если возмущающая сила задана тригонометрическим полиномом, т.е. рядом Фурье, у которого все члены, начиная с $(n + 1)$-го, равны нулю, то число резонансных колебаний равно n.

В заключение заметим, что если возмущающая сила изменяется по произвольному закону $S = f(t)$, где $f(t)$ – однозначная, непрерывная, дифференцируемая функция, то, применив метод вариации произвольных постоянных, можно найти закон движения в виде

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt + \frac{1}{km}\int_0^t f(\tau)\sin k(t - \tau)\,d\tau, \tag{16*}$$

где x_0 и $\dot{x}_0$ – начальные условия движения, m – масса, k – круговая частота свободных колебаний. Первые два слагаемых формулы (16*) $x_0 \cos kt$ и $\frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$ определяют свободные колебания груза, которые он совершал бы при отсутствии возмущающей силы $S = f(t)$. Последнее слагаемое уравнения (16*)

$$\frac{1}{km} \int_0^t f(\tau) \sin k(t-\tau) d\tau$$

описывает движение груза, вызванное возмущающей силой $S = f(t)$.

Уравнением (16*) можно широко пользоваться при решении задач динамики на вынужденные колебания материальной точки при произвольном законе изменения возмущающей силы $S = f(t)$. Этим уравнением весьма целесообразно пользоваться в тех случаях, когда трудно подобрать частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{1}{m} f(t).$$

Полезно отметить, что последнее слагаемое формулы (16*) определяет решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$x = \frac{1}{km} \int_0^t f(\tau) \sin k(t-\tau) d\tau. \qquad (17^*)$$

Влияние силы сопротивления, пропорциональной скорости, на вынужденные колебания материальной точки.

Пусть материальная точка массы m совершает колебания под действием восстанавливающей силы F, возмущающей силы S и силы сопротивления движению, пропорциональной скорости точки, $R = -\beta \mathbf{v}$, где β – постоянный коэффициент. Ось x направлена вдоль линии действия сил F и S (рис. 8.14). Начало отсчета взято в положении статического равновесия материальной точки. Возмущающая сила изменяется по гармоническому закону $S = H \sin(pt + \delta)$.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta),$$

где

$$2n = \frac{\beta}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}.$$

Тогда уравнение движения материальной точки будет: $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения; x_2 – частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Решение x_1 в зависимости от соотношений $n < k, n > k, n = k$ получается в одном из рассмотренных выше видов (см. стр. 66–68).

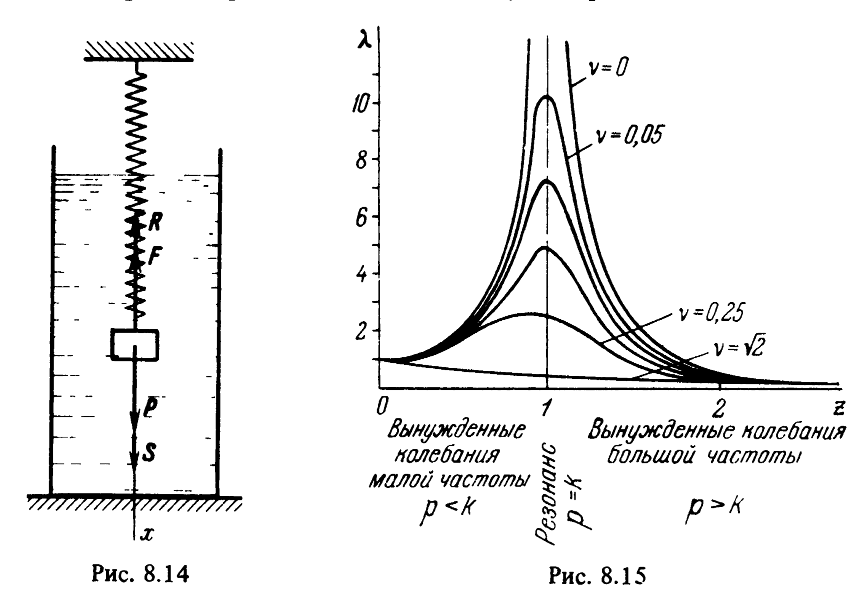


Рис. 8.14 Рис. 8.15

Частное решение x_2, определяющее вынужденные колебания, равно

$$x_2 = b\sin(pt + \delta - \epsilon), \tag{18*}$$

где

$$b = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \quad \epsilon = \operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2 - p^2}. \tag{19*}$$

Введя для сокращения записи обозначение

$$A(t) = b\sin(pt + \delta - \epsilon), \tag{20*}$$

получим уравнение движения материальной точки в следующем окончательном виде:

$$x = \begin{cases} e^{-nt}(C_1\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t) + A(t) & \text{при } n < k; \\ e^{-nt}(C_1 + C_2t) + A(t) & \text{при } n = k; \\ e^{-nt}(C_1e^{\sqrt{n^2 - k^2}\,t} + C_2e^{-\sqrt{n^2 - k^2}\,t}) + A(t) & \text{при } n > k. \end{cases} \tag{21*}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются по заданным начальным условиям движения: при $t = 0$ $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$.

Так как во всех трех случаях ($n < k, n = k$ и $n > k$) в выражение x_1 входит e^{-nt}, то движения x_1 быстро затухают, в то время как амплитуда вынужденных колебаний $b = \dfrac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$, круговая частота вынужденных колебаний p и сдвиг между фазами $\epsilon = \operatorname{arctg}\dfrac{2np}{k^2 - p^2}$ от времени не зависят. Круговая частота p вынужденных колебаний x_2 равна круговой частоте p возмущающей силы S. Это означает, что сила сопротивления движению, пропорциональная первой степени скорости, не влияет на величину круговой частоты вынужденных колебаний материальной точки.

При резонансе ($p = k$) переменная амплитуда b вынужденных колебаний в случае отсутствия силы сопротивления неограниченно возрастала по закону: $b = \dfrac{h}{2k}t$. При наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, амплитуда b постоянна и равна

$$b_{\text{рез}} = \frac{h}{2nk}.$$

Зависимость коэффициента динамичности λ от коэффициента расстройки z имеет вид (рис. 8.15)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\nu^2 z^2}}, \quad \text{где } \nu = \frac{n}{k}.$$

Каждая из кривых, изображенных на рис. 8.15, соответствует определенному значению ν. С увеличением ν, т.е. с увеличением силы сопротивления, коэффициент динамичности λ и, следовательно, амплитуда вынужденных колебаний уменьшаются. В зоне вынужденных колебаний большой частоты, далеко за резонансом (например, при $z > 3$), все кривые, независимо от величины ν, почти сливаются. Следовательно, в этой зоне при вычислении амплитуды вынужденных колебаний силой сопротивления можно пренебречь.

Максимум коэффициента динамичности λ имеет место не при резонансе; он несколько смещен в зону $z < 1$:

$$z_{\max} = \sqrt{1 - 2\nu^2}.$$

При этом

$$\lambda_{max} = \frac{1}{2\nu\sqrt{1-\nu^2}}.$$

При $\nu \geqslant \sqrt{2}/2$ функция $\lambda = f(z)$ монотонно убывает.

Сдвиг между фазами $\epsilon = \operatorname{arctg}\frac{2\nu z}{1-z^2}$ возмущающей силы и вызванных ею вынужденных колебаний остается при резонансе неизменным: $\epsilon = \pi/2$. Сдвиг между фазами с возрастанием ν, т.е. силы сопротивления, увеличивается в зоне вынужденных колебаний малой частоты и убывает в зоне вынужденных колебаний большой частоты (рис. 8.16).

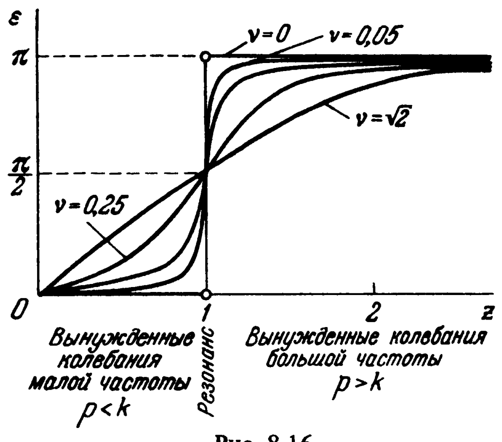


Рис. 8.16

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила $S(t)$ является периодической функцией времени периода T. Разложим ее в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cos ipt + B_i \sin ipt),$$

где

$$p = \frac{2\pi}{T},$$

$$A_i = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos ipt\,dt, \quad B_i = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin ipt\,dt;$$

здесь $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

В этом случае дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{1}{2}\frac{A_0}{m} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}(A_i\cos ipt + B_i\sin ipt).$$

Тогда уравнение движения материальной точки будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, x_2 – частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Колебания x_1 во всех трех случаях: $n < k$, $n = k$, $n > k$ затухают (см. стр. 66–68).

Вынужденные колебания, определяемые частным решением x_2, происходят по закону

$$x_2 = \frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i\cos ipt + b_i\sin ipt),$$

где

$$a_i = \frac{1}{m}\frac{A_i(k^2 - i^2p^2) - 2nipB_i}{(k^2 - i^2p^2)^2 + 4n^2i^2p^2}, \quad b_i = \frac{1}{m}\frac{B_i(k^2 - i^2p^2) + 2nipA_i}{(k^2 - i^2p^2)^2 + 4n^2i^2p^2}.$$

При $k = ip$ наступают резонансные колебания i-го порядка. При этом

$$a_i = -\frac{1}{m}\frac{B_i}{2inp}, \quad b_i = \frac{1}{m}\frac{A_i}{2inp}.$$

Указание. Решение задач на вынужденные колебания материальной точки рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выбрать систему отсчета, взяв начало отсчета в положении статического равновесия материальной точки;

2) записать начальные условия движения материальной точки;

3) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке;

4) составить дифференциальное уравнение движения в проекции на соответствующую ось;

5) проинтегрировать дифференциальное уравнение движения, использовав начальные условия для определения постоянных интегрирования.

Материальную точку следует всегда изображать в промежуточном положении, соответствующем ее положительной координате, и предположить, что точка движется в сторону возрастания координаты.

При составлении дифференциального уравнения движения следует воспользоваться условием статического равновесия материальной точки. Это часто приводит к уничтожению ряда постоянных слагаемых в правой части дифференциального уравнения движения. Если составленное диф-

ференциальное уравнение движения тождественно одному из выше записанных уравнений, то, не интегрируя это уравнение, можно сразу получить результат по указанным формулам.

Проводя решение задачи в общем виде, следует определить числовые значения коэффициентов дифференциального уравнения, так как вид частного решения уравнения зависит от соотношения между круговыми частотами вынужденных и свободных колебаний, т.е. между p и k.

Так, интегрируя дифференциальное уравнение движения $\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \delta)$, надо:

а) при отсутствии резонанса, т.е. при $p \neq k$, записать частное решение x_2 в виде $x_2 = A\sin(pt+\delta) + B\cos(pt+\delta)$ (очевидно, что $B = 0$);

б) при наличии резонанса, т.е. при $p = k$, искать частное решение x_2 в виде $x_2 = At\sin(pt+\delta) + Bt\cos(pt+\delta)$.

Интегрируя дифференциальное уравнение движения $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \delta)$, независимо от соотношения между p и k надо искать частное решение x_2 в виде

$$x_2 = A\sin(pt+\delta) + B\cos(pt+\delta).$$

При решении задач, в которых требуется определить условие, обеспечивающее попадание материальной точки в резонанс, не следует интегрировать дифференциальное уравнение движения. Для этого достаточно, воспользовавшись составленным дифференциальным уравнением движения, определить круговые частоты свободных и вынужденных колебаний и приравнять их друг другу.

Задача 8.36. Вынужденные колебания материальной точки описываются дифференциальным уравнением:

а) $\ddot{x} + 64x = 2\sin 7t$, б) $\ddot{x} + 100x = 14\sin 12t$,

в) $\ddot{x} + 36x = 10\sin 6t$.

Не интегрируя уравнения, выяснить, происходят ли колебания в зоне до резонанса $(p < k)$, за резонансом $(p > k)$ или в режиме резонанса $(p = k)$.

Решение. Напомним, что дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt,$$

где k – круговая частота свободных, а p – вынужденных колебаний.

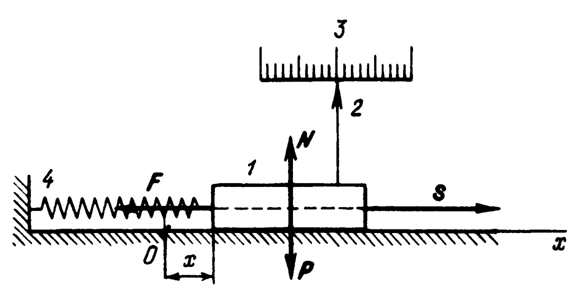
а) Из уравнения $\ddot{x} + 64x = 2\sin 7t$ следует: $k^2 = 64$ рад^2/с^2, т.е. $k = 8$ рад/с, а $p = 7$ рад/с. В данном случае при $p < k$ (коэффициент расстройки $z = p/k = 7/8$) происходят вынужденные колебания малой частоты (до резонанса).

б) Из уравнения $\ddot{x} + 100x = 14\sin 12t$ имеем: $k^2 = 100$ рад^2/с^2, т.е. $k = 10$ рад/с, а $p = 12$ рад/с. В этом случае при $p > k$ (коэффициент расстройки $z = p/k = 6/5$) имеют место вынужденные колебания большой частоты (за резонансом).

в) Из уравнения $\ddot{x} + 36x = 10\sin 6t$ найдем $k^2 = 36$ рад^2/с^2, т.е. $k = 6$ рад/с и $p = 6$ рад/с. Здесь происходят вынужденные колебания в режиме резонанса $p = k = 6$ рад/с (коэффициент расстройки $z = p/k = 1$).

Рекомендуем читателю вновь посмотреть на рис. 8.15 на стр. 104, где показаны все зоны вынужденных колебаний.

Задача 8.37. На рисунке изображена схема прибора для измерения давлений. К ползуну *1* массой $m = 20$ кг прикреплена стрелка *2*, отмечающая



К задаче 8.37

показания на неподвижной шкале *3*. Ползун *1*, прикрепленный к концу пружины *4*, перемещается по горизонтальной идеально гладкой поверхности. К ползуну приложена горизонтальная сила $S = H\sin pt$, где $H = 1{,}6$ кН, $p = 60$ рад/с. Коэффициент упругости пружины равен $c = 2$ кН/см. В начальный момент ползун находился в покое в положении статического равновесия.

Определить: уравнение движения стрелки *2* в случае отсутствия силы сопротивления, коэффициент динамичности и коэффициент расстройки; уравнение движения стрелки *2* при наличии силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости ползуна: $R = \beta v$, где $\beta = 25{,}6$ Н · с/см.

Решение. Направим ось x параллельно оси пружины по горизонтали направо, взяв начало отсчета в положении ползуна, соответствующем недеформированной пружине.

Начальные условия движения ползуна имеют вид

при $t = 0$ $\quad x = 0, \quad \dot{x} = 0.$

Изобразим ползун смещенным из положения равновесия вправо на x. При этом пружина растянется на $\Delta = x$.

К ползуну приложены следующие силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ – сила тяжести ползуна, $\boldsymbol{N}$ – нормальная реакция горизонтальной плоскости, сила $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{F}$ – си-

ла упругости растянутой пружины, проекция которой на ось x равна $F_x = -cx$.

Составим дифференциальное уравнение движения ползуна в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = S_x + F_x,$$

или

$$\ddot{x} = \frac{H}{m}\sin pt - \frac{c}{m}x,$$

откуда

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt, \qquad (1)$$

где $k = \sqrt{c/m}$, $h = H/m$. В данном случае $k = 100$ рад/с, $h = 8000$ см/с^2.

Уравнение (1) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения равно сумме x_1 – общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0 \qquad (2)$$

и x_2 – частного решения уравнения (1), т.е.

$$x = x_1 + x_2. \qquad (3)$$

Составим характеристическое уравнение: $r^2 + k^2 = 0$, откуда $r_{1,2} = \pm ki$. Следовательно,

$$x_1 = C_1\cos kt + C_2\sin kt. \qquad (4)$$

Для определения вынужденных колебаний, т.е. частного решения x_2, следует предварительно выяснить соотношение между круговыми частотами свободных и вынужденных колебаний. Так как $k = 100$ рад/с, а $p = 60$ рад/с, то $p < k$, т.е. имеют место вынужденные колебания малой частоты. При этом частное решение x_2 надо искать в виде

$$x_2 = B_1\sin pt + B_2\cos pt, \qquad (5)$$

где B_1 и B_2 – коэффициенты, подлежащие определению. Подставив x_2 в дифференциальное уравнение (1) и приравняв коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения при соответствующих тригонометрических функциях, находим

$$B_1 = \frac{h}{k^2 - p^2}, \quad B_2 = 0.$$

Следовательно, частное решение, записанное в формуле (5), принимает вид

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{6}$$

Воспользовавшись формулами (4) и (6), запишем общее решение по формуле (3):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{7}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt. \tag{8}$$

Подставив в уравнение (7) $t = 0$, $x = 0$, а в уравнение (8) – $t = 0, \dot{x} = 0$, находим $C_1 = 0$, $C_2 = -\dfrac{p}{k}\dfrac{h}{k^2 - p^2}$.

Следует обратить внимание на ошибку, которую часто совершают при вычислении постоянных интегрирования C_1 и C_2, подставляя начальные условия движения в общее решение (4) однородного уравнения вместо того, чтобы подставить их в общее решение (7).

Итак, уравнение движения ползуна и, следовательно, стрелки *2* имеет вид

$$x = -\frac{p}{k}\frac{h}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{9}$$

Подставив числовые значения $p = 60$ рад/с, $k = 100$ рад/с, $h = 8000$ см/с^2, получаем

$$x = (-0{,}75 \sin 100t + 1{,}25 \sin 60t) \text{ см}. \tag{10}$$

Первое слагаемое соответствует колебаниям ползуна со стрелкой с частотой свободных колебаний, вызванным действием возмущающей силы S, второе слагаемое определяет вынужденные колебания.

Определив по формуле (10) отклонение стрелки, а следовательно, ползуна *1* и конца пружины *4*, можно найти силу упругости F, умножив смещение x на коэффициент упругости пружины c.

При наличии силы сопротивления движению, пропорциональной скорости ползуна, колебания с частотой свободных колебаний затухают и стрелка прибора регистрирует чисто вынужденные колебания $x_2 = \dfrac{h}{k^2 - p^2} \sin pt$. Данный прибор предназначен для определения силы

$S = H\sin pt$. Получив показание стрелки x_2 на шкале, т.е. смещение конца пружины, можно вычислить силу S_1, умножив x_2 на коэффициент упругости c пружины:

$$S_1 = cx_2 = \frac{hc}{k^2 - p^2}\sin pt.$$

Измеренная сила S_1 отличается от приложенной силы $S = H\sin pt$ только масштабом η, равным отношению их амплитуд

$$\eta = \frac{hc}{H(k^2 - p^2)}$$

или, учитывая, что $hc = \dfrac{H}{m}c = Hk^2$,

$$\eta = \frac{k^2}{k^2 - p^2}.$$

Масштаб η будет близок к единице при условии, что круговая частота k собственных колебаний будет значительно больше круговой частоты p возмущающей силы. Это имеет место, если $k \gg p$. Учитывая, что $k = \sqrt{c/m}$, приходим к выводу о необходимости установки пружины с большим коэффициентом жесткости c.

Для нахождения значения коэффициента динамичности λ воспользуемся формулой $\lambda = A/\Delta_H$. Так как $A = 1{,}25$ см и $\Delta_H = H/c = 1{,}6/2 = 0{,}8$ см, то $\lambda = 1{,}56$. Это означает, что амплитуда вынужденных колебаний более чем в полтора раза превышает статическое смещение. Соответствующее значение коэффициента расстройки z будет $z = p/k = 60/100 = 0{,}6$.

Решим эту задачу с учетом силы сопротивления движению $R = \beta v$, где $\beta = 25{,}6$ Н · с/см, v – скорость ползуна *1*. К силам, ранее приложенным к ползуну, добавляется сила сопротивления движению R, направленная в сторону, противоположную скорости движения. Считая, что ползун *1* движется в сторону возрастания абсциссы x, направляем силу R по горизонтали налево. Следовательно,

$$m\ddot{x} = S_x + F_x + R_x$$

или

$$\ddot{x} = \frac{H}{m}\sin pt - \frac{c}{m}x - \frac{\beta}{m}\dot{x},$$

откуда

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin pt, \qquad (11)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = 100 \text{ рад/с}, \quad n = \frac{\beta}{2m} = 64 \text{ рад/с},$$

$$h = H = 8000 \text{ см/с}^2, \quad p = 60 \text{ рад/с}.$$

Итак, $n < k$ и $p < k$.

Воспользовавшись формулами (9*), (18*)–(20*), данными в обзоре теории на стр. 66, 104, имеем

$$\sqrt{k^2 - n^2} = 76{,}8 \text{ рад/с}, \quad A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = 0{,}8 \text{ см},$$

$$\epsilon = \operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2 - p^2} = 0{,}87 \text{ рад}.$$

Поэтому

$$x = e^{-64t}(C_1 \cos 76{,}8t + C_2 \sin 76{,}8t) + 0{,}8 \sin(60t - 0{,}87). \qquad (12)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим производную x по времени:

$$\dot{x} = -64e^{-64t}(C_1 \cos 76{,}8t + C_2 \sin 76{,}8t) +$$
$$+ 76{,}8e^{-64t}(-C_1 \sin 76{,}8t + C_2 \cos 76{,}8t) + 48 \cos(60t - 0{,}87). \qquad (13)$$

Подставив в уравнение (12) $t = 0$, $x = 0$, а в уравнение (13) $t = 0$, $\dot{x} = 0$, получим систему уравнений

$$0 = C_1 - 0{,}8 \sin 0{,}87; \quad 0 = -64C_1 + 76{,}8C_2 + 48 \cos 0{,}87.$$

Решив эту систему, получим

$$C_1 = 0{,}8 \sin 0{,}87 = 0{,}62; \quad C_2 = 0{,}67 \sin 0{,}87 - 0{,}63 \cos 0{,}87 = 0{,}12.$$

Внеся эти значения в формулу (12), найдем

$$x = e^{-64t}(0{,}62 \cos 76{,}8t + 0{,}12 \sin 76{,}8t) + 0{,}8 \sin(60t - 0{,}87). \qquad (14)$$

Обозначив $0{,}62 = b \sin\alpha$; $0{,}12 = b \cos\alpha$, получим $b = 0{,}63$, $\alpha = 1{,}74$.

Следовательно, уравнение (14) движения ползуна *1* и стрелки *2* имеет вид

$$x = [0{,}63e^{-64t} \sin(76{,}8t + 1{,}74) + 0{,}8 \sin(60t - 0{,}87)] \text{ см}. \qquad (15)$$

Первое слагаемое уравнения (15) определяет колебания стрелки с частотой свободных колебаний, которые быстро затухают благодаря наличию множителя e^{-64t} Второе слагаемое уравнения (15) определяет вынужденные колебания стрелки *2*.

Вторые слагаемые уравнений (10) и (15) соответственно определяют вынужденные колебания стрелки *2* при отсутствии и при наличии силы сопротивления движению. Из сопоставления полученных результатов следует, что сила сопротивления движению на круговую частоту вынужденных колебаний не влияет. Как в формуле (10), так и в формуле (15) $p = 60$ рад/с, амплитуда вынужденных колебаний при наличии силы сопротивления стала меньше. Она уменьшилась от 1,25 до 0,8 см; сила сопротивления движению создала сдвиг между фазами возмущающей силы и вынужденных колебаний: вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на $\epsilon = 0{,}87$ рад.

Задача 8.38. Определить уравнение вынужденных колебаний стрелки прибора, описанного в предыдущей задаче, если возмущающая сила S изменяется согласно уравнению $S = H\sin pt$, где $H = 1{,}6$ кН, $p = 100$ рад/с. Решить задачу в двух вариантах: при отсутствии силы сопротивления движению; при наличии силы сопротивления движению $R = \beta v$, где $\beta = 25{,}6$ Н · с/см, v – скорость ползуна *1* со стрелкой *2*.

Решение. Воспользуемся дифференциальным уравнением (1) предыдущей задачи:

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt, \tag{1}$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{200\,000}{20}} = 100 \text{ рад/с}, \qquad p = 100 \text{ рад/с},$$

$$h = \frac{H}{m} = \frac{160\,000}{20} = 8000 \text{ см/с}^2.$$

Так как $p = k = 100$ рад/с, то имеет место явление резонанса.

В случае резонанса, когда $p = k$, частное решение дифференциального уравнения (1) надо искать в виде

$$x_2 = Ct\sin pt + Bt\cos pt. \tag{2}$$

Для определения коэффициентов C и B подставим x_2 в уравнение (1). Для этого вычислим:

$$\dot{x}_2 = C\sin pt + C\,pt\cos pt + B\cos pt - Bpt\sin pt,$$

$$\ddot{x}_2 = 2Cp\cos pt - Cp^2\sin pt - 2Bp\sin pt - Bp^2t\cos pt.$$

Приравняв коэффициенты в левой и правой частях уравнения (1) при синусе и косинусе и использовав равенство $p = k$, получим: $-2Bp = h$, $2Cp = 0$. Решив эту систему уравнений, имеем

$$C = 0, \quad B = -\frac{h}{2p}.$$

Теперь уравнение (2), определяющее вынужденные колебания стрелки 2, принимает вид

$$x_2 = -\frac{h}{2p} t \cos pt.$$

Подсчитав числовые значения и введя сдвиг между фазами, находим

$$x_2 = 40t \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ см}. \tag{3}$$

Переменная амплитуда вынужденных колебаний при резонансе $A = 40t$ см растет прямо пропорционально времени, что представляет угрозу сохранности прибора (так как в действительности имеется, хотя бы небольшая, сила сопротивления движению, то уравнение вынужденных колебаний оказывается иным -- см. ниже, второй вариант решения задачи).

Круговая частота вынужденных колебаний равна круговой частоте возмущающей силы: $p = 100$ рад/с. Вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на $\pi/2$.

Рассмотрим эту задачу в случае учета силы сопротивления движению $R = \beta v$, где $\beta = 25{,}6$ Н · с/см.

При этом можно воспользоваться дифференциальным уравнением (10) предыдущей задачи:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt, \tag{4}$$

где

$$p = k = 100 \text{ рад/с}, \quad n = \frac{\beta}{2m} = 64 \text{ рад/с}, \quad h = 8000 \text{ см/с}^2.$$

Для нахождения вынужденных колебаний стрелки прибора воспользуемся формулами (18*)–(20*), данными в обзоре теории на стр. 104. При резонансе, т.е. при $p = k$, имеем

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{h}{2np} = 0{,}625 \text{ см},$$

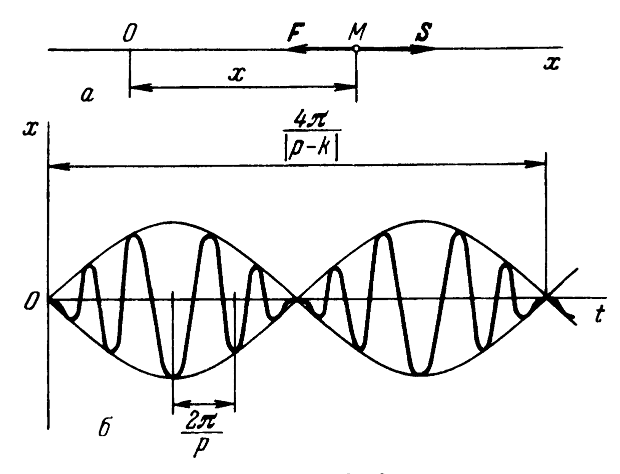
$$\epsilon = \operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2 - p^2} = \operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2},$$

поэтому искомое уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$x_2 = 0{,}625 \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ см}. \tag{5}$$

Из сопоставления формул (3) и (5) следует, что, в то время как при отсутствии силы сопротивления переменная амплитуда вынужденных колебаний стрелки B при резонансе росла прямо пропорционально времени: $A = 40t$ см, при наличии силы сопротивления движению $R = 25{,}6v$ Н, амплитуда оказывается величиной постоянной, равной 0,625 см. На круговую частоту вынужденных колебаний и сдвиг фаз сила сопротивления при резонансе не влияет.

Задача 8.39. Определить уравнение движения материальной точки M массой $m = 20$ кг, движущейся вдоль оси x под действием силы упругости $\boldsymbol{F}$ и возмущающей силы $\boldsymbol{S}$. Проекции этих сил на ось x равны: $F_x = -cx$, $S_x = H\sin pt$, где $c = 2$ кН/см, $H = 1{,}6$ кН, $p = 101$ рад/с. В начальный момент точка находилась в покое в начале отсчета на оси x. Силой сопротивления движению пренебречь.



К задаче 8.39

Решение. Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки M в проекции на ось x (рис. a):

$$m\ddot{x} = F_x + S_x.$$

Подставив данные значения F_x и S_x, получим

$$m\ddot{x} = -cx + H\sin pt,$$

т.е.

$$\ddot{x} + k^2x = h\sin pt, \qquad (1)$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{200\,000}{20} = 10\,000 \text{ рад}^2/\text{с}^2, \qquad p = 101 \text{ рад/с},$$

$$h = \frac{H}{m} = \frac{160\,000}{20} = 8000 \text{ см/с}^2.$$

Итак,

$$k = 100 \text{ рад/с}, \quad p = 101 \text{ рад/с}, \quad h = 8000 \text{ см/с}^2. \qquad (2)$$

В рассматриваемом случае колебания происходят вблизи резонанса (резонанс имеет место при $p = k$) в зоне вынужденных колебаний большой частоты ($p > k$).

Минуя интегрирование, воспользуемся уравнением (9) задачи 8.37:

$$x = -\frac{p}{k}\frac{h}{k^2 - p^2}\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt. \qquad (3)$$

Как следует из уравнения (3), искомое движение является результатом наложения двух гармонических колебаний, происходящих с почти равными круговыми частотами свободных k и вынужденных p колебаний. Так как $p \approx k$, то будем считать

$$\frac{p}{k} \approx 1, \quad p + k \approx 2k \approx 2p. \qquad (4)$$

Использовав первое соотношение (4) в уравнении (3), запишем

$$x \approx \frac{h}{(k-p)(k+p)}(\sin pt - \sin kt).$$

Приняв во внимание второе соотношение (4), находим

$$x = \frac{h}{2k(k-v)}(\sin pt - \sin kt). \qquad (5)$$

Преобразовав выражение, стоящее в скобках:

$$\sin pt - \sin kt = 2\sin\frac{p-k}{2}t\cos\frac{p+k}{2}t \approx 2\sin\frac{p-k}{2}t\cos pt,$$

получим уравнение (5) в виде

$$x = A(t)\cos pt, \qquad (6)$$

где

$$A(t) = \frac{h}{k(k-p)}\sin\frac{p-k}{2}t. \qquad (7)$$

При $p \approx k$ $A(t)$ является медленно изменяющейся периодической функцией очень малой частоты $(p - k)/2$. Ее период равен

$$T_a = \frac{4\pi}{|p - k|}. \tag{8}$$

Как следует из уравнения (6), движение происходит с круговой частотой p. Поэтому период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{p}. \tag{9}$$

Так как $p \approx k$, то $T_a \gg T$, причем

$$\frac{T_a}{T} = \frac{2p}{|p - k|}. \tag{10}$$

В этой задаче при числовых данных (2) имеем

$$x = a(t)\cos 101t, \quad \text{где} \quad a(t) = -80\sin\frac{t}{2} \text{ см},$$

$$T_a = \frac{4\pi}{|101 - 100|} = 12{,}56 \text{ с}, \quad T = \frac{2\pi}{101} = 0{,}063 \text{ с}, \quad \frac{T_a}{T} = 202.$$

На рис. *б* изображен график движения, описываемого уравнением (6). Колебания подобного вида называются ***биениями***.

Биения можно рассматривать как гармонические колебания периода $2\pi/p$, амплитуда которых изменяется по закону синуса с малой круговой частотой $(p - k)/2$. Напомним, что при резонансе, т.е. при $p = k$, переменная амплитуда неограниченно возрастает прямо пропорционально времени (см. рис. 8.11 на стр. 100).

Явление биений можно легко обнаружить при звуковых колебаниях, воспринимаемых нашим слухом. Высота звучания определяется частотой звуковых колебаний, а сила звука – амплитудой колебаний. Так как при биениях амплитуда изменяется по гармоническому закону (7), то сила звука периодически усиливается и ослабевает.

Задача 8.40. Для регистрации вибраций железнодорожного вагона к потолку вагона подвешена пружина, коэффициент жесткости которой равен $c = 1$ кН/м. К концу пружины подвешен груз массой $m = 10$ кг со стрелкой (рис.). При вертикальных колебаниях вагона, т.е. точки A, начинаются колебания груза по отношению к вагону, которые регистрируются движением стрелки вдоль шкалы, изображенной на стене вагона.

Написать уравнение движения стрелки B, определить коэффициент динамичности и коэффициент расстройки, если вагон совершает колебания

согласно уравнению $\xi = b\sin pt$, где $b = 0{,}5$ см, $p = 16\pi$ рад/с. В начальный момент груз находился в покое в положении статического равновесия. Силой сопротивления движению груза пренебречь.

Решение. Введем ось x, связанную с неподвижной средой. Начало отсчета выберем в положении статического равновесия груза. Ось x направим по вертикали вниз. Запишем начальные условия движения груза, отнесенные к неподвижной оси x:

$$\text{при } t=0 \quad x = x_0 = 0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0.$$

Изобразим груз в промежуточном положении, смещенном из начала отсчета на x вниз. Если вагон неподвижен, то в этом положении груза пружина была бы растянута на $\Delta_{ст} + x$. Однако при этом имеет место смещение вагона и, следовательно, точки A на ξ вниз, поэтому удлинение Δ пружины оказывается меньше на величину ξ, т.е. $\Delta_x = \Delta_{ст} + x - \xi$.

К грузу приложены две силы: его сила тяжести $P = mg$ и сила упругости F пружины, направленная по вертикали вверх, причем

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{ст} + x - \xi). \tag{1}$$

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x: $m\ddot{x} = mg + F_x$. С учетом формулы (1) запишем

$$m\ddot{x} = mg - c\Delta_{ст} - cx + c\xi.$$

Так как в положении статического равновесия $x = \ddot{x} = \xi = 0$, то $mg - c\Delta_{ст} = 0$ и дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{x} = -cx + c\xi.$$

К задаче 8.40

По условию $\xi = b\sin pt$. Поэтому

$$m\ddot{x} + cx = cb\sin pt. \tag{2}$$

Мы получили дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза при наличии возмущающей силы $cb\sin pt = c\xi$. Таким образом, колебания вагона и, следовательно, точки A подвеса пружины оказались источником возмущающей силы, приложенной к грузу. Перепишем дифференциальное уравнение (2) в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt, \tag{3}$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = 10 \text{ рад/с}, \quad p = 16\pi \text{ рад/с}, \quad h = \frac{cb}{m} = 50 \text{ см/с}^2.$$

Нетрудно видеть, что дифференциальное уравнение (3) тождественно уравнению (13*), данному в обзоре теории на стр. 98, при условии: $\delta = 0$, поэтому, воспользовавшись общим решением (14*) при $\delta = 0$, запишем:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{4}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt. \tag{5}$$

Подставив в уравнение (4) $t = 0$, $x = x_0 = 0$, а в уравнение (5) $t = 0, \dot{x} = \dot{x}_0 = 0$, определим:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = -\frac{p}{k}\frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Теперь уравнение движения стрелки принимает вид

$$x = -\frac{p}{k}\frac{h}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{6}$$

Использовав числовые данные, получим

$$x = (0{,}1 \sin 10t - 0{,}02 \sin \pi t) \text{ см}. \tag{7}$$

Первые слагаемые в уравнениях (6) и (7) определяют колебания груза со стрелкой, имеющие частоту свободных, а вторые слагаемые – вынужденные колебания.

При наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости груза, колебания, имеющие частоту свободных, быстро затухают. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только вынужденные колебания груза со стрелкой:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{8}$$

Так как шкала, по которой регистрируются колебания стрелки, прибита к стене вагона и, следовательно, совершает колебания вместе с вагоном, то стрелка отмечает колебания груза по отношению к вагону, равные разности x_2 и ξ, т.е. $x_r = x_2 - \xi$. Получим

$$x_r = x_2 - \xi = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt - b \sin pt = \frac{h - bk^2 + bp^2}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Учитывая, что $h = cb/m = bk^2$, находим

$$x_r = \frac{bp^2}{k^2 - p^2}\sin pt = \frac{p^2}{k^2 - p^2}\xi. \quad (9)$$

(Этот результат можно получить с помощью уравнения динамики относительного движения материальной точки. См. в следующем параграфе задачу 8.47).

Данный прибор предназначен для регистрации колебаний вагона, т.е. ξ. Стрелка же отмечает x_r. Для того чтобы колебания стрелки возможно точнее воспроизводили колебания вагона, необходимо, чтобы дробь $\dfrac{p^2}{k^2 - p^2}$ была близка к единице. Это имеет место при $p \gg k$. Учитывая, что $k = \sqrt{c/m}$, следует для данного прибора подбирать весьма слабую пружину с малым коэффициентом упругости c. (Чем слабее пружина, тем меньше реагирует груз на колебания точки подвеса пружины, оставаясь как бы неподвижным в пространстве по отношению к колеблющемуся вагону.)

В рассматриваемой задаче $\dfrac{p^2}{k^2 - p^2} = -1{,}04$.

Аналогично данному прибору конструируются вертикальные сейсмографы – приборы для регистрации землетрясений.

Для нахождения коэффициента динамичности λ воспользуемся формулой $\lambda = b/\Delta_H$. Так как $b = 0{,}02$ см и $\Delta_H = 0{,}5$ см, то $\lambda = 0{,}04$. Это означает, что амплитуда вынужденных колебаний в 25 раз меньше статического смещения. Соответствующее значение коэффициента расстройки z будет:

$$z = \frac{p}{k} = \frac{16\pi}{10} = 5{,}03.$$

Задача 8.41. Пневматический отбойный молоток приводится в движение сжатым воздухом, поступающим в корпус молотка через шланг A. Давление воздуха, приложенное к поршню D молотка, изменяется согласно уравнению

$$S = H_0 + H_1 \cos pt + H_3 \cos 3pt,$$

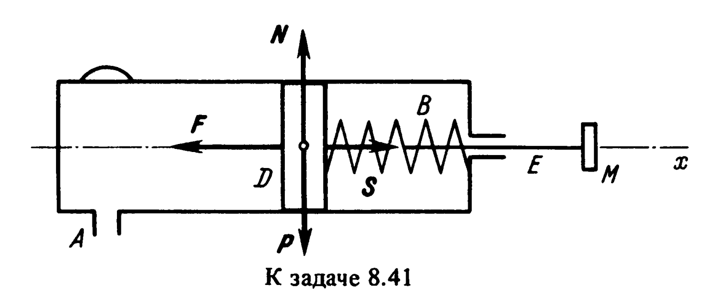
где p, H_0, H_1 и H_3 – постоянные величины. В корпус молотка вмонтирована пружина B с коэффициентом жесткости c. Пружина упирается левым концом в поршень, а правым – в корпус молотка. Поршень D соединен штоком E с бойком M (рис.).

Написать уравнение вынужденных колебаний поршня при работе молотка вхолостую. Массой штока E, бойка M и пружины B, а также силой сопротивления движению пренебречь.

Решение. Направим ось x по горизонтали направо, взяв начало отсчета в положении статического равновесия поршня под действием силы H_0 и силы упругости пружины $F_{ст}$. В этом положении пружина сжата на $\Delta_{ст}$ силой H_0. При этом возникает сила упругости пружины $F_{ст} = c\Delta_{ст}$. Обе силы направлены по горизонтали: H_0 – направо, $F_{ст}$ – налево. Запишем условие равновесия поршня в проекции на ось x:

$$H_0 - c\Delta_{ст} = 0. \qquad (1)$$

Изобразим поршень смещенным из нуля направо на x. При этом пружина сжата на $\Delta_x = \Delta_{ст} + x$ и возникшая в ней сила упругости F направлена



К задаче 8.41

по горизонтали налево. Ее проекция на ось x равна

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{ст} + x). \qquad (2)$$

Кроме того, к поршню приложены следующие силы: $P = mg$ – его сила тяжести, N – нормальная реакция корпуса, S – сила давления сжатого воздуха.

Составим дифференциальное уравнение движения поршня D в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = S_x + F_x.$$

Учитывая формулу (2) и заданный закон изменения силы S, находим

$$m\ddot{x} = H_0 + H_1 \cos pt + H_3 \cos 3pt - c\Delta_{ст} - cx.$$

Принимая во внимание формулу (1), запишем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний поршня в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = h_1 \cos pt + h_3 \cos 3pt, \qquad (3)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad h_1 = \frac{H_1}{m}, \qquad h_3 = \frac{H_3}{m}.$$

Для определения закона вынужденных колебаний поршня следует найти частное решение уравнения (3). Принимая во внимание правую часть это-

го уравнения, ищем частное решение x_2 в виде

$$x_2 = A_1 \sin pt + B_1 \cos pt + A_3 \sin 3pt + B_3 \cos 3pt, \qquad (4)$$

где A_1, B_1, A_3 и B_3 – постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Для отыскания A_1, B_1, A_3 и B_3 вычислим

$$\dot{x}_2 = A_1 p \cos pt - B_1 p \sin pt + 3pA_3 \cos 3pt - 3pB_3 \sin 3pt,$$

$$\ddot{x}_2 = -A_1 p^2 \sin pt - B_1 p^2 \cos pt - 9A_3 p^2 \sin 3pt - 9B_3 p^2 \cos 3pt.$$

Подставив x_2, $\dot{x}_2$, $\ddot{x}_2$ в дифференциальное уравнение (3) и приравняв коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения при синусе и косинусе, находим

$$A_1(k^2 - p^2) = 0, \quad B_1(k^2 - p^2) = h_1, \quad A_3(k^2 - 9p^2) = 0,$$
$$B_3(k^2 - 9p^2) = h_3.$$

Решив эту систему уравнений, имеем

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{h_1}{k^2 - p^2}, \quad A_3 = 0, \quad B_3 = \frac{h_3}{k^2 - 9p^2}.$$

Подставив значения A_1, B_1, A_3 и B_3 в уравнение (4), находим искомое уравнение вынужденных колебаний поршня:

$$x_2 = \frac{h_1}{k^2 - p^2} \cos pt + \frac{h_3}{k^2 - 9p^2} \cos 3pt.$$

В случае $k = p$ наступают резонансные колебания первого порядка.

В случае $k = 3p$ наступают резонансные колебания третьего порядка.

Так как $k = \sqrt{c/m}$, то подбор коэффициента упругости пружины c следует производить так, чтобы обеспечить выполнение неравенств $k \neq p$ и $k \neq 3p$. При этом поршень не будет попадать в резонанс.

Задача 8.42. Чувствительный элемент индикатора массы m движется вдоль оси x под действием силы упругости F и возмущающей силы S (рис. *а*). Проекция силы F на ось x равна $F_x = -cx$, где c – коэффициент упругости. Проекция возмущающей силы S (рис. *б*) имеет период T и претерпевает разрыв через каждые полпериода. За исключением точек разрыва, модуль возмущающей силы постоянен и равен H.

Найти уравнение движения материальной точки (чувствительного элемента), если в начальный момент она находилась в покое в начале отсчета на оси x. Силами сопротивления пренебречь.

Решение. В этой задаче возмущающая сила задана графиком, причем

$$\text{при } 0 < t < T/2 \quad S_x = H, \qquad \text{при } T/2 < t < T \quad S_x = -H. \qquad (1)$$

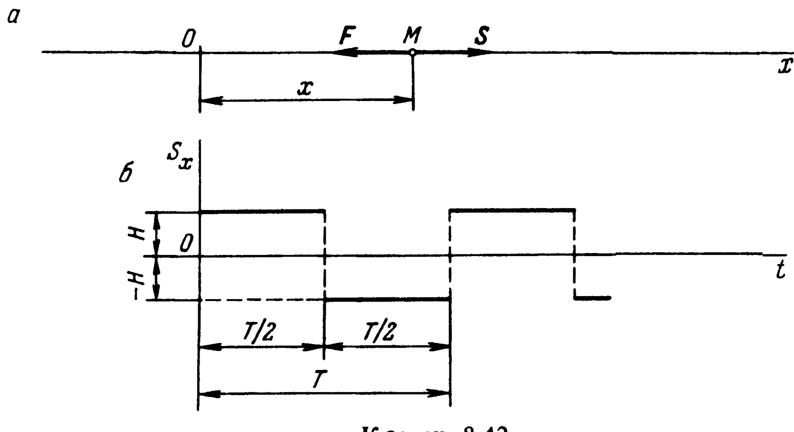
Разложим S_x в ряд Фурье:

$$S_x = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos ipt + B_i \sin ipt), \tag{2}$$

где

$$p = \frac{2\pi}{T}, \quad A_i = \frac{2}{T} \int_0^T S_x(t) \cos ipt\, dt, \quad B_i = \frac{2}{T} \int_0^T S_x(t) \sin ipt\, dt, \tag{3}$$

причем $i = 0, 1, 2, \ldots$



К задаче 8.42

В данном случае, приняв во внимание (1) и рис. *б*, имеем

$$A_i = \frac{2}{T} \int_0^T S_x(t) \cos ipt\, dt = \frac{p}{\pi} \left(\int_0^{\pi/p} H \cos ipt\, dt - \int_{\pi/p}^{2\pi/p} H \cos ipt\, dt \right),$$

т.е.

$$A_i = \frac{H}{i\pi} \left(\sin ipt \,\Big|_0^{\pi/p} - \sin ipt \,\Big|_{\pi/p}^{2\pi/p} \right) =$$

$$= \frac{H}{i\pi} (2 \sin i\pi - \sin 0 - \sin 2i\pi) = 0.$$

Итак,

$$A_i = 0, \text{ где } i = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Переходим к вычислению коэффициента B_i по формуле (3):

$$B_i = \frac{2}{T} \int_0^T S_x(t) \sin ipt\, dt = \frac{p}{\pi} \left(\int_0^{\pi/p} H \sin ipt\, dt - \int_{\pi/p}^{2\pi/p} H \sin ipt\, dt \right),$$

откуда получим

$$B_i = \frac{H}{i\pi}\left(-\cos ipt\,\Big|_0^{\pi/p} + \cos ipt\,\Big|_{\pi/p}^{2\pi/p}\right) = \frac{H}{i\pi}(-2\cos i\pi + \cos 0 + \cos 2i\pi). \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что при $i = 0, 2, 4, 6, \ldots$ скобка в формуле (5) обращается в нуль, а при $i = 1, 3, 5, \ldots$ скобка равна четырем. Итак,

$$B_i = 0 \quad \text{при} \quad i = 0, 2, 4, 6, \ldots, \quad B_i = \frac{4H}{i\pi} \quad \text{при} \quad i = 1, 3, 5, \ldots \tag{6}$$

Использовав результаты (4) и (6) в формуле (2), запишем искомое разложение возмущающей силы в ряд Фурье:

$$S_x = \frac{4H}{\pi}\sum_i \frac{1}{i}\sin ipt, \quad \text{где} \quad i = 1, 3, 5, \ldots \tag{7}$$

Будем в дальнейшем решать задачу приближенно, ограничившись первыми четырьмя членами разложения, т.е. считая

$$S_x = \frac{4H}{\pi}\left(\sin pt + \frac{1}{3}\sin 3pt + \frac{1}{5}\sin 5pt + \frac{1}{7}\sin 7pt\right). \tag{8}$$

К материальной точке приложены: сила F упругости и возмущающая сила S (рис. a). Поэтому дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x + S_x.$$

Приняв во внимание формулу (8) и учтя, что по условию $F_x = -cx$, запишем:

$$\ddot{x} + k^2 x = h\left(\sin pt + \frac{1}{3}\sin 3pt + \frac{1}{5}\sin 5pt + \frac{1}{7}\sin 7pt\right), \tag{9}$$

где обозначено

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{4H}{\pi m}. \tag{10}$$

Общее решение x неоднородного дифференциального уравнения (9) имеет вид

$$x = x_1 + x_2, \tag{11}$$

где x_2 – его частное решение, а x_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$. Так как корни характеристического

уравнения $r^2 + k^2 = 0$ являются мнимыми: $r_{1,2} = \pm ki$, то

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{12}$$

В соответствии с правой частью уравнения (9), ищем частное решение x_2 в виде

$$x_2 = D_1 \sin pt + D_3 \sin 3pt + D_5 \sin 5pt + D_7 \sin 7pt, \tag{13}$$

где D_1, D_3, D_5 и D_7 – постоянные, подлежащие последующему определению.

Вычислив вторую производную x_2 по времени

$$\ddot{x}_2 = -D_1 p^2 \sin pt - 9D_3 p^2 \sin 3pt - 25D_5 p^2 \sin 5pt - 49D_7 p^2 \sin 7pt,$$

подставим ее, а также x_2 в формулы (13), в уравнение (9). Приравняв затем коэффициенты при соответствующих синусах и косинусах, найдем

$$D_1 = \frac{h}{k^2 - p^2}, \quad D_3 = \frac{h}{3(k^2 - 9p^2)}, \quad D_5 = \frac{h}{5(k^2 - 25p^2)},$$

$$D_7 = \frac{h}{7(k^2 - 49p^2)}.$$

Внеся эти значения в частное решение (13), получим

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt + \frac{h}{3(k^2 - 9p^2)} \sin 3pt + \frac{h}{5(k^2 - 25p^2)} \sin 5pt +$$

$$+ \frac{h}{7(k^2 - 49p^2)} \sin 7pt. \tag{14}$$

Использовав результаты (12) и (14) в формуле (11), найдем общее решение дифференциального уравнения (9):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt + \frac{h}{3(k^2 - 9p^2)} \sin 3pt +$$

$$+ \frac{h}{5(k^2 - 25p^2)} \sin 5pt + \frac{h}{7(k^2 - 49p^2)} \sin 7pt. \tag{15}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим производную x по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt +$$

$$+ \frac{hp}{k^2 - 9p^2} \cos 3pt + \frac{hp}{k^2 - 25p^2} \cos 5pt + \frac{hp}{k^2 - 49p^2} \cos 7pt.$$

$$(16)$$

В соответствии с условием задачи начальные условия движения имеют вид

при $t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0.$

Подставив начальные условия: $t = 0$, $x = 0$ – в уравнение (15), а $t = 0$, $\dot{x} = 0$ в уравнение (16) и решив систему уравнений, найдем

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{hp}{k}\left(\frac{1}{k^2 - p^2} + \frac{1}{k^2 - 9p^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k^2 - 25p^2} + \frac{1}{k^2 - 49p^2}\right).$$

Итак,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{hp}{k}\sum_i \frac{1}{k^2 - i^2p^2}, \quad \text{где } i = 1, 3, 5, 7. \tag{17}$$

Внеся значения (17) в уравнение (15), окончательно получим

$$x = -\frac{hp}{k}\left(\sum_i \frac{1}{k^2 - i^2p^2}\right)\sin kt + h\sum_i \frac{1}{i(k^2 - i^2p^2)}\sin ipt, \tag{18}$$

где $i = 1, 3, 5, 7$; $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, $p = \dfrac{2\pi}{T}$, $h = \dfrac{4H}{\pi m}$.

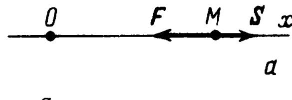
В уравнении (18): $-\dfrac{hp}{k}\left(\sum\limits_i \dfrac{1}{k^2 - i^2p^2}\right)\sin kt$ – свободные колебания материальной точки, вызванные возмущающей силой и имеющие круговую частоту k свободных колебаний, а $h\sum\limits_i \dfrac{1}{i(k^2 - i^2p^2)}\sin ipt$ – вынужденные колебания материальной точки.

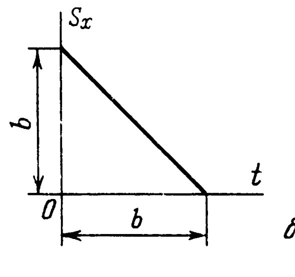
При выполнении условия: $k^2 - i^2p^2 = 0$ – наступают резонансные колебания i-го порядка, при которых отклонения материальной точки неограниченно возрастают. Так как в рассматриваемом случае $i = 1, 3, 5, 7$, то имеют место:

при $k = 3$ резонансные колебания 1-го порядка,
" $k = 3p$ " " 3-го "
" $k = 5p$ " " 5-го "
" $k = 7p$ " " 7-го "

Конечно, в реальных условиях, при наличии силы сопротивления движению, отклонения материальной точки ограничены.

Задача 8.43. Точка M массы m движется вдоль оси x (рис. *а*) под действием силы упругости F и возмущающей силы S. Проекция силы упругости на ось x равна $F_x = -cx$, где c – коэффициент упругости. Возмущающая сила S действует в течение промежутка времени b, т.е. при $0 \leqslant t \leqslant b$, причем $S_x = f(t) = b - t$ (рис. *б*), где b – положительная постоянная. По окончании промежутка времени b, т.е. при $t \geqslant b$, возмущающая сила обращается в нуль: $S_x = 0$ и точка совершает свободные колебания.





К задаче 8.43

Найти уравнение вынужденных колебаний материальной точки при $0 \leqslant t \leqslant b$ и свободных колебаний при $t \geqslant b$. В начальный момент точка находилась в покое в начале отсчета на оси x. Силой сопротивления пренебречь.

Решение. Составим дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F_x + S_x.$$

Использовав заданные значения F_x и S_x, запишем

$$m\ddot{x} = -cx + b - t \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant b,$$

$$m\ddot{x} = -cx \quad \text{при} \quad t \geqslant b.$$

Для решения задачи применим формулу (17*), приведенную в обзоре теории:

$$x = \frac{1}{km}\int_0^t f(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau \tag{1}$$

В данном случае $f(\tau) = b - \tau$, поэтому

$$x = \frac{1}{km}\int_0^t (b-\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau \tag{2}$$

при $0 \leqslant t \leqslant b$. Применив интегрирование по частям, получим

$$x = \frac{1}{k^2 m}\left|(b-\tau)\cos k(t-\tau) - \frac{1}{k}\sin k(t-\tau)\right|_0^t. \tag{3}$$

Подстановка верхнего и нижнего пределов дает

$$x = \frac{1}{k^2 m}(b-t) - \frac{b}{k^2 m}\cos kt + \frac{1}{k^2 m}\sin kt. \tag{4}$$

Уравнение (4) описывает закон движения материальной точки в промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant b$.

В момент $t = b$ оканчивается действие возмущающей силы (см. рис. *б*) и при $t > b$ происходят свободные колебания точки. Так как формула (1)

справедлива для любых значений t, то используем ее вновь, разбив промежуток времени $[0, t]$ на два промежутка $[0, b]$ и $[b, t]$. Тогда формула (1) примет вид

$$x = \frac{1}{km}\int_0^b f(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau + \frac{1}{km}\int_b^t f(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau.$$

Заметим, что в промежутке времени $t > b$ $f(t) = 0$ и второй интеграл обращается в нуль. Значит,

$$x = \frac{1}{km}\int_0^b f(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{km}\int_0^b (b-\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau. \qquad (5)$$

Сопоставив формулы (5) и (2), видим, что они отличаются только верхними пределами интеграла. Поэтому можно воспользоваться результатом интегрирования (3), заменив в нем верхний предел t на b. Получим

$$x = \frac{1}{k^2 m}\left|(b-\tau)\cos k(t-\tau) - \frac{1}{k}\sin k(t-\tau)\right|_0^b,$$

т.е.

$$x = \frac{1}{k^2 m}\left[-b\cos kt - \frac{1}{k}\sin k(t-b) + \frac{1}{k}\sin kt\right].$$

Вычислив синус разности $k(t - b)$ и собрав члены, содержащие $\sin kt$ и $\cos kt$, окончательно найдем

$$x = \frac{1}{k^3 m}\left[(\sin kb - kb)\cos kt + (1 - \cos kb)\sin kt\right]. \qquad (6)$$

Итак, движение материальной точки M под действием возмущающей силы $S_x = b - t$ в промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant b$ описывается уравнением (4), а свободные колебания точки при $t > b$ – уравнением (6).

Задача 8.44. Груз массой m прикреплен к концу пружины, коэффициент жесткости которой равен c. На груз действует возмущающая сила $S = f(t)$, где $f(t)$ – однозначная непрерывная дифференцируемая функция. Ось x направлена вдоль оси пружины вниз. Начало отсчета взято в положении статического равновесия груза.

Начальные условия движения груза:

при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Определить уравнение движения груза, применив метод вариации произвольных постоянных. Силой сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. В положении статического равновесия груза под действием его силы тяжести $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ пружина растянута на $\Delta_{\text{ст}}$ вниз. При этом воз-

никает упругая сила $F_{ст}$, направленная вертикально вверх, причем $F_{ст} = c\Delta_{ст}$. В этом положении груза его сила тяжести уравновешивается реакцией пружины:

$$P - c\Delta_{ст} = 0. \quad (1)$$

В произвольном положении груза пружина растянута на величину

$$\Delta_x = \Delta_{ст} + x, \quad (2)$$

где x – координата конца пружины, на котором подвешен груз.

Упругая сила пружины направлена вертикально вверх, к положению статического равновесия. Проекция упругой силы на ось x равна

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{ст} + x). \quad (3)$$

Кроме этой силы F, к грузу приложены следующие силы: P – сила тяжести груза, S – возмущающая сила, проекция которой на ось x равна $S_x = f(t)$. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x} = P + S_x + F_x. \quad (4)$$

С учетом (1), (2) уравнение (4) запишется в виде

$$m\ddot{x} = mg + f(t) - c\Delta_{ст} - cx, \quad (5)$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{1}{m} f(t), \quad (6)$$

где для краткости обозначено $c/m = k^2$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (6) складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x = x_1 + x_2, \quad (7)$$

где общее решение однородного уравнения известно:

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (8)$$

При произвольном законе изменения возмущающей силы $S = f(t)$ отыскание частного решения дифференциального уравнения (6) подбором представляет значительные трудности.

Применим для решения этой задачи метод вариации произвольных постоянных. Ищем решение уравнения (6) в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (9)$$

аналогичном общему решению однородного уравнения. Однако в отличие

от (8) будем считать C_1 и C_2 некоторыми функциями времени, подлежащими последующему определению. Так как вместо одной неизвестной функции мы ввели две, то можно наложить на функции C_1 и C_2 дополнительное условие.

Вычислим предварительно $\dot{x}$, воспользовавшись формулой (9):

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \dot{C}_1 \cos kt + \dot{C}_2 \sin kt. \qquad (10)$$

В качестве упомянутого дополнительного условия для упрощения выкладок положим

$$\dot{C}_1 \cos kt + \dot{C}_2 \sin kt = 0. \qquad (11)$$

Тогда формула (10) примет вид

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (12)$$

Пользуясь этим выражением для скорости, вычисляем ускорение груза:

$$\ddot{x} = -C_1 k^2 \cos kt - C_2 k^2 \sin kt - \dot{C}_1 k \sin kt + \dot{C}_2 k \cos kt. \qquad (13)$$

Внеся x из формулы (9) и $\ddot{x}$ из формулы (13) в дифференциальное уравнение (6), получим второе соотношение, связывающее функции C_1 и C_2:

$$-\dot{C}_1 k \sin kt + \dot{C}_2 k \cos kt = \frac{1}{m} f(t). \qquad (14)$$

Решая систему уравнений (11) и (13) относительно $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$, находим

$$\dot{C}_1 = -\frac{1}{km} f(t) \sin kt, \quad \dot{C}_2 = \frac{1}{km} f(t) \cos kt, \qquad (15)$$

откуда

$$C_1 = -\frac{1}{km} \int_0^t f(\tau) \sin k\tau \, d\tau + \tilde{C}_1, \quad C_2 = \frac{1}{km} \int_0^t f(\tau) \cos k\tau \, d\tau + \tilde{C}_2. \qquad (16)$$

Подставляя эти значения функций C_1 и C_2 в уравнение (8), получаем

$$x = \tilde{C}_1 \cos kt + \tilde{C}_2 \sin kt - \frac{1}{km} \cos kt \int_0^t f(\tau) \sin k\tau \, d\tau +$$
$$+ \frac{1}{km} \sin kt \int_0^t f(\tau) \cos k\tau \, d\tau \qquad (17)$$

или

$$x = \tilde{C}_1 \cos kt + \tilde{C}_2 \sin kt + \frac{1}{km} \int_0^t f(\tau) \sin k(t-\tau) \, d\tau. \qquad (18)$$

Для определения постоянных интегрирования $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ находим

$$\dot{x} = -\tilde{C}_1 k \sin kt + \tilde{C}_2 k \cos kt + \frac{1}{m}\int_0^t f(\tau)\cos k(t-\tau)\,d\tau. \qquad (19)$$

Подставив в (18) значения $t = 0, x = x_0$, а в (19) значения $t = 0, \dot{x} = \dot{x}_0$, получим

$$\tilde{C}_1 = x_0, \quad \tilde{C}_2 = \dot{x}_0/k. \qquad (20)$$

Внося значения постоянных интегрирования $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ в уравнение (18), находим искомое уравнение движения груза:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt + \frac{1}{km}\int_0^t f(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau \qquad (21)$$

Первые два слагаемых правой части уравнения (21) определяют свободные колебания груза, которые он совершал бы при отсутствии возмущающей силы $s = f(t)$. Последнее слагаемое правой части определяет колебания груза с частотой свободных колебаний, вызванные возмущающей силой, а также вынужденные колебания груза под действием возмущающей силы $s = f(t)$.

Уравнением (21) можно широко пользоваться при решении задач на вынужденные колебания материальной точки при произвольном законе изменения возмущающей силы $s = f(t)$. Им целесообразно пользоваться в тех случаях, когда трудно подобрать частное решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + k^2 x = \dfrac{1}{m} f(t)$.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задачи по теоретической механике" И.В. Мещерского: 32.80–32.85, 32.87, 32.89, 32.90–32.92,. 32.94, 32.95, 32.99, 32. 102.

5. Электромеханические аналогии. В 1873 г. Максвелл рассмотрел соответствие электрической цепи механической колебательной системе.

Механические параметры	**Электрические параметры**
t – время	t – время
x – координата	q – заряд (измеряется в кулонах)
$v_x = \dot{x}$ – проекция скорости	$i = \dot{q}$ – ток (измеряется в амперах)
m – масса	L – индуктивность (измеряется в генри)
F_x – проекция силы	E – электродвижущая сила напряжение (измеряется в вольтах)
β – коэффициент жидкостного сопротивления	r – омическое сопротивление (измеряется в омах)
c – коэффициент упругости	$\dfrac{1}{C}$ – где C – емкость измеряется в фарадах)
$S_x = S_x(t)$ – возмущающая сила	$E = E(t)$ – электродвижущая сила (измеряется в вольтах)

В основу электромеханической аналогии было положено соответствие между током и скоростью материальной точки.

Существуют и другие системы электромеханических аналогий. Они дают возможность описывать колебательные системы и электрические цепи аналогичными дифференциальными уравнениями. Поэтому все результаты, полученные в этом параграфе, могут быть использованы при изучении электрических цепей.

Задача 8.45. На рис. *а* изображена электрическая цепь, в состав которой входит внешний источник электродвижущей силы $E = E_0 \sin \omega t$. С ним последовательно соединены: катушка с индуктивностью L, омическое сопротивление r и конденсатор емкостью C.

Написать дифференциальное уравнение, описывающее движение зарядов в этой электрической цепи.

Р е ш е н и е. Запишем падение напряжений на каждом из участков цепи. Имеем:

для катушки с индуктивностью L

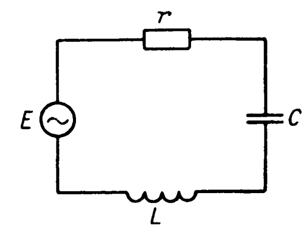
$$u_1 = L \frac{di}{dt}, \tag{1}$$

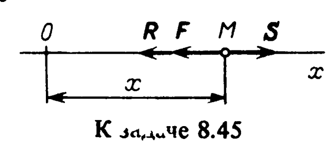
для омического сопротивления r

$$u_2 = ri, \tag{2}$$

для конденсатора емкостью C

$$u_3 = \frac{q}{C}. \tag{3}$$





К задаче 8.45

При последовательном включении всех элементов цепи напряжение E внешнего источника электродвижущей силы равно сумме падений напряжений на всех участках цепи (второй закон Кирхгофа), т.е.

$$u_1 + u_2 + u_3 = E. \tag{4}$$

Использовав в уравнении (4) формулы (1)–(3) и приняв во внимание, что $E = E_0 \sin \omega t$, получим

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} = E_0 \sin \omega t. \tag{5}$$

Учтя, что $i = dq/dt$, находим искомое дифференциальное уравнение в виде

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \sin \omega t,$$

т.е.

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h \sin pt, \tag{6}$$

где обозначено:

$$\frac{r}{L} = 2n, \quad \frac{1}{CL} = k^2, \quad \frac{E_0}{L} = h, \quad \omega = p.$$

Дифференциальное уравнение (6), полученное для данной электрической цепи, тождественно уравнению, описывающему движение материальной точки массы m, которая движется вдоль оси x (рис. *б*) под действием силы упругости $\boldsymbol{F}$, силы сопротивления движению $\boldsymbol{R}$ и возмущающей силы $\boldsymbol{S}$. Проекции этих сил на ось x равны: $F_x = -cx$, $R_x = -\beta\dot{x}$, $S_x = H \sin pt$. Действительно, дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x + R_x + S_x.$$

Подставив значения F_x, R_x и S_x, получим

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt, \tag{7}$$

где обозначено:

$$\frac{\beta}{m} = 2n, \quad \frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{H}{m} = h.$$

Нетрудно видеть, что движение материальной точки и изменение заряда в электрической цепи описываются аналогичными дифференциальными уравнениями (6) и (7). Это соответствие лежит в основе электронных моделирующих машин.

§ 5. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Законы динамики описывают движение материальной точки относительно так называемых "неподвижных" осей. Так, уравнение динамики движения материальной точки, отнесенное к "неподвижной" системе отсчета, имеет вид

$$m\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k, \tag{1*}$$

где m — масса точки, $\boldsymbol{a}$ — ее ускорение, $\boldsymbol{F}_k$ — силы, приложенные к точке. Однако "неподвижных" осей в окружающем нас мире нет. Тем важнее уметь решать задачи динамики по отношению к движущимся системам координат.

Вместе с тем часто приходится изучать относительное движение материальной точки, происходящее в системе отсчета, которая в свою очередь движется с ускорением по отношению к "неподвижным" осям. Для этого в правую часть уравнения (1*) надо ввести дополнительные силы. Эти силы называются *силами инерции*.

Уравнение динамики относительного движения материальной точки имеет вид

$$ma_r = \sum_{k=1}^{n} F_k + J_e + J_c, \qquad (2^*)$$

где a_r — ускорение точки относительно подвижных осей, $J_e = -ma_e$ — сила инерции в переносном движении, $J_c = -ma_c = -2m\vec{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$ — кориолисова сила инерции.

Напомним, что a_e — ускорение в переносном движении, т.е. ускорение той точки подвижной среды, через которую в данный момент проходит изучаемая точка, $\vec{\omega}_e$ — угловая скорость вращения подвижных осей относительно "неподвижных", $\mathbf{v}_r$ — относительная скорость, a_c — ускорение Кориолиса данной точки. Силы инерции направлены в стороны, противоположные соответствующим ускорениям, и пропорциональны массе точки.

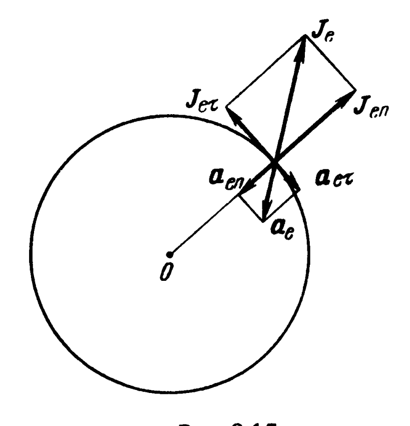


Рис. 8.17

Сопоставление формул (2*) и (1*) приводит к следующему результату: относительное движение материальной точки происходит по таким же законам, как движение абсолютное, под действием всех сил F_k, приложенных к точке в ее абсолютном движении, а также силы инерции в переносном движении J_e и кориолисовой силы инерции J_c. С помощью уравнения (2*) производится определение относительного движения материальной точки по заданному переносному движению, массе точки и силам, приложенным к материальной точке в ее абсолютном движении.

Если переносное движение представляет собой вращение вокруг неподвижной оси (рис. 8.17), то сила инерции в переносном движении J_e является суммой нормальной J_{en} и касательной $J_{e\tau}$ сил инерции:

$$J_e = J_{en} + J_{e\tau},$$

причем

$$J_{en} = -ma_{en}, \quad J_{e\tau} = -ma_{e\tau}.$$

По модулю силы инерции равны соответственно

$$J_{en} = mh\omega^2, \quad J_{e\tau} = mh\epsilon,$$

где h – расстояние материальной точки до неподвижной оси, ω и ϵ – угловая скорость и угловое ускорение подвижной среды, вращающейся вокруг неподвижной оси. Такое разложение силы инерции на касательную и нормальную применял Эйлер (Euler L. Mechanica, sive motus scientia analytice exposita. – Petrop., 1736).

Касательная сила инерции направлена в сторону, обратную касательному ускорению. Нормальная сила инерции направлена по главной нормали от центра кривизны.

В этом случае относительное движение материальной точки изучается с помощью уравнения

$$ma_r = \sum_{k=1}^{n} F_k + J_{en} + J_{e\tau} + J_c. \qquad (3^*)$$

Если переносное движение подвижной среды является поступательным, то кориолисова сила инерции J_c равна нулю. Сила инерции Кориолиса обращается также в нуль, если относительная скорость точки параллельна вектору угловой скорости переносного движения. Тогда относительное движение материальной точки изучается с помощью уравнения

$$ma_r = \sum_{k=1}^{n} F_k + J_e. \qquad (4^*)$$

Если переносное поступательное движение подвижной среды является равномерным и прямолинейным, то сила инерции в переносном движении J_e и кориолисова сила инерции J_c равны нулю. В этом случае относительное движение материальной точки изучается с помощью уравнения, тождественного ее уравнению абсолютного движения

$$ma_r = \sum_{k=1}^{n} F_k. \qquad (5^*)$$

Отсюда следует, что никакие механические явления, происходящие в подвижной среде не могут обнаружить ее прямолинейного и равномерного движения (*принцип относительности классической механики*).

Таким образом, "абсолютное" движение материальной точки может рассматриваться не только по отношению к "неподвижным" осям координат, но и по отношению к любой системе отсчета, движущейся поступательно и притом равномерно и прямолинейно по отношению к "неподвижным" осям координат. Эти системы отсчета называются *инерциальными* (галилеевыми осями).

Механические движения по отношению к инерциальным системам отсчета являются динамически равноценными.

В случае относительного покоя материальной точки по отношению к подвижной среде, совершающей переносное движение, относительное ускорение a_r, ускорение Кориолиса a_c и кориолисова сила инерции J_c равны нулю.

Уравнение относительного покоя материальной точки имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} F_k + J_e = 0. \tag{6*}$$

В некоторых случаях приходится определять переносное движение среды, связанной с подвижными осями, по заданному относительному движению материальной точки, ее массе и силам, приложенным к точке в ее абсолютном движении. При этом следует пользоваться уравнением

$$ma_e = \sum_{k=1}^{n} F_k + J_r + J_c, \tag{7*}$$

где a_e — ускорение в переносном движении, J_r — сила инерции в относительном движении, J_c — кориолисова сила инерции, причем $J_r = -ma_r$, $J_c = -ma_c$ (по модулю $J_r = ma_r$, $J_c = 2m\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}, \mathbf{v}_r})$.

Если переносное движение подвижной среды является поступательным, то кориолисова сила инерции равна нулю.

При этом переносное движение изучается с помощью уравнения

$$ma_e = \sum_{k=1}^{n} F_k + J_r. \tag{8*}$$

Указание. Задачи динамики относительного движения материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) разложить "абсолютное" движение материальной точки на относительное и переносное; выбрать неподвижную систему отсчета и подвижную систему отсчета, связанную с подвижной средой, совершающей переносное движение;

2) записать начальные условия относительного движения материальной точки;

3) изобразить на рисунке силы F_k, приложенные к материальной точке;

4) определить ускорение материальной точки в переносном движении a_e, ускорение Кориолиса a_c, найти силу инерции в переносном движении J_e, кориолисову силу инерции J_c. Добавить эти силы инерции к силам F_k, приложенным к материальной точке;

5) составить дифференциальные уравнения (2*)–(5*) относительного движения материальной точки в проекциях на подвижные оси координат;

6) проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения, определив постоянные интегрирования с помощью начальных условий движения;

7) определить искомые величины.

При решении первой задачи, т.е. при определении сил по заданному движению, пункты 2) и 6) надо опустить.

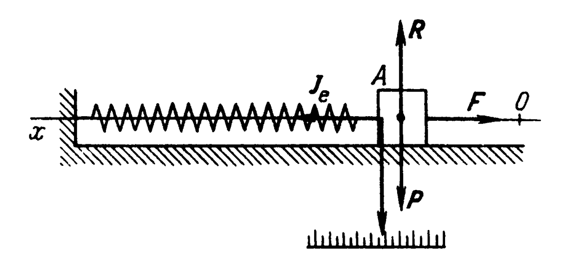
Материальную точку следует изображать в промежуточном положении, соответствующем положительным координатам этой точки, и предположить, что точка движется в сторону возрастания этих координат.

При относительном криволинейном движении материальной точки удобно пользоваться дифференциальными уравнениями движения в проекциях на оси натурального триэдра.

Задача 8.46. При отходе от станции электровоз имеет постоянное ускорение a. Для экспериментального определения этого ускорения на электровозе установлен прибор, состоящий из груза A массой m, прикрепленного к концу пружины. Груз A совершает колебания по гладкой горизонтальной станине, связанной с электровозом. К грузу прикреплена стрелка, которая перемещается вдоль шкалы, градуированной на станине. В момент включения прибора груз находился в относительном покое в конце недеформированной пружины жесткости c. Экспериментально определив размахи колебаний стрелки, можно вычислить искомое постоянное ускорение электровоза.

Найти зависимость между постоянным ускорением a электровоза и размахом колебаний стрелки.

Р е ш е н и е. Движение груза является сложным. Разложим его на переносное поступательное вместе со станиной (т.е. вместе с электровозом) и относительное по отношению к станине.



К задаче 8.46

К грузу приложены силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ – сила тяжести груза, $\boldsymbol{R}$ – нормальная реакция, $\boldsymbol{F}$ – сила упругости пружины. В относительном движении к грузу надо приложить переносную силу инерции $\boldsymbol{J}_e = -m\boldsymbol{a}_e$ (кориолисова сила инерции равна нулю, ибо переносное движение – поступательное).

Определим условие относительного покоя груза. Применив уравнение $0 = \sum_{k=1}^{n} F_k + J_e$ в проекции на ось x, запишем $0 = - F_{ст} + J_e$, где статическая сила упругости по модулю равна $F_{ст} = c\Delta_{ст}$, а $J_e = ma$, причем a – искомое ускорение электровоза. Значит, уравнение относительного покоя принимает вид

$$0 = - c\Delta_{ст} + ma. \quad (1)$$

Перейдем к изучению относительного движения груза (чувствительного элемента прибора). По условию, в начальный момент груз находился в конце недеформированной пружины, т.е. был отклонен от нуля на $\Delta_{ст}$ вправо. Приняв во внимание направление оси x, имеем $x_r = - \Delta_{ст}$, $\dot{x}_r = 0$ (груз находился в относительном покое). Итак,

$$\text{при } t = 0 \quad x_r = - \Delta_{ст}, \quad \dot{x}_r = 0. \quad (2)$$

Запишем дифференциальное уравнение относительного движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x}_r = P_x + R_x + F_x + J_{ex}. \quad (3)$$

Силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ перпендикулярны оси x, поэтому $P_x = R_x = 0$. Проекция силы упругости равна $F_x = - c(\Delta_{ст} + x_r)$ (на рисунке груз изображен в текущем положении, смещенном из нуля на x_r. При этом пружина сжата на $\Delta = \Delta_{ст} + x_r$). Проекция J_{ex} переносной силы инерции $\boldsymbol{J}_e$ равна $J_{ex} = ma$. Подставив эти значения проекций силы в уравнение (3), получим

$$m\ddot{x}_r = - c\Delta_{ст} - cx_r + ma. \quad (4)$$

Приняв во внимание условие (1) относительного покоя, запишем дифференциальное уравнение (4) относительного движения груза в виде

$$\ddot{x}_r + k^2 x_r = 0, \quad (5)$$

где обозначено $k^2 = c/m$.

Составим характеристическое уравнение дифференциального уравнения (5): $r^2 + k^2 = 0$, откуда $r_{1,2} = \pm ki$. Запишем соответствующее общее решение однородного дифференциального уравнения (5):

$$x_r = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (6)$$

Для определения постоянных интегрирования вычислим производную x по t:

$$\dot{x}_r = - C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (7)$$

Подставим начальные условия (2): $t = 0, x_r = - \Delta_{ст}$ – в уравнение (6), а $t = 0, \dot{x}_r = 0$ – в уравнение (7). Получим систему: $- \Delta_{ст} = C_1$, $0 = C_2 k$, т.е. $C_1 = - \Delta_{ст}$, $C_2 = 0$. Теперь уравнение движения (6) принимает вид

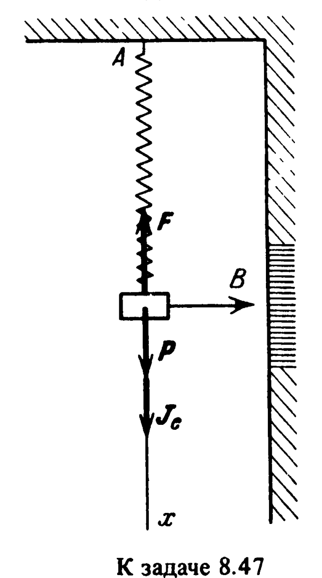
$x_r = -\Delta_{ст}\cos kt$. Из условия (1) следует, что $\Delta_{ст} = ma/c$, поэтому окончательно получим

$$x_r = -\frac{ma}{c}\cos kt, \tag{8}$$

где $k = \sqrt{c/m}$.

Итак, чувствительный элемент совершает свободные колебания с круговой частотой $k = \sqrt{c/m}$ и амплитудой $b = ma/c$ около положения относительного равновесия. При колебаниях стрелки вдоль шкалы определим размах ее колебаний d, т.е. расстояние между крайними положениями стрелки. Итак, $d = 2b = 2ma/c$, откуда находим искомое постоянное ускорение электровоза, равное $a = cd/(2m)$.

Задача 8.47. Определить движение по отношению к шкале стрелки B прибора для регистрации колебаний железнодорожного вагона, рассмотренного в задаче 8.40. Использовать данные этой задачи.



К задаче 8.47

Решение. Направим по вертикали вниз ось x, связанную с железнодорожным вагоном. Начало отсчета возьмем в положении статического равновесия груза (чувствительного элемента), т.е. при растяжении пружины на $\Delta_{ст} = P/c$ (рис.)

Груз совершает сложное движение, которое можно разложить на относительное движение по отношению к вагону и переносное движение вместе с вагоном, согласно уравнению $x_e = \xi = b\sin pt$.

Запишем начальные условия относительного движения груза:

при $t = 0$ $\quad x_r = x_{r0} = 0, \quad \dot{x}_r = \dot{x}_{r0} = 0$.

Для определения уравнения относительного движения груза используем уравнение (2*) динамики относительного движения материальной точки:

$$m\boldsymbol{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{J}_e + \boldsymbol{J}_c. \tag{1}$$

Изобразим груз смещенным из начала отсчета на x_r вниз. При этом пружина оказывается растянутой на $\Delta_x = \Delta_{ст} + x_r$ и сила упругости пружины F направлена по вертикали вверх. Ее проекция на ось x равна

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{ст} + x_r). \tag{2}$$

Кроме силы тяжести груза $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ и силы упругости пружины $\boldsymbol{F}$, надо к грузу в соответствии с уравнением (1) приложить силы инерции $\boldsymbol{J}_e$ и $\boldsymbol{J}_c$.

Зная уравнение переносного движения вагона $x_e = \xi = b\sin pt$, вычислим $\ddot{x}_e = -bp^2\sin pt$. Сила инерции в переносном движении имеет вид $\boldsymbol{J}_e =$

$= -ma_e$. Ее проекция на ось x равна

$$J_{ex} = mbp^2 \sin pt. \tag{3}$$

Так как переносное движение вагона является поступательным, то ускорение Кориолиса a_c и, следовательно, кориолисова сила инерции J_c равны нулю.

Запишем уравнение (1) в проекции на ось x:

$$m\ddot{x}_r = P + F_x + J_{ex}.$$

Использовав формулы (2) и (3), находим

$$m\ddot{x}_r = P - c\Delta_{\text{ст}} - cx_r + mbp^2 \sin pt, \tag{4}$$

причем

$$P - c\Delta_{\text{ст}} = 0. \tag{5}$$

На основании формулы (5) дифференциальное уравнение (4) относительного движения груза можно записать в виде

$$\ddot{x}_r + k^2 x_r = bp^2 \sin pt, \tag{6}$$

где $k = \sqrt{c/m}$.

Общее решение x_r этого дифференциального уравнения имеет вид

$$x_r = x_{r1} + x_{r2}, \tag{7}$$

где x_{r1} – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{x}_r + k^2 x_r = 0,$$

т.е.

$$x_{r1} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{8}$$

а x_{r2} – частное решение уравнения (6). Так как

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{10}} = 10\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \text{а} \quad p = 16\pi\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \text{то} \quad p \neq k,$$

и, следовательно, резонанса нет.

Ввиду отсутствия резонанса ищем частное решение x_{r2} в виде

$$x_{r2} = A \sin pt + B \cos pt. \tag{9}$$

Для определения A и B вычислим

$$\ddot{x}_{r2} = -Ap^2 \sin pt - Bp^2 \cos pt.$$

Подставив x_{r2} и $\ddot{x}_{r2}$ в дифференциальное уравнение относительного движения груза (6), приравняв соответствующие коэффициенты в левой

и правой частях этого уравнения при синусе и косинусе, получим

$$A = \frac{bp^2}{k^2 - p^2}, \quad B = 0.$$

Следовательно, частное решение (9), соответствующее вынужденным колебаниям груза в относительном движении, имеет вид

$$x_{r2} = \frac{bp^2}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{10}$$

Это уравнение вынужденных колебаний груза в относительном движении было нами найдено в задаче 8.40 (формула (9)) более длинным путем. Применяя уравнение динамики относительного движения материальной точки, мы непосредственно получили уравнение относительного движения x_{r2}, минуя определение его абсолютного движения. В решении же задачи 8.40 было предварительно определено абсолютное движение x_2 груза в формуле (8) и затем вычислены координаты точки в относительном движении по формуле: $x_r = x_2 - \xi$. Если требуется определить уравнение абсолютного движения груза, то более целесообразным является метод решения задачи 8.40. Если же требуется найти уравнение относительного движения точки, то предпочтительнее пользоваться уравнением динамики относительного движения, примененным в этой задаче.

Находим общее решение дифференциального уравнения (6) по формуле (7), использовав уравнения (8) и (10):

$$x_r = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{bp^2}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{11}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x}_r = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{bp^3}{k^2 - p^2} \cos pt. \tag{12}$$

Внеся в (11) $t = 0, x_r = 0$, а в (12) $t = 0, \dot{x}_r = 0$, получим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{p}{k}\,\frac{bp^2}{k^2 - p^2}.$$

Подставив эти значения C_1 и C_2 в формулу (11), найдем уравнение относительного движения чувствительного элемента

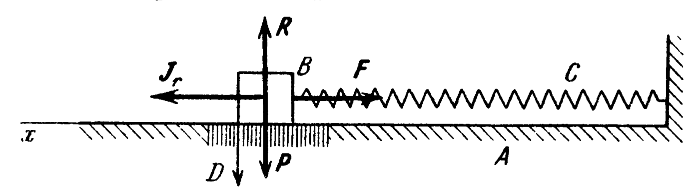
$$x_r = -\frac{p}{k}\,\frac{bp^2}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{bp^2}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{13}$$

Использовав численные данные: k = 10 рад/с, p = 16π рад/с, b = 0,5 см, находим

$$x_r = (-2{,}64 \sin 10t + 0{,}52 \sin 16\pi t) \text{ см}. \tag{14}$$

Первые слагаемые в уравнениях (13) и (14) определяют колебания в относительном движении груза с круговой частотой свободных колебаний, а вторые слагаемые – их вынужденные колебания в относительном движении.

Задача 8.48. Для регистрации колебаний станка на горизонтальной идеально гладкой плоскости его станины A установлен груз B массой m, соединенный со станиной пружиной C (рис.) Коэффициент жесткости пружины



К задаче 8.48

равен c. При колебаниях станины A груз приходит в движение относительно станины. Стрелка D, прикрепленная к грузу B, регистрирует горизонтальные колебания станины на шкале, изображенной на станине.

Определить амплитуду колебаний станины, если стрелка D движется относительно станины согласно уравнению $\xi = b \cos pt$, где ξ отсчитывается по горизонтали налево от положения конца недеформированной пружины. В начальный момент станина и груз находились в покое.

Р е ш е н и е. Направим неподвижную ось x по горизонтали налево, взяв начало отсчета в положении груза при недеформированной пружине. Движение груза B по отношению к неподвижной оси x является сложным. Разложим его на относительное по отношению к станине A и переносное (в данном случае поступательное) вместе со станиной.

Задача сводится к определению переносного движения по заданному относительному движению груза.

Изобразим груз в положении, смещенном относительно станины на $x_r = \xi$.

Начальные условия переносного движения груза имеют вид

при $t = 0$ $x_e = 0$, $\dot{x}_e = 0$.

К грузу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ – сила тяжести груза, $\boldsymbol{R}$ – нормальная реакция горизонтальной плоскости, $\boldsymbol{F}$ – сила упругости пружины, растянутой на $\Delta_x = x_r = \xi$, направленная по горизонтали напра-

во. Ее проекция на ось x равна

$$F_x = -c\xi = -cb\cos pt. \tag{1}$$

Для определения переносного движения груза надо ко всем силам, приложенным к грузу, добавить силу инерции в относительном движении $\boldsymbol{J}_r$ и кориолисову силу инерции $\boldsymbol{J}_c$. Так как ξ определяет закон относительного движения груза, т.е. $x_r = \xi = b\cos pt$, то $\ddot{x}_r = -bp^2\cos pt$. Сила инерции в относительном движении $\boldsymbol{J}_r = -m\boldsymbol{a}_r$. Ее проекция на ось x равна

$$J_{rx} = -m\ddot{x}_r = mbp^2\cos pt. \tag{2}$$

Так как переносное движение станины является поступательным, то ускорение Кориолиса и, следовательно, кориолисова сила инерции $\boldsymbol{J}_c$ равны нулю.

Составим дифференциальное уравнение переносного движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x}_e = F_x + J_{rx}.$$

Учитывая формулы (1) и (2), представим это уравнение так:

$$m\ddot{x}_e = -cb\cos pt + mbp^2\cos pt,$$

или

$$\ddot{x}_e = b(p^2 - k^2)\cos pt, \tag{3}$$

где $k^2 = c/m$.

Интегрирование дифференциального уравнения (3) не представляет затруднений:

$$\dot{x}_e = \frac{b(p^2 - k^2)}{p}\sin pt + C_1.$$

Так как при $t = 0$ $\dot{x}_e = 0$, то $C_1 = 0$, следовательно,

$$\dot{x}_e = \frac{b(k^2 - p^2)}{p^2}\sin pt.$$

Проинтегрировав это дифференциальное уравнение, находим

$$x_e = \frac{b(k^2 - p^2)}{p^2}\cos pt + C_2.$$

Использовав, что при $t = 0$ $x_e = 0$, найдем, что $C_2 = -\dfrac{b(k^2 - p^2)}{p^2}$. Следовательно, переносное движение станины происходит согласно уравнению

$$x_e = \frac{b(p^2 - k^2)}{p^2}(1 - \cos pt),$$

т.е. станина совершает гармонические колебания круговой частоты p. Искомая амплитуда колебаний станины равна $b(p^2 - k^2)/p^2$.

Для того чтобы регистрация колебаний станины совершалась возможно точнее, надо, чтобы амплитуда колебаний ξ груза по отношению к станине и амплитуда колебаний x_e станины по отношению к неподвижной оси x были примерно равны, т.е. $b \approx b(p^2 - k^2)/p^2$, или $(p^2 - k^2)/p^2 \approx 1$. Для выполнения этого условия надо принять $k \ll p$. Учитывая, что $k = \sqrt{c/m}$, замечаем, что следует выбирать пружину с малым коэффициентом жесткости c.

Задача 8.49. Материальная точка (массой m) брошена с поверхности Земли на широте λ вертикально вверх со скоростью v (рис).

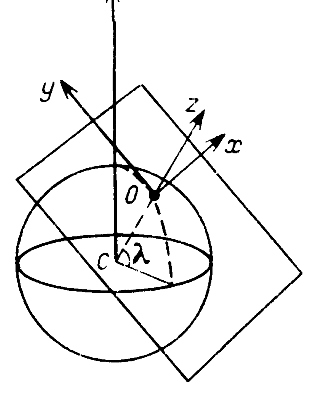
Определить отклонение точки к западу после возвращения ее на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Введем в начальном положении точки движущуюся вместе с Землей систему координат, где ось x направлена по касательной к параллели на восток, ось y – по касательной к меридиану на север и ось z – вертикально вверх (уточнение см. далее). На точку действуют сила тяжести mg и две силы инерции – центробежная (переносная) и кориолисова, которые нужно ввести вследствие того, что рассматривается относительное движение в подвижной системе координат.

Однако обычно при рассмотрении движений на вращающейся Земле центробежную силу обьединяют с силой тяжести в одну "приведенную" силу тяжести, направленную по местной вертикали. Это направление и является направлением оси z. Следовательно, сила тяжести и центробежная сила инерции в сумме равны:

$$P_1 = mg, \qquad (1)$$

где P_1 направлена по оси z в отрицательную сторону, а g – местное ускорение свободного падения (включающее в себя центробежное ускорение). Сила P_1 направлена вниз, поскольку на поверхности Земли центробежное ускорение много меньше ускорения от притяжения Земли.



К задаче 8 49

Следует иметь в виду, что такое упрощение возможно, только если скорость **v** достаточно мала, т.е. движение ограничивается областью вблизи начального положения точки, поскольку иначе нужно учитывать различную зависимость силы притяжения и центробежной силы от координат (сила тяжести обратно пропорциональна расстоянию до центра Земли, центробежная сила прямо пропорциональна расстоянию от оси вращения) и различие их направлений.

Таким образом, в указанном приближении кроме "кажущейся" силы тяжести нужно учитывать только силу инерции Кориолиса

$$J_c = -2m(\vec{\omega} \times \mathbf{v}_r), \tag{2}$$

где $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения Земли (малая величина), а $\mathbf{v}_r(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ – относительная скорость точки. Следует отметить, что $|J_c| \ll |P_1|$ при принятых условиях, так как и $\vec{\omega}$, и $\mathbf{v}_r$ – величины малые.

Дифференциальные уравнения движения точки получаются из векторного уравнения

$$m\boldsymbol{a}_r = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{R}$ – равнодействующая сил, действующих на точку:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{J}_c. \tag{4}$$

Проекции силы $\boldsymbol{P}_1$ на оси равны

$$P_{x_1} = 0, \quad P_{y_1} = 0, \quad P_{z_1} = -mg. \tag{5}$$

Для нахождения проекций силы J_c нужно найти проекции угловой скорости $\vec{\omega}$. Очевидно, эта углсвая скорость лежит в плоскости $y0z$ и образует угол λ, равный широте, с осью $0x$. Следовательно,

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega\cos\lambda, \quad \omega_z = \omega\sin\lambda. \tag{6}$$

Тогда проекции векторного произведения

$$\vec{\omega} \times \mathbf{v}_r = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & \omega\cos\lambda & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \tag{7}$$

будут

$$(\vec{\omega} \times \mathbf{v}_r)_x = \omega\cos\lambda \cdot \dot{z} - \omega\sin\lambda \cdot \dot{y}, \tag{8}$$

$$(\vec{\omega} \times \mathbf{v}_r)_y = \omega\sin\lambda \cdot \dot{x}, \tag{9}$$

$$(\vec{\omega} \times \mathbf{v}_r)_z = -\omega\sin\lambda \cdot \dot{x}. \tag{10}$$

Отсюда для проекции силы Кориолиса имеем

$$J_{cx} = -2m\omega(\cos\lambda \cdot \dot{z} - \sin\lambda \cdot \dot{y}), \tag{11}$$

$$J_{cy} = -2m\omega\sin\lambda \cdot \dot{x}, \tag{12}$$

$$J_{cz} = -2m\omega\cos\lambda \cdot \dot{x}. \tag{13}$$

Проектируя теперь уравнение (3) на оси координат, учитывая (4), (5) и (11)–(13) и сокращая на m, получим деференциальные уравнения дви-

жения

$$\ddot{x} = 2\omega(\sin\lambda\cdot\dot{y} - \cos\lambda\cdot\dot{z}), \qquad (14)$$

$$\ddot{y} = -2\omega\sin\lambda\cdot\dot{x}, \qquad (15)$$

$$\ddot{z} = -g - 2\omega\cos\lambda\cdot\dot{x}. \qquad (16)$$

Эту систему нужно проинтегрировать при начальных условиях

$$x|_{t=0} = y|_{t=0} = z|_{t=0} = 0, \qquad (17)$$

$$\dot{x}|_{t=0} = \dot{y}|_{t=0} = 0, \quad \dot{z}|_{t=0} = v, \qquad (18)$$

поскольку точка в начальный момент находится в начале координат и движется вдоль оси z со скоростью $\mathbf{v}$.

Интегрировать систему будем методом последовательных приближений. Очевидно, что в начальный момент $|\dot{y}| \ll |\dot{z}|$, $|\dot{x}| \ll |\dot{z}|$ и, как указывалось выше, $|\omega\dot{x}| \ll g$.

Отбросим в правой части уравнения (16) второе слагаемое. Тогда

$$\ddot{z} = -g, \qquad (19)$$

откуда

$$\dot{z} = -gt + C_1; \qquad (20)$$

из начального условия (18) имеем

$$\dot{z}|_{t=0} = C_1 = v. \qquad (21)$$

Таким образом,

$$\dot{z} = v - gt. \qquad (22)$$

Учитывая, что $|\dot{y}| \ll |\dot{z}|$, отбросим в правой части уравнения (14) первое слагаемое. Получаем, учитывая (22),

$$\ddot{x} = -2\omega\cos\lambda\cdot\dot{z} = -2\omega\cos\lambda(v - gt). \qquad (23)$$

Интегрируя, находим

$$\dot{x} = -2\omega\cos\lambda\cdot\left(vt - \frac{gt^2}{2}\right) + C_2. \qquad (24)$$

Из начального условия (18) получаем

$$\dot{x}|_{t=0} = 0 + C_2 = 0. \qquad (25)$$

Из (24) и (25) имеем

$$\dot{x} = -2\omega\cos\lambda\cdot\left(vt - \frac{gt^2}{2}\right). \qquad (26)$$

Подставляя (26) в уравнение (15), получаем

$$\ddot{y} = -2\omega\sin\lambda\cdot 2\omega\cos\lambda\left(vt - \frac{gt^2}{6}\right). \quad (27)$$

Интегрируя (27), имеем

$$\dot{y} = -4\omega^2\sin\lambda\cos\lambda\left(\frac{vt^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right) + C_3. \quad (28)$$

И из начального условия (18) получаем

$$\dot{y}|_{t=0} = 0 + C_3 = 0, \quad (29)$$

поэтому

$$\dot{y} = -4\omega^2 t^2\sin\lambda\cos\lambda\left(\frac{vt^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right). \quad (30)$$

Полученные выражения (22), (26) и (30) оправдывают первоначальные предположения, поскольку $\dot{x}$ отличается от $\dot{z}$ множителем порядка ωt, а $\dot{y}$ – множителем порядка $\omega^2 t^2$, которые являются малыми вследствие малости угловой скорости Земли и времени движения точки (определяемого начальной скоростью).

Для определения уравнений движения интегрируем соотношения (22), (26) и (30) еще раз. Имеем из (22)

$$z = vt - \frac{gt^2}{2} + C_4. \quad (31)$$

Начальное условие (17) дает

$$x|_{t=0} = 0 + C_4 = 0. \quad (32)$$

Окончательно получим

$$z = vt - \frac{gt^2}{2} \quad (33)$$

– известную формулу, включающую в себя, как указано выше, предположение об однородности поля сил тяготения и центробежных сил, причем величина g учитывает значение центробежного ускорения в данной точке земной поверхности.

Из (26) получаем

$$x = -2\omega\cos\lambda\left(\frac{vt^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right) + C_5. \quad (34)$$

Используя начальное условие (17), находим

$$x|_{t=0} = 0 + C_5 = 0, \tag{35}$$

откуда

$$x = -2\omega\cos\lambda\left(\frac{vt^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right). \tag{36}$$

Наконец, из (30) получим

$$y = -4\omega^2\sin\lambda\cos\lambda\left(\frac{vt^3}{6} - \frac{gt^4}{24}\right) + C_6. \tag{37}$$

Из начального условия (17) имеем

$$y|_{t=0} = 0 + C_6 = 0. \tag{38}$$

Следовательно,

$$y = -4\omega^2\sin\lambda\cos\lambda\left(\frac{vt^2}{6} - \frac{gt^4}{24}\right). \tag{39}$$

Уравнения (33), (36) и (39) и представляют собой уравнения движения точки в первом приближении. При этом z является конечной величиной, x имеет порядок ω, а y – порядок ω^2.

Можно рассмотреть приближение x с точностью до ω^2, но, как указывает Аппель (Теоретическая механика. Т. II. – М.: Физматгиз, 1960. – С. 254), в этом случае нужно учесть изменение силы тяжести в зависимости от координат и притяжения Луны (а возможно, и форму Земли).

Чтобы найти положение точки по ее возвращении на поверхность Земли, считаем участок плоским (это оправдано малостью отклонений от вертикали). Тогда в момент возвращения $z = 0$, и из (33) имеем

$$z = vt - \frac{gt^2}{2} = 0, \tag{40}$$

откуда для момента возвращения t_1 получим

$$t_1 = \frac{2v}{g}. \tag{41}$$

Подстановка в (36) дает

$$x_1 = -2\omega\cos\lambda\left(v\frac{4v^2}{2g^2} - g\frac{8v^3}{6g^3}\right) = -\frac{4}{3}\,\frac{\omega v^3\cos\lambda}{g^2}. \tag{42}$$

Знак "минус" указывает, что это – отклонение к западу (ось Ox направле-

на на восток). Величина x_1 очень мала для небольших значений v. Например, при $v = 10$ м/с имеем на широте Ленинграда

$$x_1 = -\frac{4}{3}\cdot 0{,}727\cdot 10^{-4}\cdot\frac{10^3\cdot\cos 60^\circ}{9{,}8^2} = 0{,}5\cdot 10^{-3}\text{ м} = 0{,}5\text{ мм}. \qquad (43)$$

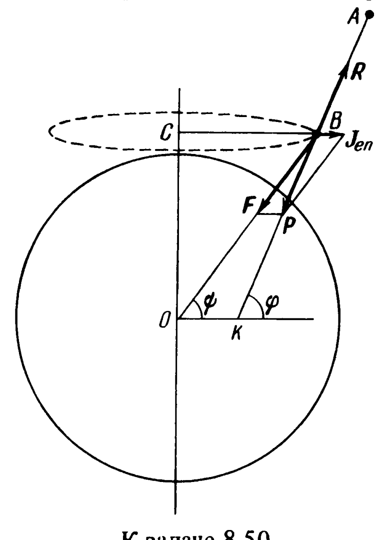
Подстановка (41) в (39) дает

$$y_1 = -4\omega^2\sin\lambda\cos\lambda\left(v\frac{8v^3}{6g^3} - g\frac{16v^4}{24g^4}\right) = -\frac{4}{3}\,\frac{\omega^2 v^4\sin 2\lambda}{g^3}. \qquad (44)$$

Эта величина много меньше x_1 (для небольших значений v), поскольку в выражение (41) выходит ω^2. Знак "минус" указывает на отклонение к югу (так как ось y направлена на север).

Задача 8.50. С вертолета A, находящегося в покое по отношению к Земле, сброшена веревочная лестница. За нижний конец лестницы ухватился снимаемый с льдины человек массой m.

Определить реакцию $\boldsymbol{R}$ лестницы, если сила тяготения Земли $\boldsymbol{F}$ по модулю равна $F = mg^*$ и направлена к центру Земли. Радиус Земли, приближенно принимаемый за шар, равен R. Массой лестницы пренебречь.



К задаче 8.50

Решение. Проведем на рисунке ось через точку B, схематизирующую человека, и центр O Земли. Эта ось образует угол ψ с экваториальной плоскостью Земли (угол ψ – геоцентрическая широта местности).

Человек находится в состоянии относительного покоя по отношению к Земле. Земля совершает равномерное переносное вращение вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 0{,}00007$ рад/с.

Применим уравнение (6*) динамики относительного покоя материальной точки:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_h + \boldsymbol{J}_e. \qquad (1)$$

К человеку приложены: $\boldsymbol{F}$ – силя тяготения, $\boldsymbol{R}$ – реакция лестницы, $\boldsymbol{J}_e$ – переносная сила инерции. Сила $\boldsymbol{F}$ направлена вдоль оси BO от B к O, реакция $\boldsymbol{R}$ – вдоль лестницы от B к A. Переносная сила инерции равна сумме: $\boldsymbol{J}_e = \boldsymbol{J}_{en} + \boldsymbol{J}_{e\tau}$, где $\boldsymbol{J}_{en} = -m\boldsymbol{a}_{en}$, $\boldsymbol{J}_{e\tau} = -m\boldsymbol{a}_{e\tau}$. Так как угловая скорость ω вращения Земли вокруг своей оси постоянна, то угловое ускорение ϵ равно нулю. Значит, ускорение $\boldsymbol{a}_{e\tau}$, а также сила инерции $\boldsymbol{J}_{e\tau}$ равны нулю. Поэтому $\boldsymbol{J}_e = \boldsymbol{J}_{en}$. В переносном вращении вокруг земной оси точка B описывает окружность радиуса $h = CB = R\cos\psi$. Ускорение $\boldsymbol{a}_{en}$

направлено вдоль радиуса от B к C и по модулю равно

$$a_{en} = l\omega^2 = R\omega^2 \cos\psi. \qquad (2)$$

Центробежная сила инерции $\boldsymbol{J}_{en}$ направлена противоположно ускорению $\boldsymbol{a}_{en}$ (рис.), причем $\boldsymbol{J}_{en} = m\boldsymbol{a}_{en}$. Использовав результат (2), получим

$$J_{en} = mR\omega^2 \cos\psi. \qquad (3)$$

В соответствии с уравнением (1) векторная сумма сил $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{J}_{en}$ равна нулю. Значит, сумма сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{J}_{en}$ уравновешивается реакцией $\boldsymbol{R}$ лестницы. Сумма сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{J}_e$ равна силе тяжести $\boldsymbol{P}$ материальной точки:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{J}_{en}. \qquad (4)$$

Таким образом, измеряя модуль силы тяжести $\boldsymbol{P}$ материальной точки, учитывают влияние центробежной силы инерции $\boldsymbol{J}_{en}$ на силу тяготения F.

Сила $\boldsymbol{P}$ по модулю равна $P = mg$. Напомним, что модуль силы F тяготения равен $F = mg^*$. Значит, ускорение силы тяжести g, значение которого легко найти в справочных таблицах, отлично от g^*, ибо в нем учтено вляние центробежной силы инерции $\boldsymbol{J}_{en}$.

Искомая реакция $\boldsymbol{R}$ лестницы уравновешивается силой тяжести $\boldsymbol{P}$, т.е. $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{P}$. Использовав формулу (4), найдем $\boldsymbol{R} = -(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{J}_{en})$.

Направление линии действия сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ называется *вертикалью* в данной точке земной поверхности. Угол φ (рис.), образованный вертикалью BK и экваториальной плоскостью Земли, предопределяет собой географическую широту местности.

Определим отношение модулей сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{J}_{en}$. Учтя, что $P = mg$ и использовав формулу (3), получим

$$\frac{J_{en}}{P} = \frac{R\omega^2}{g} \cos\psi.$$

При числовых данных: $R = 6370$ км, $\omega = 0{,}00007$ рад/с, $g = 9{,}82$ м/с^2 имеем $R\omega^2/g \approx 1/290$. Поэтому влияние центробежной силы инерции J_{en} незначительно. В технических расчетах, пренебрегая силой J_{en}, считают $\boldsymbol{P} \approx \boldsymbol{F}$. Полагая $\varphi \approx \psi$, можно приближенно направить силу тяжести $\boldsymbol{P}$ вдоль оси BO, проходящей через данную материальную точку и центр O Земли.

Задача 8.51. Материальная точка массой m брошена со скоростью $\mathbf{v}$ вдоль гладкой горизонтальной плоскости.

Определить относительную траекторию, которую опишет точка (вследствие вращения Земли), и ее скорость в этом движении.

Р е ш е н и е. *Способ 1.* Заданная плоскость представляется касательной к поверхности Земли (это будет уточнено далее). Проведем ось z перпендикулярно этой плоскости, оси x, y — в плоскости (ось y — касательная к меридиану, ось x — касательная к параллели). Эти оси образуют подвижную систему координат, вращающуюся вместе с Землей вокруг ее оси

с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Эта угловая скорость образует с осью z угол $90° - \lambda$, дополнительный к широте места λ, поскольку $\vec{\omega}$ направлена вдоль земной оси к Северному полюсу, а угол λ (широта) образован местной вертикалью с плоскостью экватора.

Начало координат расположим в начальном положении точки (это играет роль, если нужно получить уравнения движения и уравнения траектории. Для ответа на вопрос задачи начальные условия несущественны). Будем считать, что в начальный момент скорость точки образует угол α с осью $0x$.

На точку действуют две силы – сила тяжести mg и нормальная реакция плоскости N (плоскость гладкая и сила трения отсутствует). Поскольку мы рассматриваем относительное движение по отношению к подвижной системе координат, то к этим силам нужно добавить еще и две силы инерции – центробежную (переносную) силу J_1 и силу ускорения Кориолиса

$$J_c = -2m(\vec{\omega} \times \mathbf{v}_r), \tag{1}$$

где m – масса точки, $\mathbf{v}_r$ – относительная скорость.

Однако обычно при рассмотрении движений (и равновесия) на вращающейся Земле силу тяжести и центробежную силу объединяют в одну "приведенную" силу тяжести $mg + J_1$ и считают "истинной" вертикалью направление этой равнодействующей, а горизонтальной плоскостью (о которой идет речь в условии задачи) считают плоскость, перпендикулярную этой вертикали. Поэтому при рассмотрении движения по горизонтальной плоскости силы mg и J_1 можно не учитывать (они уравновешиваются нормальной реакцией плоскости).

Нужно, однако, иметь в виду, что все это возможно только в том случае, если рассматривается малый участок плоскости. Иначе как сила mg (зависящая от расстояния от центра Земли), так и сила J_1 (зависящая от расстояния от оси вращения) начинают зависеть от координат точки, и задача становится очень сложной.

В рассматриваемом приближении движение в плоскости происходит только под действием силы Кориолиса. Эту силу также можно разложить на две составляющие. Для этого разложим угловую скорость $\vec{\omega}$ на компоненты, параллельную и перпендикулярную плоскости:

$$\omega = \omega_{\parallel} + \omega_{\perp}. \tag{2}$$

Здесь

$$\omega_{\parallel} = \omega_y = \omega \cos \lambda, \tag{3}$$

$$\omega_{\perp} = \omega_z = \omega \sin \lambda, \tag{4}$$

поскольку $\vec{\omega}$, очевидно, лежит в плоскости yOz (в плоскости меридиана) и, как было указано выше, образует с осью z угол $90° - \lambda$.

Тогда сила Кориолиса также разложится на две:

$$J_c = J_{c1} + J_{c2}, \tag{5}$$

где

$$J_{c1} = -2m(\vec{\omega}_{\parallel} \times \mathbf{v}_r), \tag{6}$$

$$J_{c2} = -2m(\vec{\omega}_{\perp} \times \mathbf{v}_r). \tag{7}$$

В выражении (6) оба сомножителя лежат в рассматриваемой плоскости; следовательно, эта сила перпендикулярна этой плоскости и, как и силы mg, J_1, N, может не учитываться (разумеется, если скорость $\mathbf{v}_r$ не настолько велика, что эта сила может быть больше силы тяжести и "поднять" точку при определенном направлении движения "над плоскостью", но такой случай, естественно, здесь не учитывается).

Таким образом, на движение точки влияет только сила J_2. Эта сила перпендикулярна $\vec{\omega}_1$ и, следовательно, лежит в данной плоскости. Она также перпендикулярна $\mathbf{v}_r$ и, следовательно, изменять модуль $\mathbf{v}_r$ не может. Отсюда $|\mathbf{v}_r| = \text{const}$, или $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ – первоначально заданная относительная скорость.

Радиус кривизны траектории можно определить, приравняв произведение массы на центростремительное ускорение модулю силы J_2:

$$\frac{mv^2}{\rho} = |J_2|, \tag{8}$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

Так как $\mathbf{v}_r \perp \vec{\omega}_{\perp}$, имеем из (7) и (4)

$$|J_2| = 2mv\omega \sin\lambda.$$

Подставляя в (8), получаем

$$m\frac{v^2}{\rho} = 2mv\omega\sin\lambda, \quad \rho = \frac{v}{2\omega\sin\lambda} = \text{const}.$$

Поскольку радиус кривизны траектории постоянен, то это – окружность.

Заметим, что все эти рассуждения применимы и к более сложному случаю, о котором упоминалось выше, но в этом случае речь будет идти только о начальном участке траектории.

Способ 2. Можно избежать рассуждений, приведенных выше, если использовать естественные уравнения движения (на плоскости):

$$m\frac{dv_r}{dt} = R_\tau, \tag{9}$$

$$m\frac{v_r^2}{\rho} = R_n. \tag{10}$$

где R_τ и R_n – проекции равнодействующей (которая здесь сводится к силе J_2) на касательную и нормаль к траектории. Начальное условие имеет вид

$$v_r|_{t=0} = 0.$$

По указанной выше причине

$$R_\tau = 0, \quad R_n = 2mv_r\omega\sin\lambda,$$

причем n нужно направить в сторону, противоположную направлению $\vec{\omega}\times\mathbf{v}_r$.

Из (9) имеем

$$\frac{dv_r}{dt} = 0,$$

т.е. $v_r = \text{const} = v$, и далее, как выше.

Для получения уравнений движения нужно проинтегрировать дифференциальные уравнения относительного движения

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{R}.$$

Поскольку рассматривается движение только в плоскости xOy, необходимы только два уравнения·

$$m\ddot{x} = R_x, \quad m\ddot{y} = R_y. \tag{11}$$

Как указано выше, проекции на плоскость xOy дает только сила J_2, т

$$R_x = J_{2x}, \quad R_y = J_{2y}.$$

Поскольку $\vec{\omega}_1$ имеет только одну проекцию ω_z, а проекции $\mathbf{v}_r$ равны $\dot{x}$ и $\dot{y}$, имеем

$$J_{2x} = -2m(\vec{\omega}_1 \times \mathbf{v}_r)_x = -2m(-\omega_z\dot{y}) = 2m\omega\dot{y}\sin\lambda,$$
$$J_{2y} = -2m(\vec{\omega}_1 \times \mathbf{v}_r)_y = -2m(+\omega_z\dot{x}) = -2m\omega\dot{x}\sin\lambda.$$

Подставляя в уравнения (11), получаем, сокращая на m,

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\lambda, \tag{12}$$
$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\lambda. \tag{13}$$

Эту систему нужно проинтегрировать при начальных условиях:
при $t = 0 \quad x_0 = y_0 = 0, \;\; \dot{x}_0 = v\cos\alpha, \;\; \dot{y}_0 = v\sin\alpha.$ (14)

Для упрощения интегрирования уравнений (12) и (13) умножим обе части второго уравнения (14) на мнимую единицу i и введем новую комплексную переменную

$$z = x + iy \tag{15}$$

(обозначение z для комплексной переменной допустимо, поскольку координата z далее не встречается).

Тогда

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}, \qquad \ddot{z} = \ddot{x} + i\ddot{y}. \qquad (16)$$

После умножения уравнения (13) на i и сложения его с уравнением (12) имеем

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = 2\omega\sin\lambda\cdot(\dot{y} - i\dot{x}) = -i\cdot 2\omega\sin\lambda\cdot(\dot{x} + i\dot{y})$$

(поскольку $i^2 = -1$), и в соответствии с (16)

$$\ddot{z} = -i\cdot 2\omega\sin\lambda\cdot\dot{z}. \qquad (17)$$

Это уравнение нужно проинтегрировать при начальных условиях, вытекающих из (14):

$$z|_{t=0} = x|_{t=0} + iy|_{t=0} = 0, \qquad (18)$$

$$\dot{z}|_{t=0} = \dot{x}|_{t=0} + i\dot{y}|_{t=0} = v\cos\alpha + iv\sin\alpha = ve^{i\alpha} \qquad (19)$$

(в (19) использована формула Эйлера $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$).

Составляя для уравнения с постоянными коэффициентами (17) характеристическое уравнение

$$k^2 = -i\cdot 2\omega\sin\lambda\cdot k,$$

получаем его корни $k_1 = 0$, $k_2 = -i\cdot 2\omega\sin\lambda$. Тогда общее решение можно искать в виде

$$z = C_1 + C_2 e^{-i\cdot 2\omega\sin\lambda\cdot t}. \qquad (20)$$

Согласно начальному условию (18), имеем

$$z|_{t=0} = C_1 + C_2 = 0,$$

$$C_1 = -C_2. \qquad (21)$$

Далее из (20) получаем

$$\dot{z} = -iC_2\cdot 2\omega\sin\lambda\cdot e^{-i\cdot 2\omega\sin\lambda\cdot t}.$$

Из начального условия (19) получаем

$$-iC_2\cdot 2\omega\sin\lambda = ve^{i\alpha},$$

т.е.

$$C_2 = i\frac{v}{2\omega\sin\lambda}e^{i\alpha}. \qquad (22)$$

Подставив (22) и (21) в (20), найдем

$$z = C_2(e^{-i\cdot 2\omega\sin\lambda\cdot t} - 1) = i\frac{v}{2\omega\sin\lambda}e^{i\alpha}(e^{-i\cdot 2\omega\sin\lambda\cdot t} - 1).$$

Разделяя в этом выражении вещественную и мнимую части, в соответствии с (15) получаем уравнения движения.

Для упрощения повернем оси так, чтобы направление начальной скорости совпало с осью Ox. Тогда $\alpha = 0$ и $e^{i\alpha} = 1$. В этом случае

$$z = i\frac{v}{2\omega \sin\lambda}(e^{-i\cdot 2\omega\sin\lambda\cdot t} - 1) =$$

$$= i\frac{v}{2\omega\sin\lambda}[\cos(2\omega\sin\lambda\cdot t) - i\sin(2\omega\sin\lambda\cdot t) - 1], \qquad (23)$$

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{v}{2\omega\sin\lambda}\sin(2\omega\sin\lambda\cdot t), \qquad (24)$$

$$y = \operatorname{Im} z = \frac{v}{2\omega\sin\lambda}[\cos(2\omega\sin\lambda\cdot t) - 1]. \qquad (25)$$

Уравнения (24) и (25) представляют собой уравнения движения. Для получения уравнения траектории необходимо исключить время. Перенося в уравнении (25) в левую часть свободный член, возводя обе части уравнений в квадрат и складывая, получаем

$$x^2 + \left(y - \frac{v}{2\omega\sin\lambda}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{v}{2\omega\sin\lambda}\right)^2 [\sin^2(2\omega\sin\lambda\cdot t) + \cos^2(2\omega\sin\lambda\cdot t)] = \left(\frac{v}{2\omega\sin\lambda}\right)^2$$

– уравнение окружности.

Для нахождения скорости движения нужно продифференцировать уравнение (24) и (25). Тогда

$$v_{rx} = \dot{x} = \frac{v}{2\omega\sin\lambda}2\omega\sin\lambda\cos(2\omega\sin\lambda\cdot t) = v\cos(2\omega\sin\lambda\cdot t),$$

$$v_{ry} = \dot{y} = \frac{v}{2\omega\sin\lambda}(-2\omega\sin\lambda)\sin(2\omega\sin\lambda\cdot t) = -v\sin(2\omega\sin\lambda\cdot t).$$

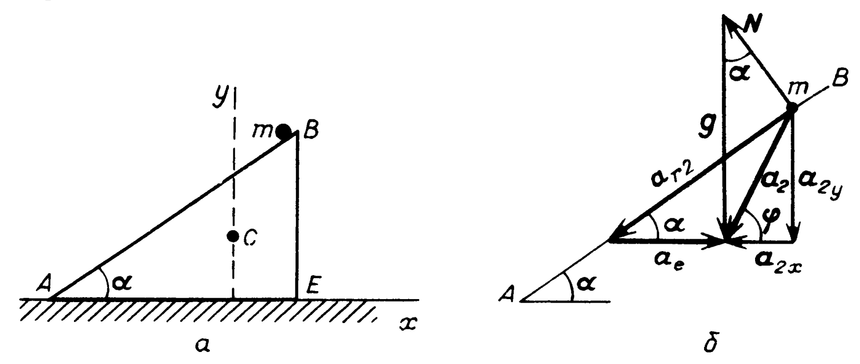
Отсюда

$$v_r = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v^2\cos^2(2\omega\sin\lambda\cdot t) + v^2\sin^2(2\omega\sin\lambda\cdot t)} = v.$$

Аналитический метод приводит, естественно, к тем же результатам, но значительно более сложным способом.

Задача 8.52. Треугольная призма ABE массой M лежит в абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. От вершины B спускается без начальной скорости точка массой m (рис. a).

Определить ускорение a_e призмы, абсолютное ускорение a точки, относительное ускорение a_r точки по отношению к призме. Найти траекторию абсолютного движения точки и силы давления на призму и призмы на горизонтальную плоскость.



К задаче 8.52

Р е ш е н и е. Обозначим буквой C общий центр масс призмы и точки. Так как внешние силы, действующие на систему, – силы тяжести призмы и точки, реакция абсолютно гладкой горизонтальной плоскости – направлены по вертикали, то, согласно теореме о движении центра масс,

$$(M + m)\ddot{x}_C = 0, \qquad (1)$$

откуда $\dot{x}_C$ = const.

Но в начальный момент времени система находилась в покое и, значит, $\dot{x}_C = 0$. Следовательно,

$$x_C = \frac{Mx_1 + mx_2}{M+m} = \text{const}.$$

Выбираем оси координат: ось x – по горизонтальной плоскости, ось y – по вертикали, проходящей через центр масс C. Тогда $x_C = 0$ и

$$Mx_1 = -mx_2. \qquad (2)$$

Вычисляя вторые производные от обеих частей равенства (2), имеем

$$M\ddot{x}_1 = -m\ddot{x}_2. \qquad (3)$$

Здесь $\ddot{x}_1$ – ускорение призмы, направленное вправо, $\ddot{x}_2$ – проекция ускорения точки m на ось x, направленная влево.

Примем движение призмы за переносное движение, движение точки m по наклонной плоскости BA – за относительное движение. Тогда $\ddot{x}_1$ будет для точки m переносным ускорением. Так как переносное движение

поступательное, то теорема сложения ускорений для точки m будет (ускорение Кориолиса равно нулю) иметь вид

$$a_2 = a_e + a_{r2}, \tag{4}$$

где $a_e = \ddot{x}_1$. Из (4) находим относительное ускорение точки m:

$$a_{r2} = a_2 - a_e.$$

Абсолютное ускорение точки m состоит из ускорения g и ускорения, сообщаемого реакцией наклонной плоскости N. Составляющие абсолютного ускорения точки m равны (рис. *б*)

$$a_{2x} = \frac{N}{m}\sin\alpha, \tag{5}$$

$$a_{2y} = g - \frac{N}{m}\cos\alpha. \tag{6}$$

Но, согласно (3),

$$a_{2x} = \ddot{x}_2 = \frac{N}{m}\ddot{x}_1. \tag{7}$$

Приравнивая правые части (5) и (7)

$$\frac{N}{m}\sin\alpha = \frac{M}{m}\ddot{x}_1,$$

получаем

$$N = \frac{M\ddot{x}_1}{\sin\alpha}. \tag{8}$$

Находим далее (рис. *б*)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_{2y}}{a_e + a_{2x}}.$$

Внося в это уравнение найденные ранее значения (6) и (7), получаем

$$a_e = g\frac{m\cos\alpha\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}.$$

Далее, согласно (5) и (8), находим

$$a_{2x} = \frac{M}{m}a_e = g\frac{M\cos\alpha\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \quad N = \frac{Ma_e}{\sin\alpha} = \frac{Mmg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}.$$

Воспользовавшись (6), получим

$$a_{2y} = g\frac{(M+m)\sin^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}.$$

Абсолютное ускорение точки m равно

$$a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = \frac{g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}\sqrt{M^2+(2M+m)m\sin^2\alpha},$$

а его направление определяется формулой (рис. *б*)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_{2y}}{a_{2x}} = \frac{M+m}{M}\operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда видно, что угол φ постоянен. Следовательно, траектория точки m – прямая, образующая угол φ с горизонтом.

Относительное ускорение (рис. *б*) равно

$$a_{r2} = \frac{a_{2y}}{\sin\alpha} = g\frac{(M+m)\sin^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}.$$

Сила давления призмы на горизонтальную плоскость равна сумме проекций на ось y всех внешних сил, действующих на призму:

$$N_1 = Mg + N\cos\alpha = \frac{M(M+m)g}{M+m\sin^2\alpha}.$$

Эта задача была рассмотрена впервые Иоганном Бернулли и Леонардом Эйлером.

Задача 8.53. На неподвижной гладкой плоскости, образующей угол α с горизонтом, лежит гладкий клин (массой m_1) с углом при вершине β. На его верхней гладкой грани лежит материальная точка массой m. В начальный момент времени ребро B клина находится в положении A, а точка m – в положении C и в состоянии покоя. Затем груз и клин предоставлены действию сил тяжести (рис.).

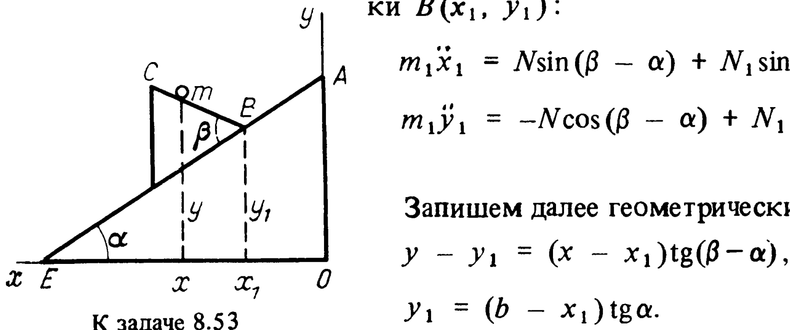
Определить: а) уравнение движения клина по наклонной плоскости; б) уравнение движения груза m по грани клина; в) траекторию абсолютного движения точки m; г) силу давления N между грузом m и клином; д) силу давления N_1 между клином и неподвижной наклонной плоскостью.

Решение. Составим дифференциальные уравнения движения точки $m(x, y)$:

$$m\ddot{x} = -N\sin(\beta - \alpha), \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = N\cos(\beta - \alpha) - mg. \tag{2}$$

Клин движется поступательно. Поэтому можно составить дифференциальные уравнения движения для любой его точки, например для точки $B(x_1, y_1)$:



К задаче 8.53

$$m_1\ddot{x}_1 = N\sin(\beta - \alpha) + N_1\sin\alpha, \qquad (3)$$

$$m_1\ddot{y}_1 = -N\cos(\beta - \alpha) + N_1\cos\alpha - m_1 g. \qquad (4)$$

Запишем далее геометрические уравнения:

$$y - y_1 = (x - x_1)\operatorname{tg}(\beta - \alpha), \qquad (5)$$

$$y_1 = (b - x_1)\operatorname{tg}\alpha. \qquad (6)$$

Здесь введено обозначение $b = OE$. Дифференцируя дважды по времени уравнения (5) и (6), находим

$$\ddot{y} - \ddot{y}_1 = (\ddot{x} - \ddot{x}_1)\operatorname{tg}(\beta - \alpha), \qquad (7)$$

$$\ddot{y}_1 = -\ddot{x}_1\operatorname{tg}\alpha. \qquad (8)$$

Решая совместно уравнения (1)–(4) и уравнения (7), (8), исключаем неизвестные силы давления N и N_1. Тогда находим

$$\ddot{x} = -g\frac{m_1\cos\beta\cos\alpha\sin(\beta - \alpha)}{m_1 + m\sin^2\beta}, \qquad (9)$$

$$\ddot{y} = -g\left[1 - \frac{m_1\cos\beta\cos\alpha\cos(\beta - \alpha)}{m_1 + m\sin^2\beta}\right], \qquad (10)$$

$$\ddot{x}_1 = g\frac{\cos\alpha[m_1\sin\alpha + m\sin\beta\cos(\beta - \alpha)]}{m_1 + m\sin^2\beta}, \qquad (11)$$

$$\ddot{y}_1 = -g\frac{\sin\alpha[m_1\sin\alpha + m\sin\beta\cos(\beta - \alpha)]}{m_1 + m\sin^2\beta}. \qquad (12)$$

Находим далее ускорение a_1 клина по неподвижной наклонной плоскости. Обозначая $AB = s_1$, имеем

$$a_1 = \ddot{s}_1 = \frac{1}{\cos\alpha}\ddot{x}_1 = g\frac{m_1\sin\alpha + m\sin\beta\cos(\beta - \alpha)}{m_1 + m\sin^2\beta}. \qquad (13)$$

Ускорение клина постоянное. Следовательно, движение клина по наклонной плоскости равноускоренное:

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2. \qquad (14)$$

Относительное ускорение точки m по поверхности клина a_z равно

$$a_r = \ddot{s}, \tag{15}$$

где s – расстояние от точки C до материальной точки m. Обозначая $CB = l$, находим

$$(l - s)\cos(\beta - \alpha) = x - x_1. \tag{16}$$

Дифференцируя это равенство дважды по времени, получаем

$$a_r = \frac{1}{\cos(\beta - \alpha)}(-\ddot{x} + \ddot{x}_1) = g\frac{(m + m_1)\cos\alpha\sin\beta}{m_1 + m\sin^2\beta}. \tag{17}$$

Относительное ускорение постоянное. Следовательно, относительное движение равноускоренное:

$$s = \frac{1}{2}a_r t^2. \tag{18}$$

Траектория абсолютного движения точки m – прямая линия, так как угол φ ее наклона к горизонтали есть величина постоянная, причем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \frac{m_1 + m\sin^2\beta}{m_1\cos\alpha\cos\beta\sin(\beta - \alpha)} - \operatorname{ctg}(\beta - \alpha). \tag{19}$$

Находим далее из уравнения (1) силу давления точки на клин:

$$N = -\frac{m}{\sin(\beta - \alpha)}\ddot{x} = \frac{mm_1 g\cos\alpha\cos\beta}{m_1 + m\sin^2\beta}. \tag{20}$$

Пользуясь уравнениями (1) и (3), находим силу давления клина на наклонную плоскость:

$$N_1 = \frac{1}{\sin\alpha}(m\ddot{x} + m_1\ddot{x}_1) = \frac{m_1 g(m + m_1)\cos\alpha}{m_1 + m\sin^2\beta}. \tag{21}$$

Эта задача была впервые рассмотрена Леонардом Эйлером.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 33.1, 33.2, 33.4, 33.5, 33.7, 33.9, 33.10, 33.13, 33.14, 33.16, 33.17, 33.21.

Глава 9

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

§ 1. ГЕОМЕТРИЯ МАСС

1. Центр масс материальной системы. *Центром масс* (центром инерции) материальной системы называется точка, положение которой определяется радиусом-вектором r_C по формуле

$$r_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k r_k,$$

где $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – масса материальной системы (рис. 9.1).

Декартовы координаты центра масс материальной системы даются формулами:

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,$$
$$z_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k z_k. \qquad (1^*)$$

Понятие центра масс является обобщением понятия центра тяжести твердого тела $\left(r_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} p_k r_k\right)$ для случая системы материальных точек. Заметим, что положение центра тяжести твердого тела неизменно по отношению к точкам тела, в то время как положение центра масс системы, вообще говоря, меняется относительно отдельных материальных точек системы.

Центр масс системы материальных точек является более общим понятием, чем центр тяжести твердого тела. Действительно, нет смысла говорить о центре тяжести в условиях невесомости, тогда как понятие центра масс существует всегда.

Указание. Решение задач, в которых требуется определить уравнение траектории центра масс, следует проводить в следующем порядке:

1) выбрать систему координат;

2) записать координаты центров масс каждой из частей системы, выразив их в виде функций времени:

$$x_k = \varphi_k(t), \quad y_k = \psi_k(t), \quad z_k = \chi_k(t), \text{ где } k = 1, 2, \ldots, n;$$

3) определить координаты искомого центра масс материальной системы по формулам (1*); при этом x_C, y_C, z_C окажутся функциями времени, т.е. полученные формулы будут параметрическими уравнениями движения центра масс;

4) для нахождения явных уравнений траектории центра масс системы материальных точек надо из последних уравнений исключить время.

Задача 9.1. Найти уравнения движения и уравнение траектории в явном виде центра масс C кривошипно-ползунного механизма OAB с равными массами и длинами кривошипа и шатуна $OA = AB = l$. Масса ползуна B в два раза меньше массы кривошипа, который вращается с постоянной угловой скоростью ω. Кривошип и шатун считать тонкими однородными стержнями. Оси x и y изображены на рисунке.

Решение. В состав материальной системы входят три твердых тела: кривошип OA, шатун AB и ползун B.

Обозначим на рисунке положения центров масс: $C_1(x_1, y_1)$ — кривошипа, $C_2(x_2, y_2)$ — шатуна и $B(x_3, y_3)$ — ползуна. Заметим, что $OC_1 = C_1A = AC_2 = C_2B = l/2$. Положение кривошипа, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω, определим углом поворота $\varphi = \omega t$, отсчитываемого от оси x против хода часовой стрелки.

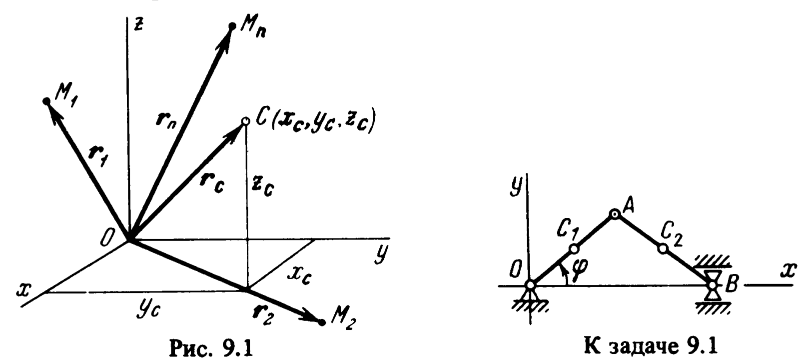


Рис. 9.1

К задаче 9.1

Запишем координаты точек C_1, C_2 и B, выразив их в зависимости от угла поворота $\varphi = \omega t$:

$$x_1 = \frac{1}{2} l\cos\omega t, \quad y_1 = \frac{1}{2} l\sin\omega t, \quad x_3 = \frac{3}{2} l\cos\omega t,$$
$$y_2 = \frac{1}{2} l\sin\omega t, \quad x_3 = 2l\cos\omega t, \quad y_3 = 0. \tag{1}$$

Формулы координат x_C и y_C центра масс

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k$$

в данном случае примут вид

$$x_C = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3), \quad y_C = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3), \qquad (2)$$

где m_1, m_2, m_3 — соответственно массы кривошипа, шатуна и ползуна, а $M = m_1 + m_2 + m_3$ — масса всей системы.

Внеся значения (1) в формулы (2) и приняв во внимание, что по условию $m_1 = m_2 = 2m_3$, найдем уравнения движения центра масс:

$$x_C = \frac{6}{5}l\cos\omega t, \quad y_C = \frac{2}{5}l\sin\omega t. \qquad (3)$$

Это — уравнения движения центра масс системы; исключив из них параметр ωt, получим уравнение траектории центра масс в координатах:

$$\frac{x_C^2}{(^6/_5\, l)^2} + \frac{y_C^2}{(^2/_5\, l)^2} = 1. \qquad (4)$$

Как следует из формулы (4), траекторией центра масс является эллипс с полуосями: $a = {}^6/_5\, l$, $b = {}^2/_5\, l$.

Указание. Рекомендуем решить задачи 34.1–34.3, 34.5, 34.6 из сборника задач по теоретической механике И.В. Мещерского.

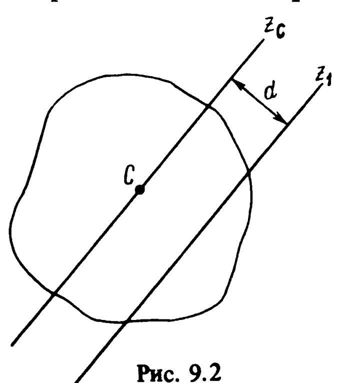


Рис. 9.2

2. Моменты инерции твердых тел. *Моментом инерции* I_z твердого тела относительно оси z называется сумма произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадраты их расстояний до оси, т.е.

$$I_z = \Sigma r^2 \cdot m.$$

Момент инерции относительно оси характеризует распределение масс материальных точек относительно этой оси. Момент инерции всегда положителен.

В некоторых частных случаях момент инерции относительно оси может обращаться в нуль. Например, момент инерции тонкого однородного стержня относительно продольной оси равен нулю, так как нулю равны расстояния точек стержня до этой оси.

В системе единиц СИ момент инерции измеряется в кг · м^2.

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел

Наименование	Схема тела	Момент инерции
Тонкий прямолинейный стержень	z, O, l, l	$I_z = \dfrac{Ml^2}{3}$
Кольцо (материальная окружность)	z, r	$I_z = Mr^2$
Тонкий круглый диск	y, z, r, x	$I_x = I_y = \dfrac{Mr^2}{4}$, $I_z = \dfrac{Mr^2}{2}$
Круглый цилиндр	z, O, l, l, y, x, r	$I_x = I_y = M\left(\dfrac{r^2}{4} + \dfrac{l^2}{3}\right)$, $I_z = \dfrac{Mr^2}{2}$
Шар	z, O, r, y, x	$I_x = I_y = I_z = \dfrac{2}{5}Mr^2$

При непрерывном распределении масс материальных точек в твердом теле момент инерции определяется формулой

$$I_z = \int_{(M)} r^2 dm.$$

В случае однородного твердого тела имеем

$$I_z = \frac{M}{V} \int_{(V)} r^2 dV,$$

где M – масса твердого тела, V – объем твердого тела, dV – элемент объема.

В таблице приведены примеры расчета моментов инерции некоторых однородных твердых тел.

Теорема Штейнера о зависимости между моментами инерции твердого тела относительно параллельных осей формулируется так: момент инерции твердого тела относительно оси равен сумме его момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести тела C, и произведения массы твердого тела на квадрат расстояния между параллельными осями (рис. 9.2), т.е.

$$I_z = I_{z_C} + Md^2. \qquad (2^*)$$

Радиусом инерции ρ твердого тела относительно оси называется величина, произведение квадрата которой на массу твердого тела равно моменту инерции твердого тела относительно этой оси, т.е.

$$I_z = M\rho^2.$$

Так, для шара $I_z = {}^2/_5 Mr^2 = M\rho^2$, откуда $\rho \approx 0{,}63r$.

Если в ходе решения задачи требуется вычислить момент инерции твердого тела относительно оси, не проходящей через центр масс, то проводят параллельную ось через центр масс твердого тела и применяют теорему Штейнера (при этом момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр масс, масса твердого тела и расстояние между параллельными осями должны быть известны).

Если надо вычислить момент инерции материальной системы, состоящей из нескольких твердых тел, причем момент инерции каждого из порознь взятых тел известен, то определяют момент инерции системы относительно некоторой оси как сумму моментов инерции всех твердых тел, входящих в систему, относительно той же оси.

При вычислении момента инерции однородной плоской фигуры (трехмерного твердого тела) относительно некоторой оси выделяют в плоской фигуре такую элементарную площадь (объем), момент инерции которой относительно соответствующей оси известен либо легко может быть подсчитан. Затем определяется искомый момент инерции однород-

ной плоской фигуры (твердого тела) путем суммирования моментов инерции всех элементарных площадей (объемов).

Момент инерции твердого тела относительно оси L, проходящей через данную точку, определяется формулой

$$I_L = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma -$$
$$- 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta,$$

где α, β и γ – соответственно углы между координатными осями x, y, z и осью L, относительно которой вычислен момент инерции твердого тела (рис. 9.3), I_x, I_y, I_z – осевые моменты инерции твердого тела, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} – *центробежные моменты инерции* твердого тела, определяемые формулами

$$I_{xy} = \Sigma mxy, \quad I_{yz} = \Sigma myz, \quad I_{zx} = \Sigma mzx.$$

В отличие от осевых моментов инерции твердого тела I_x, I_y, I_z, которые всегда положительны, центробежные моменты инерции могут быть также отрицательными и в частных случаях могут оказаться равными нулю.

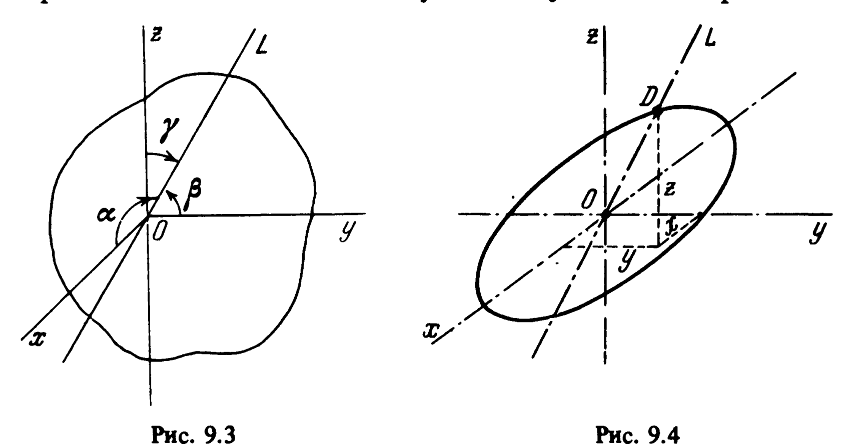


Рис. 9.3 Рис. 9.4

В случае непрерывного распределения масс в однородном твердом теле центробежные моменты инерции вычисляются по формулам

$$I_{xy} = \frac{M}{V}\iiint\limits_{(V)} xy\,dV, \quad I_{yz} = \frac{M}{V}\iiint\limits_{(V)} yz\,dV, \quad I_{zx} = \frac{M}{V}\iiint\limits_{(V)} zx\,dV,$$

где M – масса твердого тела, V – его объем, dV – элементарный объем. Интегрирование распространено по всему объему твердого тела.

В случае непрерывного распределения масс в однородной пластинке

$$I_{xy} = \frac{M}{S}\iint\limits_{(S)} xy\,dS, \quad I_{xz} = \frac{M}{S}\iint\limits_{(S)} xz\,dS, \quad I_{yz} = \frac{M}{S}\iint\limits_{(S)} yz\,dS,$$

где M – масса пластинки, S – площадь пластинки, dS – элементарная площадка. Интегрирование распространено по всей площади пластинки.

Проведем через точку O ось L и построим на ней точку D. Радиус-вектор OD равен

$$OD = \frac{1}{\sqrt{I_L}}.$$

Геометрическое место построенных таким образом точек D для всевозможных направлений оси L образует поверхность эллипсоида, называемого *эллипсоидом инерции в данной точке O* твердого тела (рис. 9.4).

Уравнение эллипсоида инерции в данной точке твердого тела имеет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy = 1,$$

где x, y и z – текущие координаты точек, лежащих на поверхности эллипсоида.

Через любую точку твердого тела можно провести пучок осей L и построить соответствующий эллипсоид инерции.

Если координатные оси x, y и z направить по осям эллипсоида инерции, то уравнение эллипсоида принимает каноническую форму:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1,$$

т.е. центробежные моменты инерции обращаются в нуль:

$$I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0.$$

Оси эллипсоида инерции в данной точке твердого тела называются *главными осями инерции*. Следовательно, в каждой точке твердого тела имеются три главные оси инерции, являющиеся осями соответствующего эллипсоида инерции.

Эллипсоид инерции в данной точке твердого тела построил впервые в 1827 г. французский математик и механик Огюстен Луи Коши (1789–1857).

Если координатные оси совпадают с главными осями инерции, то все центробежные моменты инерции I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} равны нулю. В этом случае получим следующую формулу для момента инерции твердого тела относительно оси L:

$$I_L = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ – направляющие косинусы оси L.

Пусть ось z является главной осью инерции для данной точки O. Если эта точка не является центром масс тела, то для любых других точек, лежащих на оси z, например O_1 и O_2, ось z не будет главной осью инерции твердого тела (рис. 9.5).

Если ось z является главной осью инерции твердого тела для точки O, а оси x и y не совпадают с осями эллипсоида для этой точки, то

$$I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad I_{xy} \neq 0.$$

Следует помнить, что оси x и y проходят через точку O и образуют совместно с осью z ортогональную систему осей координат.

Главная ось инерции, проходящая через центр масс твердого тела, называется *главной центральной осью инерции* и является главной в любой своей точке.

Если в твердом теле имеется плоскость материальной симметрии, то любая ось, перпендикулярная к этой плоскости, будет главной в точке пересечения с плоскостью.

Если в твердом теле имеется ось материальной симметрии, то она является главной осью инерции твердого тела.

Если два главных момента инерции равны, например $I_x = I_y$, то эллипсоид инерции будет эллипсоидом вращения вокруг оси z. Такое твердое тело имеет кинетическую симметрию относительно оси z. Английский механик и математик Эдуард Джон Раус (1831–1907) назвал такие тела *одноосными*. Все перпендикулярные оси z прямые являются главными осями инерции.

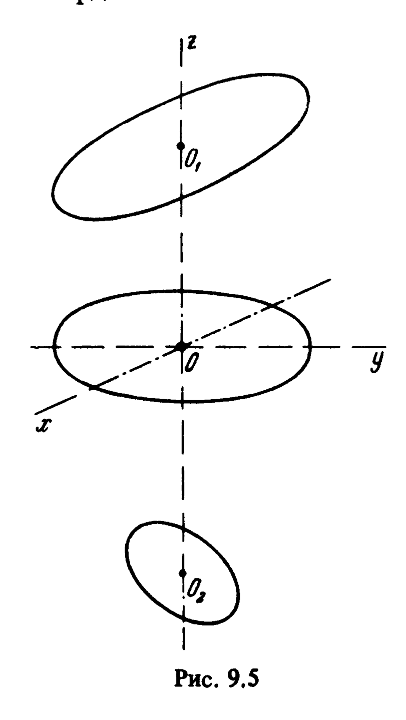


Рис. 9.5

Важное значение имеет эллипсоид инерции, относящийся к центру масс C твердого тела. Если известен момент инерции относительно оси, проходящей через C, то, пользуясь теоремой Штейнера, легко найти момент инерции относительно любой параллельной оси, находящейся на расстоянии d от первой. Эллипсоид инерции для центра масс французский математик и механик Луи Пуансо (1777–1859) назвал *центральным*.

При решении задач часто приходится пользоваться формулами, содержащими центробежные моменты инерции твердых тел (например; в задачах на определение давлений вращающегося твердого тела на ось вращения (гл. 10, § 3), в задачах об ударе по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси (гл. 12), в задачах динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки (том третий); для упрощения решения задач следует специально выбрать направление осей декартовых координат. Для этого требуется выяснить, нет ли в твердом теле оси материальной симметрии либо плоскости материальной симметрии.

При наличии в твердом теле оси материальной симметрии целесообразно одну из координатных осей направить по этой оси, которая и явится главной осью инерции. При наличии в твердом теле плоскости материальной симметрии надо одну из координатных осей направить перпендикулярно к плоскости материальной симметрии. Эта координатная ось является главной осью инерции твердого тела в точке пересечения с плоскостью материальной симметрии. При наличии главной оси инерции в данной точке твердого тела два центробежных момента инерции относительно осей, одной из которых является главная ось инерции, обращаются в нуль, и остается вычислить только третий центробежный момент инерции, не равный нулю. Так, если вдоль главной оси инерции направлена ось z, то $I_{zx} = I_{zy} = 0$ и остается вычислить только I_{xy}.

Иногда при вычислении центробежного момента инерции, например I_{xy}, бывает удобно осуществить поворот координатных осей x и y. Этим приемом целесообразно пользоваться в тех случаях, когда повернутые оси x_1 и y_1 оказываются главными и осевые моменты инерции твердого тела относительно них, т.е. I_{x_1} и I_{y_1}, известны, так как тогда искомый центробежный момент инерции оказывается функцией величин I_{x_1} и I_{y_1}.

Моментом инерции твердого тела относительно точки (*центра*) называется сумма произведений массы каждой точки на квадрат ее расстояния до центра. Момент инерции твердого тела относительно точки называют также *полярным* или *центральным моментом инерции*.

Моментом инерции твердого тела относительно плоскости называется сумма произведений массы m каждой точки твердого тела на квадрат ее расстояния d от плоскости (Σmd^2).

Если выбрать в точке O оси декартовых координат x, y, z, то моменты инерции относительно трех координатных плоскостей равны:

Σmx^2 (относительно плоскости yz),
Σmy^2 (относительно плоскости xz),
Σmz^2 (относительно плоскости xy).

Моменты инерции относительно осей координат x, y, z равны соответственно

$$I_x = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad I_y = \Sigma m(x^2 + z^2), \quad I_z = \Sigma m(x^2 + y^2).$$

Момент инерции относительно точки O начала координат равен

$$I_O = \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2).$$

В этих формулах сумма распространяется на все точки твердого тела, а x, y, z — координаты точек твердого тела.

Из этих формул следуют выводы:

а) *момент инерции относительно оси равен сумме моментов инерции относительно двух координатных плоскостей, пересечение которых*

определяет ось; например,

$$I_x = \Sigma my^2 + \Sigma mz^2 = \Sigma m(y^2 + z^2);$$

б) *момент инерции относительно точки равен полусумме моментов инерции относительно трех осей координат, начало которых находится в этой точке:*

$$I_O = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2);$$

в) *момент инерции относительно начала координат равен сумме моментов инерции относительно трех координатных плоскостей:*

$$I_0 = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 + \Sigma mz^2 = \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2);$$

г) *центробежные моменты инерции*

$$I_{yz} = \Sigma myz, \quad I_{zx} = \Sigma mzx, \quad I_{xy} = \Sigma mxy$$

выражаются через моменты инерции относительно плоскостей.

Докажем последнее утверждение. Обозначим буквами N и N_1 плоскости, которые делят пополам двугранные углы, образованные плоскостями $z0x$ и $z0y$. Уравнения этих плоскостей имеют вид

$$x + y = 0, \quad x - y = 0.$$

Обозначим буквами d и d_1 расстояния от точки массой $m(x, y, z)$ до этих плоскостей. Тогда имеют место соотношения

$$d^2 = \frac{1}{2}(x + y)^2, \quad d_1^2 = \frac{1}{2}(x - y)^2$$

и, следовательно,

$$I_{xy} = \frac{1}{2}(\Sigma md^2 - \Sigma md_1^2) = \Sigma mxy.$$

Оба члена, стоящие в правой части, — моменты инерции относительно плоскостей.

Иногда приходится рассматривать наряду с твердыми телами и системы материальных точек. Рассмотрим, например, пустотелый цилиндр, наполненный водой. Момент инерции системы материальных точек в этом случае рассчитывается по тем же формулам, что и момент инерции твердого тела. Моменты инерции играют важную роль при вращательных движениях твердого тела.

Указание. Для определения уравнения эллипсоида инерции в данной точке твердого тела следует:

1) выбрать координатные оси, взяв начало координат в данной точке; если положение главных осей инерции можно легко определить благодаря наличию в твердом теле плоскости либо оси материальной симметрии, то координатные оси следует направлять вдоль главных осей инерции;

2) вычислить моменты инерции I_x, I_y, I_z и центробежные моменты инерции твердого тела I_{xy}, I_{xz}, I_{yz};

3) определить уравнение эллипсоида инерции, воспользовавшись формулой

$$I_x x^2 + I_y \quad + I_z z^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy = 1.$$

Задача 9.2. Вычислить момент инерции и радиус инерции однородного круглого диска массой m и радиусом r относительно оси L, лежащей в его плоскости и отстоящей от центра масс C диска на расстояние, равное четверти радиуса (рис.).

К задаче 9.2

Решение. Проводим ось L_C через центр масс C диска параллельно оси L.

Как известно, момент инерции однородного круглого диска относительно оси, проходящей вдоль одного из его диаметров, равен $I_{L_C} = mr^2/4$. Применив теорему Штейнера, найдем

$$I_L = I_{L_C} + m\left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{mr^2}{4} + \frac{mr^2}{16} = \frac{5mr^2}{16}.$$

Воспользовавшись формулой $I_L = m\rho_L^2$, определим радиус инерции ρ_L диска относительно оси L. Имеем

$$m\rho_L^2 = \frac{5mr^2}{16}, \text{ откуда } \rho_L = \frac{r\sqrt{5}}{4}.$$

Задача 9.3. Вычислить момент инерции стержня длиной l и массой m относительно оси y, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец.

Определить также момент инерции стержня относительно оси y_C, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Шириной и толщиной стержня пренебречь.

Решение. Рассмотрим элемент стержня длиной dx (рис.). Масса этого элемента равна $\frac{m}{l}dx$. Момент инерции стержня относительно

оси y будет равен интегралу

$$I_y = \int_0^l \frac{m}{l} dx \cdot x^2 = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{ml^2}{3}.$$

Момент инерции относительно оси y_C, проходящей через середину стержня, определится согласно теореме Штейнера:

$$I_y = I_{y_C} + md^2.$$

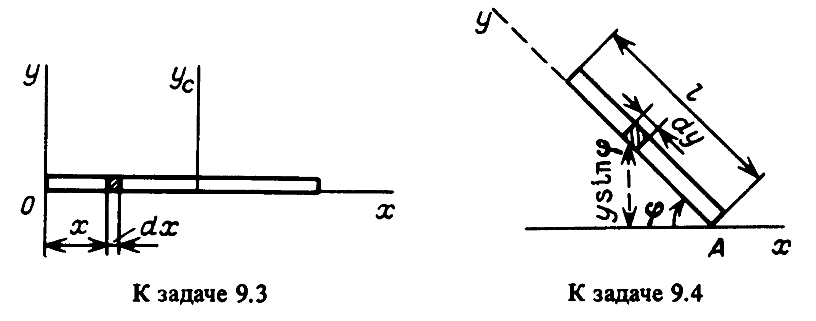
Внося в эту формулу известные величины, находим

$$\frac{ml^2}{3} = I_{y_C} + \frac{ml^2}{4},$$

так как $d = l/2$. Отсюда имеем

$$I_{y_C} = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12}.$$

Задача 9.4. Вычислить для стержня длиной l и массой m момент инерции относительно оси x, образующей угол φ с осью стержня (рис.). Шириной и толщиной стержня пренебречь.



К задаче 9.3 К задаче 9.4

Решение. Проведем ось y из точки A вдоль стержня и выделим элемент стержня длиной dy. Масса этого элемента равна $\frac{m}{l} dy$. Расстояние элемента от точки A будет y. Тогда расстояние элемента от оси x равно $y\sin\varphi$.

Момент инерции стержня относительно оси x равен

$$I_x = \int_0^l \frac{m}{l} dy \cdot (y\sin\varphi)^2 = \frac{m}{l}\sin^2\varphi \int_0^l y^2 dy =$$

$$= \frac{m}{l}\sin^2\varphi \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^l = \frac{ml^2}{3}\sin^2\varphi.$$

Задача 9.5. Моменты инерции твердого тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке, равны I_x, I_y, I_z. Доказать, что каждый из них меньше суммы двух остальных.

Решение. Моменты инерции твердого тела относительно каждой оси определяются формулами:

$$I_x = \iiint_{(V)} (y_i^2 + z_i^2)dm,$$

$$I_y = \iiint_{(V)} (x_i^2 + z_i^2)dm,$$

$$I_z = \iiint_{(V)} (y_i^2 + x_i^2)dm.$$

Интегралы вычисляются по всему объему твердого тела v.

Складывая первые два уравнения и сопоставляя полученный результат с третьим, находим

$$I_x + I_y = \iiint_{(V)} (y_i^2 + x_i^2)dm + 2\iiint_{(V)} z_i^2 dm = I_z + 2\iiint_{(V)} z_i^2 dm.$$

Так как для твердого тела последний интеграл всегда больше нуля, то теорема доказана.

Задача 9.6. Определить момент инерции сплошного и полого цилиндров массой m, радиусом R и высотой H относительно оси цилиндра z. Внутренний радиус полого цилиндра r.

Решение. Выделим элементарный пустотелый цилиндр с внутренним радиусом ρ, толщиной стенки $d\rho$ и высотой H (рис.).

Объем этого элементарного цилиндра равен

$$dV = 2\pi\rho\, d\rho \cdot H. \qquad (1)$$

Масса элементарного цилиндра определится как произведение плотности, равной отношению массы цилиндра к его объему

$$\gamma = \frac{m}{\pi R^2 H}, \qquad (2)$$

на элементарный объем (1):

$$\frac{m}{\pi R^2 H} dV = \frac{m}{R^2} 2\rho\ d\rho. \qquad (3)$$

Момент инерции цилиндра равен интегралу от произведения элементарной массы (3) на квадрат расстояния до оси, распространенному на весь объем цилиндра:

$$I_z = \int_0^R \frac{m}{R^2} 2\rho d\rho \cdot \rho^2 = \frac{2m}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{mR^2}{2}.$$

Переходим к определению момента инерции полого цилиндра с внешним радиусом R и внутренним r относительно оси z. Будем искать этот момент инерции I_{z_1} как разность моментов инерции сплошных цилиндров радиусами R и r:

$$I_{z_1} = \frac{mR^2}{2} - \frac{m_1 r^2}{2} = \frac{\pi R^2 H\gamma}{2} R^2 - \frac{\pi r^2 H\gamma}{2} r^2 =$$

$$= \frac{\pi\gamma H}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi\gamma H}{2}(R^2 - r^2)(R^2 + r^2). \qquad (4)$$

Но масса полого цилиндра равна $M = \pi\gamma H(R^2 - r^2)$. Внося это значение массы в (4), получаем окончательно

$$I_z = \frac{M}{2}(R^2 + r^2).$$

Z

H

ρ $d\rho$

К задаче 9.6

Это — момент инерции полого цилиндра.

Задача 9.7. Определить момент инерции площади прямоугольника массой m относительно оси y, лежащей в одной плоскости с прямоугольником и проходящей через его центр масс параллельно его стороне AB. Размеры сторон прямоугольника: $AB = l$, $AD = h$ (рис.).

Решение. Выделим бесконечно тонкую полоску, параллельную оси y. Длина полоски l, ширина dx, расстояние до оси y равно x. Площадь этой полоски $l\,dx$. Масса полоски равна

$$dm = \frac{m}{lh} l\,dx = \frac{m}{h} dx.$$

Ее момент инерции относительно оси y равен

$$I_{dm} = \frac{m}{h} x^2\,dx.$$

Момент инерции всего прямоугольника найдется по формуле

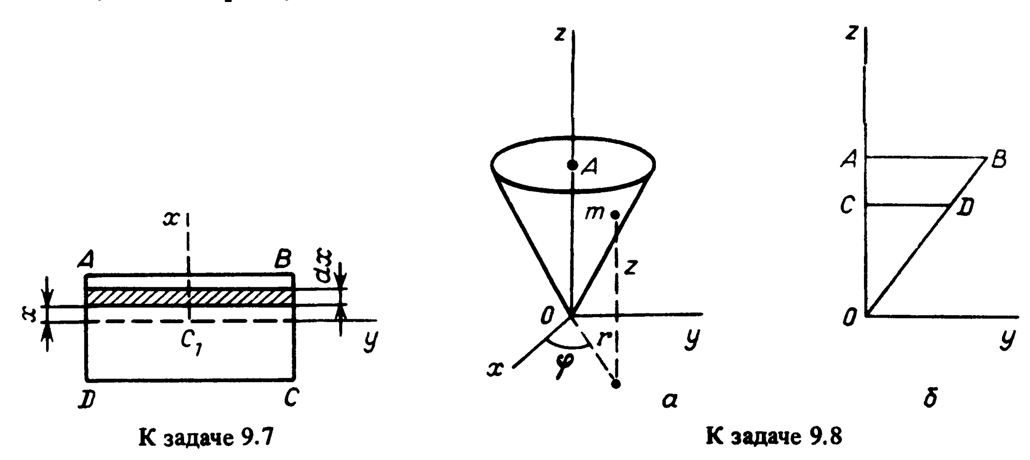
$$I_y = 2\int_0^{h/2} \frac{m}{h} x^2\,dx = 2\frac{m}{h}\int_0^{h/2} x^2\,dx = 2\frac{m}{h}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^{h/2} =$$

$$= \frac{mh^3}{4h\cdot 3} = \frac{mh^2}{12}.$$

Задача 9.8. Однородный массивный круговой конус имеет радиус основания, равный удвоенной высоте конуса.

Определить уравнение и форму эллипсоида инерции конуса в его вершине.

Решение. Совместим вершину конуса с началом координат, а ось конуса – с осью z (рис. *а*). Высоту конуса обозначим $OA = h$. Согласно условию, радиус основания $R = 2h$.



К задаче 9.7 К задаче 9.8

Конус однородный, и, следовательно, его плотность не влияет на форму эллипсоида инерции. Ось z является осью симметрии кругового конуса. Следовательно, два центробежных момента инерции равны нулю:

$$I_{xz} = \iiint\limits_{(V)} xz\, dV = 0,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_{(V)} yz\, dV = 0.$$

Точно так же центробежный момент инерции относительно осей x и y равен нулю:

$$I_{xy} = \iiint\limits_{(V)} xy\, dV = 0,$$

поскольку подынтегральная функция антисимметрична и по x, и по y, а область интегрирования симметрична по обеим этим переменным.

Переходим к вычислению осевых моментов инерции:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\, dV,$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2)\, dV.$$

Эти моменты инерции равны между собой вследствии симметрии конуса относительно оси z. Следовательно, требуется вычислить только один из этих моментов инерции.

Кроме того, необходимо вычислить третий момент инерции относительно оси z:

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\, dV.$$

Для вычисления этих моментов инерции введем цилиндрические координаты r, φ, z и выразим через них декартовы координаты $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Ввиду осевой симметрии пределы по переменным r, z можно определять в любой вертикальной плоскости, проходящей через ось симметрии конуса z.

Рассмотрим плоскость yOz. Область интегрирования – треугольник OAB. Пределы интегрирования по координате z равны $0 \leqslant z \leqslant h$. Пределы интегрирования по r равны $0 \leqslant r \leqslant y_d$, где y_d – координата точки D.

Но из подобия треугольников (рис. б) имеем

$$\frac{y_d}{AB} = \frac{OC}{OA}.$$

Поскольку $OC = z$, $AB = R = 2h$, $OA = h$, находим

$$y_d = \frac{2hz}{h} = 2z,$$

и пределы интегрирования по r будут $0 \leqslant r \leqslant 2z$. Пределы интегрирования по φ равны $[0, 2\pi]$. Тогда

$$I_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{2z} (r^2 \sin^2\varphi + z^2) r\, dr,$$

поскольку элемент объема в цилиндрических координатах равен $dV = r\,dr\,dz\,d\varphi$. Интегрируя, получаем

$$I_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \left[\frac{r^4}{4}\sin^2\varphi + z^2\frac{r^2}{2}\right]_0^{2z} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \left[\frac{16z^4}{4}\sin^2\varphi + \frac{4z^4}{2}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[4\frac{z^5}{5}\sin^2\varphi + 2\frac{z^5}{5}\right]_0^h = \frac{2h^5}{5}\int_0^{2\pi} (2\sin^2\varphi + 1)d\varphi =$$

$$= \frac{2h^5}{5}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi + 1)d\varphi = \frac{2h^5}{5}\left[2\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi h^5}{5}.$$

Следовательно,

$$I_x = I_y = \frac{8\pi h^5}{5}.$$

Далее, замечая, что $x^2 + y^2 = r^2$, находим

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{2z} r^2 r\, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{2z} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h 4z^4\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \left.\frac{4z^5}{5}\right|_0^h = 2\pi \frac{4h^5}{5} = \frac{8\pi h^5}{5}.$$

Следовательно,

$$I_x = I_y = I_z,$$

и, поскольку

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0,$$

эллипсоид инерции является сферой.

Уравнение этой сферы можно получить, подставив полученные значения осевых и центробежных моментов инерции в формулу для эллипсоида инерции:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{xz}xz - 2I_{yz}yz = 1.$$

Если при этом учесть еще плотность γ (очевидно, что для этого нужно просто умножить на γ все полученные величины), то уравнение эллипсоида инерции примет вид

$$\frac{8\pi h^5 \gamma}{5}(x^2 + y^2 + z^2) = 1,$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{8\pi h^5 \gamma}.$$

Задача 9.9. Моменты инерции твердого тела относительно двух параллельных осей y_1 и y_2 равны I_{y_1} и I_{y_2}, причем $I_{y_1} > I_{y_2}$. Расстояние между осями равно d. Центр масс твердого тела находится между осями y_1 и y_2 (рис.).

Определить, которая из осей расположена ближе к центру масс C твердого тела и насколько.

Р е ш е н и е. Проведем через центр масс C твердого тела ось y_C, параллельную осям y_1 и y_2. Применим теорему Штейнера дважды:

$$I_{y_1} = I_{y_C} + Md_1^2, \quad (1)$$

$$I_{y_2} = I_{y_C} + Md_2^2. \quad (2)$$

Так как по условию $I_{y_1} > I_{y_2}$, то $d_1 > d_2$, и, следовательно, ось y_2 расположена ближе к центру масс C.

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получаем

$$I_{y_1} - I_{y_2} = M(d_1^2 - d_2^2) = M(d_1 + d_2)(d_1 - d_2). \quad (3)$$

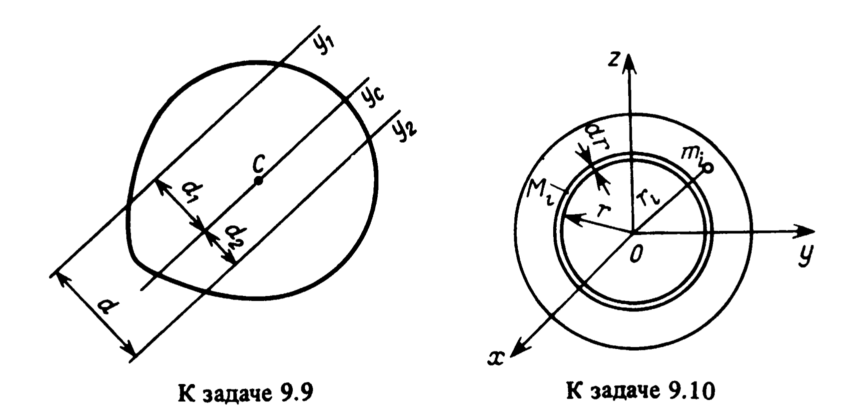
Но, согласно условию задачи, $d_1 + d_2 = d$. Тогда уравнение (3) можно записать в виде

$$I_{y_1} = I_{y_2} + Md(d_1 - d_2).$$

Отсюда определяем, насколько ближе к центру масс расположена ось y_2, чем ось y_1:

$$d_1 - d_2 = \frac{I_{y_1} - I_{y_2}}{Md}.$$

Задача 9.10. Определить момент инерции шара массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через его центр O (рис.).



К задаче 9.9 К задаче 9.10

Р е ш е н и е. Всякий диаметр является осью симметрии для шара. Следовательно, любой диаметр шара является главной центральной осью инерции шара.

Проведем через центр шара (точку O) три взаимно перпендикулярные оси: x, y, z. Выберем точку массой m_i на расстоянии r_i от центра шара.

Сумма произведений из масс точек на квадрат расстояния до центра шара равна

$$Q = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \quad (1)$$

Так как $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, то сумма (1) примет вид

$$Q = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

С другой стороны, моменты инерции относительно осей x, y, z равны

$$A = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad B = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2), \quad C = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2).$$

Складывая эти три уравнения, находим

$$A + B + C = 2\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2Q. \qquad (2)$$

Но для шара ввиду симметрии $A = B = C$, следовательно, из (2) имеем

$$A = B = C = \frac{2}{3}Q, \qquad (3)$$

Переходим к вычислению Q. Выделим внутри шара бесконечно тонкую – толщиной dr – шаровую оболочку радиусом r с центром в точке C. Ее объем равен произведению поверхности сферы $s = 4\pi r^2$ на толщину dr. Масса шаровой оболочки равна произведению ее объема на плотность ρ, т.е. $M_i = 4\pi r^2\,dr\,\rho$. Следовательно, часть Q_i формулы (1) находится как произведение $M_i r^2$:

$$Q_i = 4\pi\rho r^4\,dr.$$

Тогда искомая сумма Q найдется интегрированием в пределах от $r = 0$ до $r = R$:

$$Q = 4\pi\rho\int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\rho R^5. \qquad (4)$$

С другой стороны, масса шара m равна произведению его объема V на плотность ρ:

$$m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho. \qquad (5)$$

Тогда формулу (4) можно записать с учетом (5) так:

$$Q = \frac{3}{5}mR^2. \qquad (6)$$

Подставляя это значение (6) в формулу (3), находим значение искомых

моментов инерции шара относительно любой центральной оси:

$$A = B = C = \frac{2}{5} mR^2.$$

Задача 9.11. Однородный эллипсоид с полуосями b, c, h имеет массу M. Определить его момент инерции и радиус инерции относительно оси, совпадающей с осью эллипсоида $2b$.

Решение. Пусть оси x, y, z совпадают с осями симметрии эллипсоидов, а начало координат – с его центром. Будем считать, что b – длина полуоси по Oz, c – по Oy и h – по Ox. Тогда уравнение поверхности эллипсоида примет вид

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Обозначим плотность через γ. Поскольку объем эллипсоида равен $V = \frac{4}{3} \pi bch$, то вследствие однородности $M = \gamma V = \frac{4}{3} \pi \gamma bch$, откуда

$$\gamma = \frac{3M}{4\pi bch}. \tag{2}$$

Момент инерции относительно оси $2b$ – это, очевидно, момент инерции относительно оси Oz, т.е.

$$I_{zz} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x^2 + y^2)\, dV, \tag{3}$$

где тройной интеграл распространен по объему, ограниченному поверхностью эллипсоида, выражаемой уравнением (1). Для вычисления этого интеграла введем обобщенные сферические координаты:

$$x = hR \sin\vartheta \cos\varphi, \tag{4}$$

$$y = cR \sin\vartheta \sin\varphi, \tag{5}$$

$$z = bR \cos\vartheta. \tag{6}$$

Тогда уравнение поверхности, ограничивающей заданную область, перейдет в

$$\frac{h^2 R^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi}{h^2} + \frac{c^2 R^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi}{c^2} + \frac{b^2 R^2 \cos^2\vartheta}{b^2} = 1,$$

или $R^2 = 1$. Считая R положительным, имеем границу $R = 1$. Для того чтобы охватить всю область, нужно принять

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant R \leqslant 1. \tag{7}$$

Это будет еще очевиднее, если перейти от координат x, y, z к координатам R, ϑ, φ в два этапа. Сначала сделать преобразование

$$x = hx_1, \quad y = cy_1, \quad z = bz_1,$$

которое представляет собой преобразование растяжения по трем осям и преобразует поверхность эллипсоида (1) в единичную сферу

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1,$$

а затем – преобразование

$$x_1 = R \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y_1 = R \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z_1 = R\cos\vartheta,$$

которое представляет собой переход от координат x_1, y_1, z_1 к обычным полярным координатам (в системе $Ox_1y_1z_1$), для которой ограничения (7) общеизвестны.

Интеграл (3) при преобразовании координат должен быть преобразован:

1) подстановкой новых координат в подынтегральную функцию;

2) расстановкой пределов интегрирования в соответствии с новыми координатами, т.е. пределов, соответствующих (7);

3) преобразованием элемента объема.

Для определения элемента объема в новых координатах можно использовать формулу

$$dV = \frac{D(x, y, z)}{D(R, \vartheta, \varphi)}\, dR\, d\vartheta\, d\varphi,$$

где

$$\frac{D(x, y, z)}{D(R, \vartheta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial R} & \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial R} & \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial R} & \dfrac{\partial z}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

– соответствующий якобиан, но если разбить преобразование на два, то можно упростить вычисления.

Очевидно, что при переходе от координат x, y, z к x_1, y_1, z_1 имеем

$$dV = dx\, dy\, dz = hcb\, dx_1\, dy_1\, dz_1 = hcb\, dV_1,$$

что легко подтвердить, вычисляя якобиан.

Переход же от dV_1 к сферическим координатам осуществляется по известной формуле

$$dV_1 = R^2 \sin \vartheta \, dR \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Окончательно имеем

$$dV = hcbR^2 \sin \vartheta \, dR \, d\vartheta \, d\varphi. \qquad (8)$$

Подставляя элемент объема, значение плотности и выражения x, y из формул (2), (4), (5), (8) в интеграл (3), получаем для искомого момента инерции

$$I_{zz} = \int_0^1 dR \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{3M}{4\pi bch} hcbR^2 \times$$
$$\times \sin \vartheta (h^2 R^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + c^2 R^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi).$$

Вынося постоянные множители и учитывая, что пределы являются постоянными, а подынтегральная функция представляет собой сумму двух произведений функций, зависящих только от одной из переменных, можем записать тройной интеграл в виде суммы произведения интегралов:

$$I_{zz} = \frac{3M}{4\pi} \int_0^1 R^4 dR \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \, [h^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi + c^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi]. \qquad (9)$$

Имеем по формулам приведения

$$\int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, d\vartheta = \frac{2}{3} \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{2}{3} (-\cos \vartheta) \Big|_0^\pi = \frac{2}{3} [1 + 1] = \frac{4}{3},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} 2\pi = \pi.$$

Далее,

$$\int_0^1 R^4 dR = \frac{R^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

Подставляя значение этого интеграла в (9), получаем

$$I_{zz} = \frac{3M}{4\pi} \frac{1}{5} \frac{4}{3} (h^2 \pi + c^2 \pi) = \frac{1}{5} M(c^2 + h^2).$$

Радиус инерции равен

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_{zz}}{M}} = \frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{\sqrt{5}}.$$

Задача 9.12. Найти момент инерции тонкой однородной пластинки массой M, внешняя граница которой является эллипсом с полуосями a и b, относительно любого диаметра эллипса (Routh).

Р е ш е н и е. Пусть диаметр $KOK_1 = 2r$ образует угол θ с большой осью эллипса (рис.). Тогда момент инерции пластинки относительно диаметра KOK_1 равен

$$I = I_A \cos^2\theta + I_B \sin^2\theta + I_C \cos^2 \frac{\pi}{2} = I_A \cos^2\theta + I_B \sin^2\theta, \qquad (1)$$

где I_A, I_B, I_C – главные моменты инерции пластинки, причем

$$I_A = \frac{1}{4} Mb^2, \quad I_B = \frac{1}{4} Ma^2. \qquad (2)$$

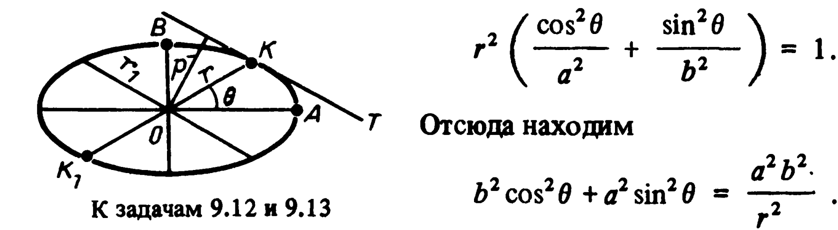
Следовательно,

$$I = \frac{1}{4} M(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta). \qquad (3)$$

Если в уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

подставить выражения $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, то (4) примет вид



К задачам 9.12 и 9.13

$$r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 1.$$

Отсюда находим

$$b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta = \frac{a^2b^2}{r^2}.$$

Внося это значение в уравнение (3), имеем

$$I = \frac{1}{4} M \frac{a^2b^2}{r^2}.$$

Задача 9.13. В условиях предыдущей задачи найти момент инерции пластинки по отношению к касательной к эллипсу T (Routh).

Р е ш е н и е. Опустим из центра эллипса O перпендикуляр на касательную. Обозначим длину этого перпендикуляра p. Тогда по теореме Штейнера

$$I = I_1 + Mp^2, \qquad (1)$$

где I_1 – момент инерции вокруг диаметра $2r_1$, параллельного касательной.

Так как этот диаметр сопряжен с диаметром $2r$, проведенным через точку касания, то по теореме Аполлония

$$rr_1 \sin\varphi = ab, \tag{2}$$

где φ – угол между сопряженными диаметрами.

Но из рисунка видно, что $p = r\sin\varphi$, и, следовательно,

$$r_1 = \frac{ab}{p}. \tag{3}$$

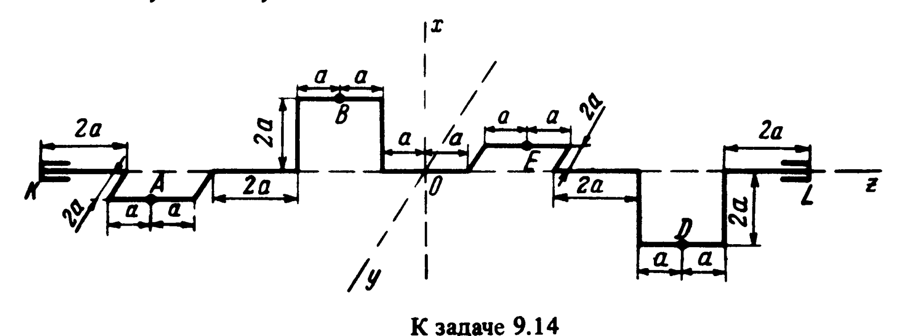
Но, согласно предыдущей задаче,

$$I_1 = \frac{1}{4} M \frac{a^2 b^2}{r_1^2}. \tag{4}$$

Внося (3) и (4) в формулу (1), находим

$$I = \frac{1}{4} Mp^2 + Mp^2 = \frac{5}{4} Mp^2.$$

Задача 9.14. На рисунке изображена схема коленчатого вала четырехцилиндрового двигателя внутреннего сгорания. Колена A и E расположены в горизонтальной плоскости yz. Колена B и D расположены в вертикальной плоскости xz. Вычислить центробежные моменты инерции коленчатого вала I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}, приближенно считая его массу сосредоточенной



К задаче 9.14

в точках A, B, E и D, причем $m_A = m_B = m_E = m_D = m$. Размеры указаны на рисунке.

Решение. По определению центробежных моментов инерции твердого тела получаем

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k, \quad I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k.$$

Распространив суммирование на четыре точечные массы m_A, m_B, m_E и m_D, имеем

$$I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k = m_A y_A z_A + m_B y_B z_B + m_E y_E z_E + m_D y_D z_D =$$

$$= m_M \cdot 2a(-6a) + m_E(-2a)2a = -12m_A a^2 - 4m_E a^2 = -16ma^2,$$

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k = m_A x_A y_A + m_B x_B y_B + m_E x_E y_E + m_D x_D y_D = 0,$$

$$I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k = m_A x_A z_A + m_B x_B z_B + m_E x_E z_E + m_D x_D z_D =$$

$$= m_B(-2a)2a + m_D 6a(-2a) = -4m_B a^2 - 12m_D a^2 = -16ma^2$$

(напомним, что $y_B = y_D = x_A = x_E = 0$, а $m_A = m_B = m_E = m_D = m$). Итак, $I_{yz} = I_{xz} = -16ma^2$ и $I_{xy} = 0$.

Интересно отметить, что при двух центробежных моментах инерции I_{xz} и I_{yz}, отличных от нуля, центр тяжести коленчатого вала лежит на оси вращения z.

Задача 9.15. Вычислить центробежные моменты инерции I_{xy}, I_{xz} и I_{yz} однородной пластинки OAB массой m. Катет прямоугольного равнобедренного треугольника OAB равен a. Оси координат изображены на рисунке.

Решение. Ось x, перпендикулярная плоскости материальной симметрии пластинки, является главной осью инерции в точке O. Известно, что центробежные моменты инерции относительно осей, одна из которых является главной осью инерции, равны нулю, т.е.

$$I_{xy} = I_{xz} = 0.$$

Переходим к вычислению центробежного момента инерции I_{yz}:

$$I_{yz} = \int_{(M)} yz\,dm,$$

где $dm = \gamma\,dy\,dz$, а γ — плотность пластинки.

Следовательно,

$$I_{yz} = \gamma \iint yz\,dy\,dz = \gamma \int_0^a y\,dy \int_0^{a-y} z\,dz = \gamma \int_0^a y \frac{(a-y)^2}{2} dy =$$

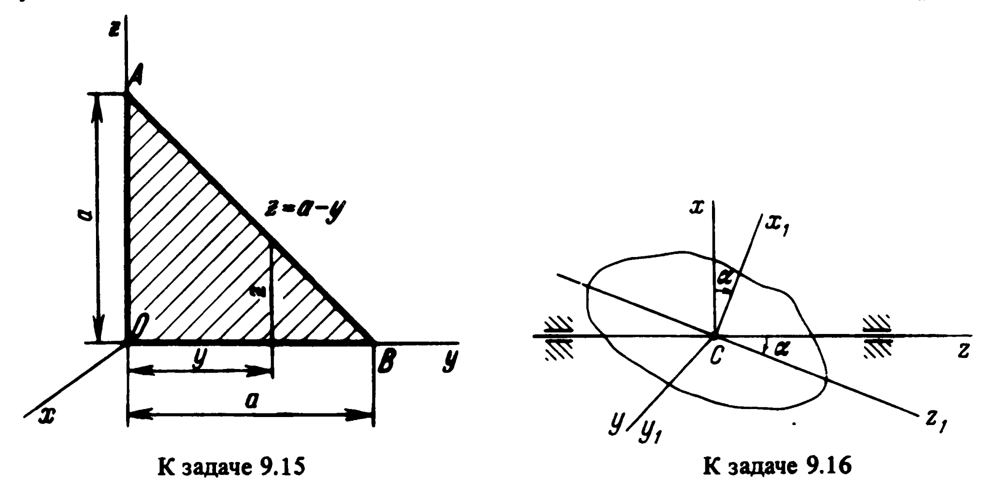
$$= \frac{\gamma}{2} \int_0^a (a^2 y - 2ay^2 + y^3)\,dy = \frac{\gamma a^4}{24};$$

так как $\gamma a^2/2 = M$, то окончательно получим

$$I_{yz} = \frac{Ma^2}{12}.$$

Задача 9.16. Твердое тело имеет плоскость материальной симметрии xz, совмещенную с плоскостью рисунка. Даны осевые моменты инерции I_{z_1} и I_{x_1} твердого тела относительно осей z_1 и x_1, проходящих через центр масс C тела и лежащих в плоскости материальной симметрии xz, а также центробежный момент инерции $I_{x_1z_1}$.

Определить центробежные моменты инерции твердого тела I_{xz}, I_{yz}, I_{xy}, если оси z_1 и x_1 повернуты относительно осей z и x на угол α (рис.),



К задаче 9.15 К задаче 9.16

Р е ш е н и е. Ось y перпендикулярна плоскости материальной симметрии xz и потому является главной осью инерции в точке C. Следовательно, в нуль обращаются два центробежных момента инерции относительно осей, одной из которых является ось y, т.е.

$$I_{yz} = I_{yx} = 0. \tag{1}$$

Остается вычислить центробежный момент инерции I_{xz}, который, по определению, равен

$$I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k. \tag{2}$$

Выразим координаты x_k и z_k в зависимости от x_{1k} и z_{1k}. Для этого воспользуемся формулами аналитической геометрии преобразования координат при повороте осей на угол α:

$$z = z_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha, \qquad x = z_1 \sin\alpha + x_1 \cos\alpha. \tag{3}$$

Эти формулы выведены в предположении, что поворот осей произведен против хода часовой стрелки. Учтя, что в данном случае поворот совершается по ходу часовой стрелки, заменим в формулах (3) угол α на $-\alpha$.

Тогда для k-й точки имеем

$$z_k = z_{1k}\cos\alpha + x_{1k}\sin\alpha, \qquad x_k = -z_{1k}\sin\alpha + x_{1k}\cos\alpha. \tag{4}$$

Подставив значения (4) в формулу (2), запишем

$$I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k = \sum_{k=1}^{n} m_k(-z_{1k}\sin\alpha + x_{1k}\cos\alpha) \times$$
$$\times (z_{1k}\cos\alpha + x_{1k}\sin\alpha).$$

Перемножив скобки, находим

$$I_{xz} = -\sin\alpha\cos\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k}^2 - \sin^2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k} x_{1k} +$$
$$+ \cos^2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k} x_{1k} + \sin\alpha\cos\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k x_{1k}^2,$$

т.е.

$$I_{xz} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_{1k}^2 - \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k}^2\right) + \cos 2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k} x_{1k}. \tag{5}$$

Добавим и отнимем в круглых скобках формулы (5) $\sum_{k=1}^{n} m_k y_{1k}^2$. Тогда

$$I_{xz} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k(x_{1k}^2 + y_{1k}^2) - \sum_{k=1}^{n} m_k(z_{1k}^2 + y_{1k}^2)\right] +$$
$$+ \cos 2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k} x_{1k}.$$

Заметив, что $x_{1k}^2 + y_{1k}^2 = d_{kz_1}^2$ – квадрат расстояния k-й точки до оси z_1, а $z_{1k}^2 + y_{1k}^2 = d_{kx_1}^2$ – до оси x_1, получим

$$I_{xz} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k d_{kz_1}^2 - \sum_{k=1}^{n} m_k d_{kx_1}^2\right) + \cos 2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k} x_{1k}. \tag{6}$$

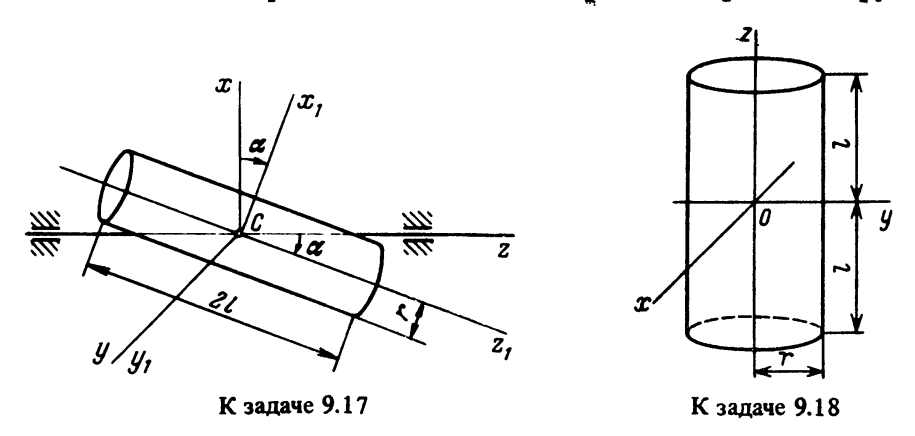
Так как, по определению, $\sum_{k=1}^{n} m_k d_{kz_1}^2 = I_{z_1}$, $\sum_{k=1}^{n} m_k d_{kx_1}^2 = I_{x_1}$, $\sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k} x_{1k} = I_{z_1 x_1}$, то формула (6) окончательно принимает вид

$$I_{xz} = (I_{z_1} - I_{x_1})\frac{\sin 2\alpha}{2} + I_{x_1 z_1}\cos 2\alpha. \tag{7}$$

Итак, искомые центробежные моменты инерции твердого тела (см. (1) и (7)) равны

$$I_{yz} = I_{yx} = 0, \quad I_{xz} = (I_{z_1} - I_{x_1}) \frac{\sin 2\alpha}{2} + I_{x_1 z_1} \cos 2\alpha.$$

Задача 9.17. Сохранив условие предыдущей задачи, дополнительно считать, что z_1 является осью материальной симметрии твердого тела. Вычислить также центробежные моменты инерции однородного круглого



К задаче 9.17

К задаче 9.18

цилиндра массы M, радиуса r и длиной $2l$. Оси x, y, z изображены на рисунке.

Р е ш е н и е. Ось z_1, будучи осью материальной симметрии, является главной осью инерции. Поэтому $I_{z_1 x_1} = I_{z_1 y_1} = 0$. Значит, формула (7) предыдущей задачи принимает вид

$$I_{xz} = (I_{z_1} - I_{x_1}) \frac{\sin 2\alpha}{2}. \quad (1)$$

Осевые моменты инерции однородного круглого цилиндра равны $I_{z_1} = Mr^2/2$, $I_{x_1} = M(r^2/4 + l^2/3)$. Подставив эти значения в формулу (1), получим

$$I_{xz} = M\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}. \quad (2)$$

Итак, искомые центробежные моменты инерции (см. формулу (1) предыдущей задачи) однородного круглого цилиндра, изображенного на рисунке, равны

$$I_{yz} = I_{yx} = 0, \quad I_{xz} = M\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Задача 9.18. Написать уравнение эллипсоида инерции, построенного в центре масс однородного круглого цилиндра массой m, высоты $2l$ с радиусом основания, равным r. Координатные оси изображены на рисунке. Начало координат O совпадает с положением центра масс цилиндра.

Решение. Уравнение эллипсоида инерции в данной точке твердого тела имеет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy = 1.$$

Как известно, для круглого цилиндра $I_x = I_y = M(r^2/4 + l^2/3)$ и $I_z = Mr^2/2$. Так как оси x, y и z являются главными осями инерции цилиндра, то $I_{yz} = I_{xz} = I_{xy} = 0$. Теперь уравнение эллипсоида инерции для центра масс цилиндра будет

$$M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)x^2 + M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)y^2 + \frac{Mr^2}{2} z^2 = 1.$$

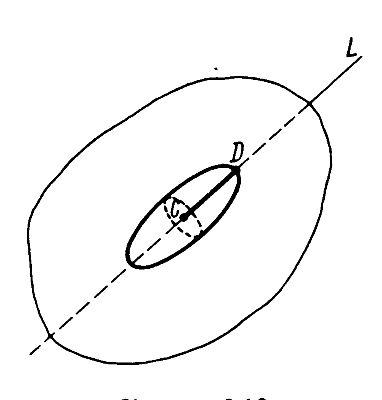
Полуоси эллипсоида инерции равны

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{M(r^2/4 + l^2/3)}}$$

и

$$c = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{M}}.$$

Задача 9.19. Определить положение точки в твердом теле и направление оси, проходящей через эту точку, если известно, что момент инерции твердого тела относительно этой оси является наименьшим.



К задаче 9.19

Решение. Применение теоремы Штейнера показывает, что при наличии системы параллельных осей момент инерции твердого тела является наименьшим относительно оси, проходящей через центр инерции C твердого тела. Остается выбрать направление оси, проходящей через эту точку. Построим эллипсоид инерции с центром в точке C. По определению эллипсоида инерции, расстояние от центра эллипсоида до точки, лежащей на его поверхности, равно $CD = 1/\sqrt{I_L}$, где I_L — момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр эллипсоида и точку, лежащую на его поверхности. Для того чтобы момент инерции I_L был наименьшим, расстояние CD должно быть наибольшим. Следовательно, искомая ось L проходит через центр инерции C твердого тела вдоль наибольшей оси CD эллипсоида инерции, построенного в этой точке.

Задача 9.20. Плотность шара радиусом R изменяется согласно формуле

$$\gamma = \gamma_0\left(1 - \beta\frac{r^2}{R^2}\right),$$

где r – расстояние от центра шара, β – постоянный коэффициент.

Определить момент инерции шара и квадрат радиуса инерции относительно любого диаметра.

Решение. Поместим начало координат в центре шара, а оси x, y, z направим по трем диаметрам. Тогда, поскольку плотность является функцией только расстояния от центра, имеем в силу симметрии

$$I_x = I_y = I_z. \tag{1}$$

Момент инерции относительно начала координат I_0, как известно, равен

$$2I_O = I_x + I_y + I_z. \tag{2}$$

Это следует из выражений

$$I_0 = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x^2 + y^2 + z^2)\,dV, \tag{3}$$

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} \gamma(y^2 + z^2)\,dV, \tag{4}$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x^2 + z^2)\,dV, \tag{5}$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x^2 + y^2)\,dV. \tag{6}$$

Складывая выражения (4)–(6), получаем формулу (2). Учитывая (1), имеем в данном случае

$$2I_0 = 3I_z, \tag{7}$$

или

$$I_z = \frac{2}{3} I_0, \tag{8}$$

где I_0 – момент инерции рассматриваемого шара относительно центра.

Чтобы избежать тройных интегралов, разбиваем данный шар на бесконечно тонкие концентрические слои с центром в начале координат. Объем слоя равен $dV = 4\pi r^2 dr$. Тогда масса шара

$$M = \int\limits_0^{(R)} \gamma dV = \int\limits_0^R \gamma_0\left(1 - \beta\frac{r^2}{R^2}\right)\cdot 4\pi r^2\,dr$$

(скобки в верхнем пределе в первом интеграле означают, что пределы взяты по радиусу, а не по объему). Вычисляя, получаем

$$M = 4\pi\gamma_0 \left[\frac{r^3}{3} - \beta \frac{r^5}{5R^2} \right] \Bigg|_0^R = 4\pi\gamma_0 \left[\frac{R^3}{3} - \beta \frac{R^3}{5} \right] =$$

$$= \frac{4\pi}{15} \gamma_0 R^3 (5 - 3\beta), \tag{9}$$

отсюда

$$\gamma_0 = \frac{15M}{4\pi R^3 (5 - 3\beta)}. \tag{10}$$

Согласно формуле (3)

$$I_O = \int_0^{(R)} \gamma r^2 dV = \int_0^R \gamma_0 \left(1 - \beta \frac{r^2}{R^2} \right) r^2 4\pi r^2 \, dr.$$

Интегрируя, имеем для I_z, согласно (8),

$$I_z = \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{3} 4\pi\gamma_0 \left[\frac{r^5}{5} - \beta \frac{r^7}{7R^2} \right] \Bigg|_0^R =$$

$$= \frac{8\pi\gamma_0}{3} \left[\frac{R^5}{5} - \beta \frac{R^5}{7} \right] = \frac{8\pi}{3} \gamma_0 \frac{R^5}{35} (7 - 5\beta). \tag{11}$$

Подставляя значение γ_0 из (10) в (11), имеем

$$I_z = \frac{8\pi}{3} \frac{15M}{4\pi R^3 (5 - 3\beta)} \frac{7 - 5\beta}{35} R^5 = \frac{2}{7} MR^2 \frac{7 - 5\beta}{5 - 3\beta} =$$

$$= M \frac{14 - 10\beta}{35 - 21\beta} R^2. \tag{12}$$

Квадрат радиуса инерции равен

$$\rho_{zz}^2 = \frac{I_z}{M} = \frac{14 - 10\beta}{35 - 21\beta} R^2.$$

Отметим, что должно быть $\beta \leqslant 1$, поскольку иначе плотность на поверхности стала бы отрицательной, и потому I_z имеет также положительное значение.

При $\beta = 1$ (плотность на поверхности спадает до нуля) имеем

$$I_z = \frac{2}{7} MR^2.$$

При $\beta = 0$ получаем известную формулу для однородного шара

$$I_z = \frac{2}{5} MR^2.$$

Теоретически можно представить себе β и отрицательным (т.е. шар, "уплотняющийся" к поверхности). Формула (12) (как и (9) и (10)) пригодны и в этом случае.

Задача 9.21. Определить условия существования в твердом теле точек, для которых эллипсоид инерции обратится в сферу.

Р е ш е н и е. Эллипсоид инерции для произвольного полюса будет трехосным эллипсоидом. В частных случаях эллипсоид инерции может оказаться эллипсоидом вращения. Для этого необходимо и достаточно, чтобы два главных момента инерции была равны:

$$I_x = I_y. \tag{1}$$

Если же в некоторой точке k равны три главных момента инерции:

$$I_x = I_y = I_z, \tag{2}$$

то эллипсоид инерции в этой точке становится сферой, а такие точки в твердом теле называются *шаровыми.*

Найдем условия существования шаровых точек. Если точка $k(x_k, y_k, z_k)$ является шаровой точкой, то любая ось, проведенная из точки k, является главной осью инерции.

Выберем в точке k три оси: kx_1, ky_1, kz_1, проведенные из точки k параллельно главным центральным осям инерции Cx, Cy, Cz. Тогда

$$I_{kyz} = 0, \quad I_{kxz} = 0, \quad I_{kxy} = 0,$$

или

$$y_k z_k = 0, \quad z_k x_k = 0, \quad x_k y_k = 0.$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, взяв полюс k на одной из главных центральных осей, например, на оси Cx. Тогда

$$y_k = 0, \quad z_k = 0.$$

Для определения третьей координаты x_k воспользуемся условием того, что k является шаровой точкой (2). Но согласно теореме Штейнера и замечая, что $I_{x_C} = I_x$, так как точка k лежит на оси Ox, имеем по (2),

$$I_{x_C} = I_{y_C} + Mx_k^2 = I_{z_C} + Mx_k^2.$$

Отсюда $I_{x_C} > I_{y_C} = I_{z_C}$, и, следовательно,

$$x_k = \pm\sqrt{\frac{I_{x_C} - I_{y_C}}{M}}.$$

Таким образом, для существования шаровых точек необходимо, чтобы центральный эллипсоид инерции являлся сплюснутым ($I_{x_C} > I_{y_C}$) эллипсоидом вращения. В этом случае на его неравной оси будут находиться две шаровые точки, расположенные по обе стороны от центра на равных расстояниях.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 34.1–34.3, 34.5, 34.7, 34.9, 34.11, 34.12, 34.15, 34.16, 34.18–34.20, 34.24–34.26, 34.30, 34.31.

§ 2. ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

При решении задач с помощью общих теорем динамики материальной системы силы разделяют на внутренние (F^i) и внешние (F^e). Напомним, что *внутренними* называются силы взаимодействия между материальными точками, входящими в состав рассматриваемой системы. В соответствии с законом равенства действия и противодействия внутренние силы существуют попарно. При этом главный вектор V^i и главный момент m_0^i внутренних сил системы равны нулю, т.е.

$$V^i = \sum_{k=1}^{n} F_k^i = 0, \qquad m_0^i = \sum_{k=1}^{n} m_0(F_k^i) = 0.$$

Следует иметь в виду, что, несмотря на выполнение этих условий, система внутренних сил, вообще говоря, не является уравновешивающейся, так как внутренние силы приложены к разным материальным точкам. Только в случае, если система материальных точек является абсолютно твердым телом, система внутренних сил является уравновешенной.

Внешними называются силы, приложенные к материальным точкам рассматриваемой системы со стороны точек и тел, не входящих в состав этой системы. Внешние силы могут переходить в разряд сил внутренних и, наоборот, внутренние силы могут переходить в разряд внешних при изменении состава системы. Так, если рассматривать систему, состоящую из двух соприкасающихся шаров, то силы давления первого шара на второй и второго шара на первый являются внутренними силами. Если же рассматривать систему, состоящую из одного первого шара, то сила давления второго шара на первый является внешней силой.

Существует и другое деление сил, действующих на систему материальных точек. Силы действующие на систему, делятся на активные силы и реакции связей.

Связью называется любое ограничение, наложенное на координаты или скорости точек системы. Отбрасывая мысленно связи, мы заменяем их действие силами, называемыми *реакциями связей*.

Активными силами являются все силы, действующие на систему материальных точек, кроме реакций связей.

Рассмотрим пример. На рис. 9.6 изображена материальная система, состоящая из масс A и B силой тяжести P_A и P_B, соединенных невесомым жестким стержнем AB. Под действием силы F система движется направо по негладкой горизонтальной плоскости.

Изобразить все внешние и внутренние силы, действующие на материальную систему. Массы A и B считать точечными. Земля и горизонтальная

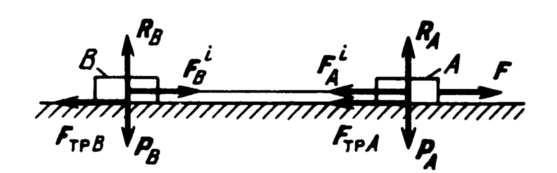


Рис. 9.6

плоскость — тела, не входящие в состав данной системы. Поэтому, кроме силы F, внешними силами являются: силы тяжести P_A и P_B, приложенные к массам A и B со стороны Земли, нормальные составляющие реакций R_A и R_B горизонтальной плоскости, а также касательные составляющие реакций этой плоскости, т.е. силы трения скольжения $F_{трA}$ и $F_{трB}$.

К массе A приложена реакция F_A^i стержня AB, к массе B — реакция F_B^i стержня AB. Силы F_A^i и F_B^i — это силы взаимодействия между материальными точками A и B данной системы, т.е. внутренние силы.

Итак, к данной материальной системе приложены внешние силы: F, P_A, P_B, R_A, R_B, $F_{трA}$, $F_{трB}$, причем силы F, P_A и P_B являются активными, а R_A, R_B, $F_{трA}$, $F_{трB}$ — реакциями связей. Внутренние силы системы представляют собой реакции стержня F_A^i и F_B^i.

Если жесткий стержень AB заменить пружиной, то вместо реакций стержня F_A^i и F_B^i получим активные силы упругости пружины F_A^i и F_B^i (пружина не является связью), которые, как это имело место и при наличии стержня, будут являться внутренними силами системы.

Следовательно, активные силы и реакции связей могут быть и внешними, и внутренними. Решая задачи, рекомендуем строго придерживаться принятой классификации сил. Это значит, что все силы, действующие на систему, необходимо разделять: 1) на активные силы и реакции связей либо 2) на внешние и внутренние силы. В этой главе при рассмотрении общих теорем динамики силы делятся на внешние и внутренние (преимущества подобного деления сил будут показаны ниже).

Уравнение динамики для k-й точки материальной системы имеет вид

$$m_k a_k = F_k^e + F_k^i,$$

где F_k^e – равнодействующая всех внешних сил, а F_k^i – равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к k-й материальной точке.

Ниже рассматриваются как системы, состоящие из конечного числа материальных точек, так и системы тел с непрерывным распределением масс.

Все теоремы формулируются для материальных систем, но без труда могут быть распространены на системы тел.

Дифференциальные уравнения движения k-й материальной точки в проекциях на оси декартовых координат имеют вид

$$m_k\ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \quad m_k\ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i, \quad m_k\ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i$$

(система трех уравнений).

Дифференциальные уравнения движения системы n материальных точек в проекциях на оси декартовых координат записываются в форме

$$m_k\ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i,$$

$$m_k\ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i,$$

$$m_k\ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i$$

(система $3n$ уравнений), где $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Итак, для определения движения системы n материальных точек, входящих в состав системы, следует решить систему $3n$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с $3n$ неизвестными функциями одной независимой переменной t. Для нахождения $6n$ постоянных интегрирования должны быть заданы $6n$ начальных условий движения. При этом следует иметь в виду, что внешние и внутренние силы могут зависеть как от времени, так и от положений, скоростей и ускорений точек системы. Решение подобных задач оказывается трудным и громоздким.

В некоторых задачах динамики материальной точки и системы материальных точек можно значительно упростить решение путем применения так называемых общих теорем динамики.

Общими теоремами динамики являются:

1) теорема о движении центра масс материальной системы;

2) теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы;

3) теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы;

4) теорема об изменении кинетической энергии материальной системы.

§ 3. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ. СЛУЧАЙ СОХРАНЕНИЯ СКОРОСТИ ЦЕНТРА МАСС

1. Теорема о движении центра масс материальной системы. Зависимость между скоростью центра масс и скоростями точек материальной системы имеет вид

$$\mathrm{v}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \mathrm{v}_k}{M},$$

т.е.

$$\dot{x}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_k}{M}, \quad \dot{y}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{y}_k}{M}, \quad \dot{z}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{z}_k}{M}. \qquad (1^*)$$

Здесь

$$\mathrm{v}_C = \dot{x}_C \boldsymbol{i} + \dot{y}_C \boldsymbol{j} + \dot{z}_C \boldsymbol{k}.$$

Зависимость между ускорением центра масс и ускорениями точек материальной системы выражается соотношением

$$\boldsymbol{a}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{a}_k}{M},$$

т.е.

$$\ddot{x}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{x}_k}{M}, \quad \ddot{y}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{y}_k}{M}, \quad \ddot{z}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{z}_k}{M}. \qquad (2^*)$$

Здесь

$$\boldsymbol{a}_C = \ddot{x}_C \boldsymbol{i} + \ddot{y}_C \boldsymbol{j} + \ddot{z}_C \boldsymbol{k}.$$

Напомним формулировку теоремы о движении центра масс: центр масс материальной системы движется как материальная точка, масса которой равна массе материальной системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему:

$$M\boldsymbol{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e.$$

Та же формула, записанная в проекциях на оси декартовых координат, имеет вид

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e. \qquad (3^*)$$

Движение центра масс материальной системы зависит от внешних сил, приложенных к данной системе. Внутренние силы, которые отсутствуют в формулировке теоремы, непосредственно на движение центра инерции системы не влияют. Это обстоятельство значительно облегчает решение задач, так как внутренние силы системы большей частью бывают неизвестны.

Задачи динамики поступательного движения твердого тела решаются посредством теоремы о движении центра масс материальной системы. Действительно, применив эту теорему, мы определим уравнение траектории, скорость и ускорение центра масс твердого тела. При поступательном же движении твердого тела траектории всех точек одинаковы, а скорости и ускорения их соответственно равны.

Если твердое тело одновременно участвует в двух движениях – поступательном вместе с центром масс и вращательном вокруг центра масс, то теорема о движении центра масс позволяет определить поступательное движение безотносительно к тому, вращается ли твердое тело или движется поступательно.

Указание. С помощью теоремы о движении центра масс можно решать как первые, так и вторые задачи динамики. Рекомендуем такую последовательность решения задач:

1) изобразить на рисунке все внешние силы системы;

2) выбрать систему осей координат;

3) записать теорему о движении центра масс (3^*) в проекциях на декартовы оси координат;

4) вычислить суммы проекций всех внешних сил системы на оси декартовых координат и подставить их в уравнение (3^*);

5) в зависимости от условия решать первую либо вторую задачи динамики.

В некоторых первых задачах бывают заданы все внешние силы, кроме одной, массы всех материальных точек системы и законы их движения. Тогда, после выполнения первых четырех пунктов, для вычисления левых частей уравнений (3^*) надо воспользоваться вспомогательными формулами

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{x}_k, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{y}_k, \quad M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{k} m_k \ddot{z}_k, \qquad (4^*)$$

где m_k – масса k-й точки, а x_k, y_k, z_k – заданные уравнения ее движения, ввести эти результаты в уравнения (3^*) и определить неизвестную силу.

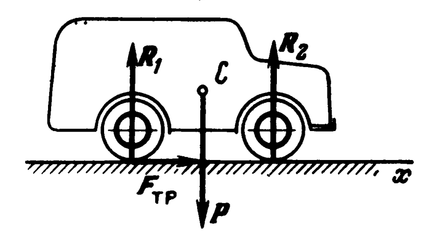
В некоторых вторых задачах бывают заданы все внешние силы, массы всех точек системы и законы движения всех точек, кроме одной (либо законы движения некоторых точек выражены в зависимости от неизвестного закона движения этой точки), и требуется определить движение этой точки. Тогда, после выполнения первых четырех пунктов, также следует воспользоваться формулами (4*), полученные результаты ввести в левые части уравнений (3*) и затем найти искомый закон движения точки.

Если в состав системы входят тела с непрерывным распределением масс, то следует записать координаты x_k, y_k, z_k центров тяжести этих тел и затем воспользоваться формулами (4*).

Задача 9.22. Какая сила приводит в движение центр масс автомашины, движущейся по негладкой горизонтальной дороге?

Решение. Часто ошибочно полагают, что центр масс автомашины непосредственно приводится в движение силой давления газов в цилиндрах двигателя. Эта сила, являясь внутренней, на движение центра масс автомашины прямо не влияет. Под действием этой силы возникают вращающие моменты, приложенные к ведущим колесам. В результате появляются силы трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ между покрышками ведущих колес автомашины и землей, направленные по горизонтали в сторону движения автомашины (силами трения между покрышками ведомых колес и землей пренебрегаем).

Сила трения, являясь внешней по отношению к автомашине, приводит в движение его центр масс C. Действительно, записав теорему о движении центра масс системы в проекции на ось x (рис.), получим $M\ddot{x}_C = F_{\text{тр}}$ (внешние силы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ перпендикулярны оси x, и их проекции на эту ось



К задаче 9.22

равны нулю), т.е. $\ddot{x}_C > 0$; если в начальный момент центр масс C был в покое, то он будет перемещаться ускоренно по горизонтали направо.

Задача 9.23. Тонкий однородный стержень OA длиной l и массой m вращается вокруг вертикальной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω (рис.).

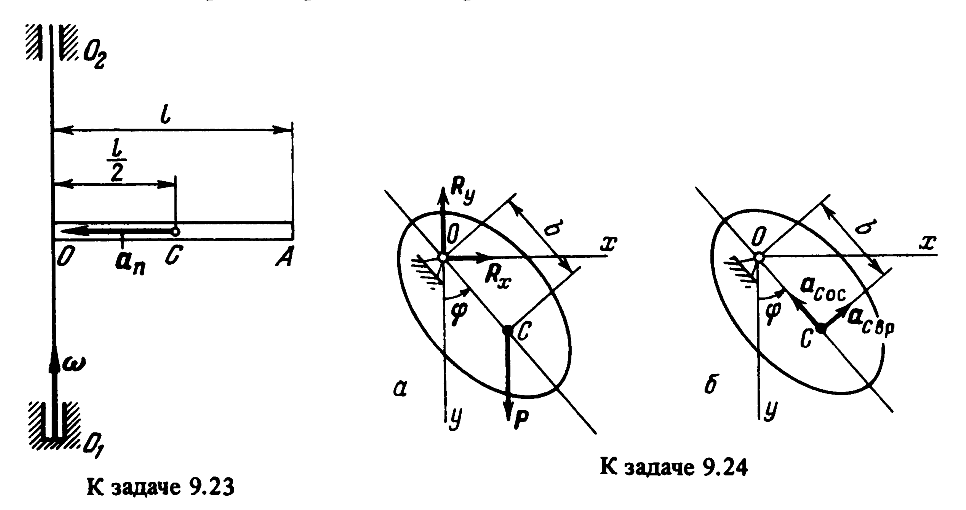
Определить главный вектор внешних сил. Массой оси O_1O_2 пренебречь.

Решение. В соответствии с теоремой о движении центра масс системы материальных точек $ma_C = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e$, для определения главного вектора

внешних сил системы $V^e = \sum_{k=1}^{n} F_k^e$ достаточно найти ma_C. Так как центр масс стержня находится в точке C на расстоянии $l/2$ от оси вращения и имеет, в силу постоянства вектора $\vec{\omega}$, только центростремительное ускорение $a_n = OC\omega^2 = \frac{l}{2}\omega^2$, которое направлено вдоль стержня от C к O, то главный вектор внешних сил системы V^e имеет то же направление и равен по модулю

$$V^e = ma_C = m\,\frac{l}{2}\,\omega^2.$$

В данном случае главный вектор внешних сил является векторной суммой силы тяжести стержня и реакций опор O_1 и O_2.



К задаче 9.23

К задаче 9.24

Задача 9.24. Твердое тело массой m колеблется около неподвижной горизонтальной оси z. Расстояние от точки подвеса O до центра масс C равно b. Оси x и y изображены на рис. *а*.

Найти вертикальную и горизонтальную составляющие реакции оси в зависимости от угла поворота φ и его производных по времени.

Решение. Для решения этой первой задачи применим теорему (3*) о движении центра масс материальной системы в проекциях на оси x и y:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e. \tag{1}$$

К твердому телу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ – сила тяжести, $\boldsymbol{R}_x$ и $\boldsymbol{R}_y$ – составляющие реакции неподвижной оси. Поэтому

$$\Sigma F^e_{kx} = R_x, \quad \Sigma F^e_{ky} = P - R_y. \tag{2}$$

Для вычисления $\ddot{x}_C$ и $\ddot{y}_C$ – проекций ускорения $\boldsymbol{a}_C$ центра масс C из рисунка заметим, что $x_C = b\sin\varphi$, $y_C = b\cos\varphi$, где $\varphi = \varphi(t)$. Вычислим производную по времени: $\dot{x}_C = b\dot{\varphi}\cos\varphi$, $\dot{y}_C = -b\dot{\varphi}\sin\varphi$. Далее найдем

$$\ddot{x}_C = b\ddot{\varphi}\cos\varphi - b\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \quad \ddot{y}_C = -b\ddot{\varphi}\sin\varphi - b\dot{\varphi}^2\cos\varphi. \tag{3}$$

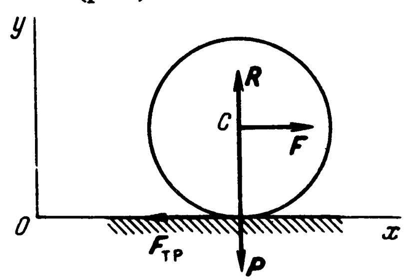
Для получения искомых составляющих R_x и R_y реакции неподвижной оси остается подставить результаты (2) и (3) в уравнения (1). Найдем

$$R_x = mb\ddot{\varphi}\cos\varphi - mb\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \quad R_y = mg + mb\ddot{\varphi}\sin\varphi + mb\dot{\varphi}^2\cos\varphi. \tag{4}$$

Как следует из формул (4), R_x и R_y меняются в зависимости от угла поворота φ, который в свою очередь является функцией времени.

В заключение заметим, что в данной задаче можно было найти $\ddot{x}_C$ и $\ddot{y}_C$ (формулы (3)) другим способом. Для этого достаточно построить осестремительную $\boldsymbol{a}_{C\text{ос}}$ и вращательную $\boldsymbol{a}_{C\text{вр}}$ составляющие ускорения $\boldsymbol{a}_C$ центра масс C (рис. *б*), где $a_{C\text{ос}} = b\dot{\varphi}^2$, $a_{C\text{вр}} = b|\ddot{\varphi}|$, а затем векторное равенство $\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_{C\text{вр}} + \boldsymbol{a}_{C\text{ос}}$ спроектировать на оси x и y. Предоставляем читателю самостоятельно выполнить эти выкладки и получить формулы (3).

Задача 9.25. Колесо массой m катится со скольжением по прямолинейному горизонтальному рельсу под действием постоянной силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к его центру масс C (рис.)



К задаче 9.25

Найти скорость центра масс C колеса, если в начальный момент оно находилось в покое. Коэффициент трения скольжения равен f. Оси x, y изображены на рисунке.

Р е ш е н и е. К колесу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ – сила тяжести, $\boldsymbol{F}$ – движущая сила, $\boldsymbol{R}$ – нормальная реакция рельса, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения, направленная вдоль рельса в сторону, противоположную силе $\boldsymbol{F}$.

Применим теорему о движении центра масс (3*) в проекциях на оси x и y:

$$m\ddot{x}_C = F - F_{\text{тр}}, \quad m\ddot{y}_C = R - P. \tag{1}$$

При движении колеса $y_C = r = \text{const}$. Поэтому $\ddot{y}_C = 0$ и из второго уравнения (1) следует

$$R = P. \tag{2}$$

Так как при качении колеса со скольжением сила трения достигает своего наибольшего значения, то $F_{\text{тр}} = fR$. Использовав равенство (2), запишем

$$F_{\text{тр}} = fP. \tag{3}$$

Использовав значение (3) для $F_{\text{тр}}$ в первом уравнении (1), имеем

$$\dot{x}_C = \frac{F - fmg}{m}. \tag{4}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (4), находим

$$\dot{x}_C = \frac{F - fmg}{m} t + C_1. \tag{5}$$

Подстановка начального условия $t = 0$, $\dot{x}_C = 0$ (колесо в начальный момент находилось в покое) в уравнение (5) дает $C_1 = 0$. Внеся это значение C_1 в (5), получим искомый закон изменения проекции скорости центра масс C колеса:

$$\dot{x}_C = \frac{F - fmg}{m} t.$$

Скольжение колеса возможно при наличии неравенства $F > fmg$.

Задача 9.26. Кулисный механизм приводится в движение кривошипом OA, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω (рис.). Считать кривошип тонким однородным стержнем массой m_1 и длиной l, камень кулисы – точечной массой m_2. Масса кулисы и штанги BD равна m_3. Центр тяжести кулисы и штанги находится в точке C_3, причем $BC_3 = l$. В начальный момент камень кулисы A занимал крайнее правое положение.

Найти уравнение траектории центра масс механизма.

Решение. Выбираем оси декартовых координат с началом в точке O, как указано на рисунке. Положение кулисного механизма на рисунке соответствует моменту t. Угол поворота кривошипа, вращающегося равномерно, равен $\varphi = \angle BOA = \omega t$.

Для определения положения центра масс системы C найдем его координаты x_C и y_C по формулам

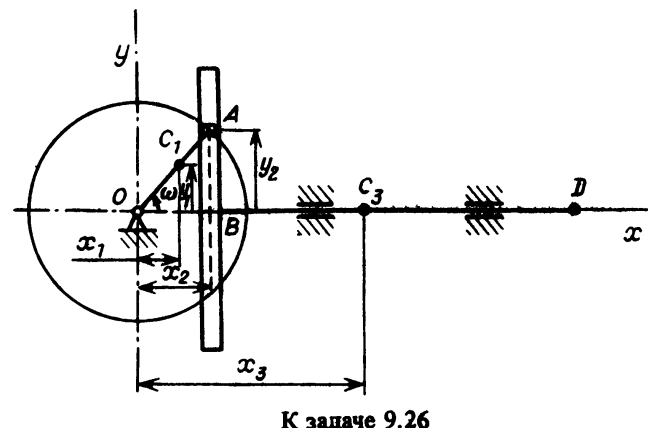
$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}, \qquad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}, \tag{1}$$

где $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – масса системы.

Так как рассматриваемая система состоит из трех тел – кривошипа OA, камня A и кулисы со штангой BD, то

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \qquad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \tag{2}$$

Индексы 1 соответствуют кривошипу, индексы 2 – комню A, индексы 3 – кулисе со штангой.



К задаче 9.26

Определим координаты:

$$x_1 = \frac{l}{2}\cos\omega t, \qquad y_1 = \frac{l}{2}\sin\omega t,$$

$$x_2 = l\cos\omega t, \qquad y_2 = l\sin\omega t, \tag{3}$$

$$x_3 = x_2 + BC_3 = l\cos\omega t + l = l(1+\cos\omega t), \qquad y_3 = 0.$$

Подставляя значения $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ в формулу (2), находим

$$x_C = \frac{m_1 \frac{l}{2}\cos\omega t + m_2 l\cos\omega t + m_3 l(1+\cos\omega t)}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$= \frac{m_3 l}{m_1 + m_2 + m_2} + \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3}{2(m_1 + m_2 + m_3)} \, l \cos\omega t, \tag{4}$$

$$y_C = \frac{m_1 \frac{l}{2} \sin\omega t + m_2 l \sin\omega t}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 + 2m_2}{2(m_1 + m_2 + m_3)} \, l \sin\omega t. \tag{5}$$

Для нахождения уравнения траектории центра масс в явном виде исключим из уравнений (4) и (5) время. Разрешив эти уравнения относительно $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, возведем каждое равенство в квадрат и сложим. Тогда получим

$$\frac{\left(x_C - \dfrac{m_3 l}{m_1 + m_2 + m_3}\right)^2}{\left[\dfrac{(m_1 + 2m_2 + 2m_3) l}{2(m_1 + m_2 + m_3)}\right]^2} + \frac{y_C^2}{\left[\dfrac{(m_1 + 2m_2) l}{2(m_1 + m_2 + m_3)}\right]^2} = 1. \tag{6}$$

Итак, траекторией центра масс кулисного механизма является эллипс с полуосями

$$b_1 = \frac{(m_1 + 2m_2 + 2m_3) l}{2(m_1 + m_2 + m_3)}, \qquad b_2 = \frac{(m_1 + 2m_2) l}{2(m_1 + m_2 + m_3)}. \tag{7}$$

Центр эллипса лежит на оси x и отстоит от начала координат O вправо на расстояние $\dfrac{m_3 l}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Задача 9.27. Машина для ковки металла (рис. *а*) приводится в действие кривошипно-ползунным механизмом OAB.

Определить силу давления машины на фундамент при работе вхолостую, если вес станины с наковальней D равен P_1, вес кривошипа OA длиной r равен P_2, вес молота B равен P_3. Кривошип OA считать однородным стержнем. Весом шатуна AB длиной l пренебречь. Кривошип, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω против хода часовой стрелки, в начальный момент занимал вертикальное нижнее положение.

Решение. Рассматриваемая система состоит из трех масс: 1) станины с наковальней D; 2) кривошипа OA; 3) молота B.

К машине приложены внешние силы: P_1 – сила тяжести станины с наковальней, P_2 – сила тяжести кривошипа OA, P_3 – сила тяжести молота B, R – суммарная нормальная сила реакции фундамента, R' – суммарная тангенциальная сила реакции фундамента. Все силы тяжести приложены в соответствующих центрах масс C_1, C_2, C_3 рассматриваемой машины. Ось y направим из точки O по вертикали вниз.

Согласно теореме о движении центра масс системы материальных точек в проекции на ось y, запишем

$$M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e. \tag{1}$$

Сумма проекций на ось y всех внешних сил, действующих на рассматриваемую систему, равна

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e = P_1 + P_2 + P_3 - R. \tag{2}$$

Следовательно, внося (2) в (1), находим

$$M\ddot{y}_C = P_1 + P_2 + P_3 - R, \tag{3}$$

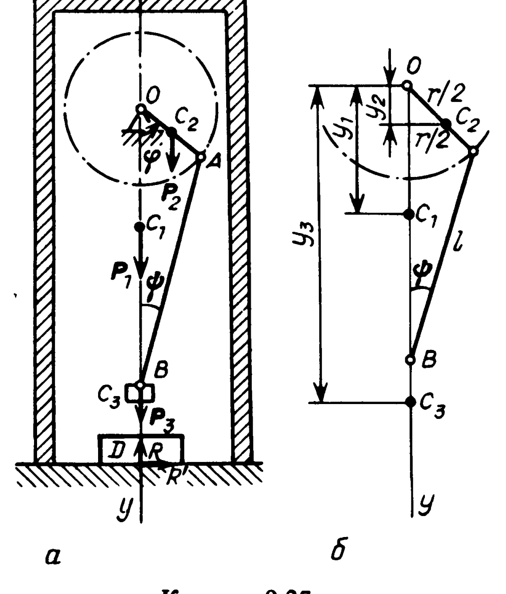
откуда определяется сила реакции фундамента

$$R = P_1 + P_2 + P_3 - M\ddot{y}_C. \tag{4}$$

Для решения задачи необходимо определить $M\ddot{y}_C$. Воспользуемся равенством

$$M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k\ddot{y}_k =$$

$$= m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_3. \tag{5}$$



К задаче 9.27

Рассмотрим кривошипно-ползунный механизм в момент времени t, когда кривошип OA повернулся из нижнего вертикального положения на угол $\varphi = \omega t$.

Координаты y_1, y_2, y_3 центров масс C_1, C_3, C_3 системы изображены на рис. *б*. Они равны соответственно

$$y_1 = OC_1 = \text{const},$$

$$y_2 = \frac{OA}{2}\cos\omega t = \frac{r}{2}\cos\omega t,$$

$$y_3 = OA\cos\omega t + AB\cos\psi + BC_3 = r\cos\omega t + l\cos\psi + BC_3,$$

где $\psi = \angle ABO$. Зависимость между углами ωt и ψ определяем по теореме

синусов из треугольника OAB:

$$\frac{\sin\psi}{\sin\omega t}=\frac{r}{l},$$

или

$$\sin\psi=\frac{r}{l}\sin\omega t=\lambda\sin\omega t,$$

где обозначено $r/l=\lambda$. Тогда

$$\cos\psi=\sqrt{1-\sin^2\psi}=\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}.$$

Теперь y_3 принимает вид

$$y_3=r\cos\omega t+l\cos\psi+BC_3=r\cos\omega t+l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}+BC_3.$$

Разложим выражение $\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}$ в ряд. Учитывая, что λ – правильная дробь, отбросим все члены ряда, содержащие λ в степени выше второй:

$$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}=(1-\lambda^2\sin^2\omega t)^{1/2}\approx 1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\omega t.$$

Следовательно,

$$y_3=r\cos\omega t+l\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\omega t\right)+BC_3.$$

Замечая, что $\sin^2\omega t=½(1-\cos 2\omega t)$ и $\lambda=r/l$, получаем

$$y_3=l-\frac{r^2}{4l}+r\left(\cos\omega t+\frac{1}{4}\lambda\cos 2\omega t\right)+BC_3.$$

Вычислим вторые производные от y_1, y_2, y_3 по времени t:

$$\ddot y_1=0,\quad \ddot y_2=-\frac{r\omega^2}{2}\cos\omega t,\quad \ddot y_3=-r\omega^2(\cos\omega t+\lambda\cos 2\omega t).$$

Теперь находим $M\ddot y_C$, внося значения $\ddot y_1, \ddot y_2, \ddot y_3$ в формулу (5):

$$M\ddot y_C=-\frac{m_2}{2}r\omega^2\cos\omega t-m_3r\omega^2(\cos\omega t+\lambda\cos 2\omega t),$$

или

$$M\ddot y_C=-\frac{r\omega^2}{2}\left[(m_2+2m_3)\cos\omega t+2\lambda m_3\cos 2\omega t\right].$$

Внося полученное значение $M\ddot{y}_C$ в формулу (4), находим нормальную силу реакции фундамента:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{r\omega^2}{2}\left[(m_2 + 2m_3)\cos\omega t + 2\lambda m_3 \cos 2\omega t\right]. \qquad (6)$$

Эта реакция, как видно из (6), зависит от времени.

Искомая сила давления ковочной машины на фундамент направлена противоположно силе нормальной реакции R и равна ей по модулю.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 35.1–35.3, 35.6–35.15, 35.17, 35.19, 35.21.

2. **Случай сохранения скорости центра масс материальной системы.** Если главный вектор внешних сил системы равен нулю ($V^e = \sum_{k=1}^{n} F_k^e = 0$), то скорость центра масс системы неизменна по модулю и направлению (v_C – постоянна), т.е. центр масс системы материальных точек движется равномерно и прямолинейно либо находится в покое.

Если в частном случае скорость центра масс равна нулю: $v_C = 0$ (что, например, имеет место при покое системы в начальный момент), то, несмотря на состояние покоя центра масс, материальные точки системы могут перемещаться, и притом только так, что сумма произведений масс точек на их скорости равна нулю, т.е. $\sum_{k=1}^{n} m_k v_k = 0$. При этом имеет место зависимость $\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta r_k = 0$, где Δr_k – перемещение k-й материальной точки.

Аналогично в проекции на ось x: если $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0$, то $\dot{x}_C$ – постоянная. Если же в частном случае $\dot{x}_C = 0$, то $\sum_{k=1}^{n} m_k v_{kx} = 0$, причем

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = 0, \qquad (5^*)$$

где Δx_k – проекция перемещения k-й материальной точки на ось x.

Примерами сохранения скорости центра масс системы материальных точек являются: а) вращение твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс; каково бы ни было вращение – ускоренное, замедленное или равномерное, – центр масс неподвижен, его скорость равна нулю; главный вектор внешних сил равен нулю; б) плоское движение твердого тела, при котором векторная сумма всех внешних сил равна

нулю; скорость центра масс в этом случае сохраняет модуль и направление неизменными независимо от того, как изменяется угловая скорость тела.

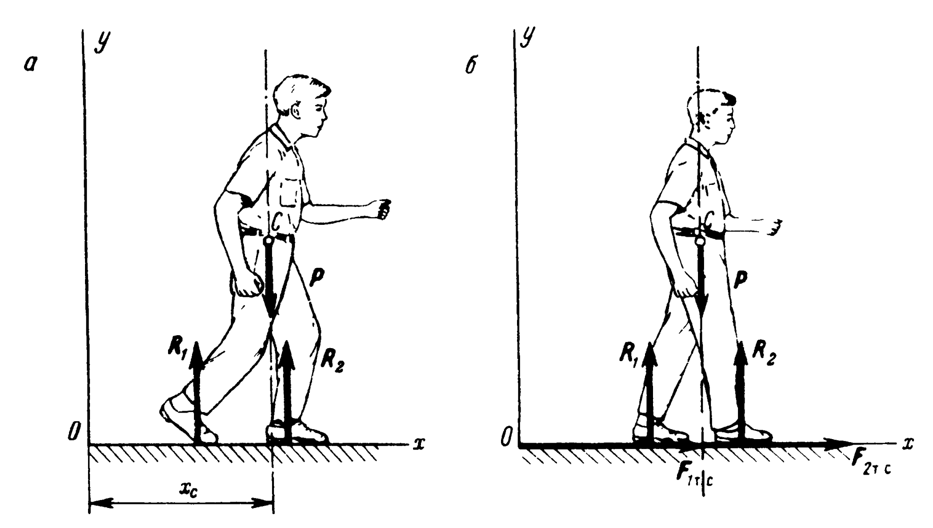
Задача 9.28. Может ли человек ходить по идеально гладкой горизонтальной плоскости?

Решение. Внешними силами, приложенными к человеку, являются его сила тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ и суммарная нормальная реакция земли $\boldsymbol{R}$. Горизонтальная реакция отсутствует, ибо плоскость является идеально гладкой (рис. *а*).

Направив ось x по горизонтали направо, запишем теорему о движении центра масс в проекции на ось x:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e.$$

Так как силы P и R перпендикулярны оси x, то $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0$ и, следовательно, $M\ddot{x}_C = 0$, откуда $M\dot{x}_C = C_1 = \text{const}$. Так как в начальный момент человек находился в покое, то $C_1 = 0$ и $M\dot{x}_C = 0$. Значит, $Mx_C = C_2 = \text{const}$, т.е.



К задаче 9.28

абсцисса центра масс C человека остается неизменной и человек по гладкой горизонтальной плоскости не может ходить. Если бы человек все же попытался пойти, подняв и выставив, например, левую ногу вперед, то правая нога его переместилась бы назад настолько, чтобы абсцисса центра масс x_C осталась бы неизменной. Человек мог бы переместиться по гладкой горизонтальной плоскости, бросив какой-нибудь предмет вперед (или назад);

тогда бы он начал двигаться в противоположном направлении, т.е. назад (или вперед).

Если бы человек, стоящий на гладкой горизонтальной плоскости, хотел подпрыгнуть, то он мог бы это совершить. Действительно, теорема о движении центра масс системы материальных точек в проекции на ось y дает

$$M\ddot{y}_C = R - Mg;$$

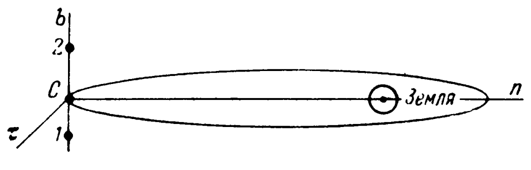
при отталкивании от земли за счет деформации мышц получим $R > Mg$, т.е. $\ddot{y}_C > 0$, следовательно, центр масс человека будет перемещаться по вертикали вверх.

Человек может ходить по негладкой горизонтальной плоскости, так как в этом случае к упомянутым внешним силам добавляется сила трения скольжения $F_{т.с}$ подошв человека о землю, направленная в сторону движения (рис. *б*). В этом случае получим $M\ddot{x}_C = F_{т.с}$, т.е. $\ddot{x}_C > 0$, и центр масс человека C будет ускоренно перемещаться по горизонтали направо.

Задача 9.29. При выходе из ракеты в космическое пространство космонавт, оттолкнувшись от корпуса ракеты, переместился по бинормали к траектории (рис.) на 10 м.

Определить соответствующее перемещение ракеты, если масса космонавта равна двум процентам массы ракеты. Массой троса, соединяющего космонавта с ракетой, пренебречь. Ракета движется по элиптической траектории, в одном из фокусов которой находится Земля (рис.).

Решение. Ускорение центра масс, как ускорение любой точки, лежит в соприкасающейся плоскости траектории. Главный вектор всех внешних сил, в соответствии с уравнением $Ma_C = \sum_{k=1}^{n} F_k^l = V^l$, также лежит в



К задаче 9.29

этой плоскости. Поэтому их проекции на бинормаль b, которая перпендикулярна к соприкасающейся плоскости, равны нулю. Скорость центра масс направлена по касательной. Это значит, что и ее проекция на бинормаль также равна нулю. Значит, можно применять формулу (5*), приведенную в обзоре теории, применительно к бинормали b:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta b_k = 0, \tag{1}$$

где Δb_k – проекция перемещения k-й материальной точки на бинормаль.

Для данного случая двух масс формула (1) примет вид

$$m_1 \Delta b_1 + m_2 \Delta b_2 = 0, \tag{2}$$

где индексом 1 обозначена ракета, а индексом 2 – космонавт. Из формулы (2) найдем: $\Delta b_1 = -\frac{m_2}{m_1} \Delta b_2$. Подставив числовые данные, получим $\Delta b_1 = -20$ см. Знак минус показывает, что ракета переместится в сторону, противоположную перемещению космонавта.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 35.1, 35.3, 35.5, 35.9, 35.16, 35.17, 35.19–35.21.

§ 4. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

1. Импульс силы. Количество движения материальной точки. Главный вектор количеств движения материальной системы. *Импульс силы* $\boldsymbol{F}$, действующей в течение промежутка времени $t_2 - t_1$, определяется векторным интегралом от вектора $\boldsymbol{F}$ по скалярному аргументу t:

$$\boldsymbol{S} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\, dt. \tag{1*}$$

В частном случае постоянной по модулю и направлению силы импульс силы равен

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F} \cdot (t_2 - t_1).$$

В этом случае импульс силы совпадает по направлению с силой.

Проекции импульса силы на оси декартовых координат равны

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z\, dt, \tag{2*}$$

где $\boldsymbol{S} = S_x \boldsymbol{i} + S_y \boldsymbol{j} + S_z \boldsymbol{k}$, а F_x, F_y, F_z – проекции силы $\boldsymbol{F}$. Модуль импульса силы равен

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

Направляющие косинусы определяются по формулам

$$\cos(\widehat{x, \boldsymbol{S}}) = \frac{S_x}{S}, \quad \cos(\widehat{y, \boldsymbol{S}}) = \frac{S_y}{S}, \quad \cos(\widehat{z, \boldsymbol{S}}) = \frac{S_z}{S}.$$

Импульс силы в системе СИ измеряется в кг · м/с.

Теорема об импульсе равнодействующей силы. Импульс равнодействующей силы за некоторый промежуток времени равен векторной сумме

импульсов сил системы за тот же промежуток времени

$$S(R)=\sum_{k=1}^{n} S(F_k).$$

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$S_x(R)=\sum_{k=1}^{n} S_x(F_k),\quad S_y(R)=\sum_{k=1}^{n} S_y(F_k),\quad S_z(R)=\sum_{k=1}^{n} S_z(F_k).$$

Количество движения q материальной точки массой m, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, определяется формулой

$$q=m\mathbf{v},$$

т.е. количество движения – вектор, пропорциональный скорости точки. Количество движения является одной из мер движения материальной точки.

Проекции количества движения материальной точки на оси декартовых координат имеют вид

$$q_x=mv_x,\quad q_y=mv_y,\quad q_z=mv_z$$

или

$$q_x=m\dot{x},\quad q_y=m\dot{y},\quad q_z=m\dot{z}.$$

Модуль количества движения материальной точки

$$q=\sqrt{q_x^2+q_y^2+q_z^2}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\widehat{x,q})=\frac{q_x}{q},\quad \cos(\widehat{y,q})=\frac{q_y}{q},\quad \cos(\widehat{z,q})=\frac{q_z}{q}.$$

Количество движения в системе СИ измеряется в кг·м/с.

Главный вектор количеств движения материальной системы

$$Q=\sum_{k=1}^{n} q_k=\sum_{k=1}^{n} m_k\mathbf{v}_k=M\mathbf{v}_C,$$

являющийся векторной суммой количеств движения точек материальной системы, равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Проекции главного вектора количеств движения материальной системы на оси декартовых координат даются формулами

$$Q_x=\sum_{k=1}^{n} m_k\dot{x}_k=M\dot{x}_C,\quad Q_y=\sum_{k=1}^{n} m_k\dot{y}_k=M\dot{y}_C,\quad Q_z=\sum_{k=1}^{n} m_k\dot{z}_k=M\dot{z}_C,$$

где $Q=Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k}$.

Модуль главного вектора количеств движения системы материальных точек

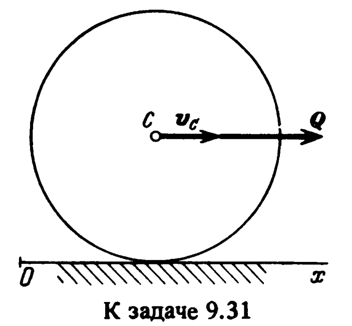
$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\widehat{x, Q}) = \frac{Q_x}{Q}, \quad \cos(\widehat{y, Q}) = \frac{Q_y}{Q}, \quad \cos(\widehat{z, Q}) = \frac{Q_z}{Q}.$$

Задача 9.30. Диск вращается вокруг неподвижной оси. Центр тяжести диска лежит на оси вращения. Как изменится главный вектор количеств движения диска, если угловая скорость диска увеличится в два раза?

Решение. Так как центр масс диска лежит на оси вращения, то $v_C = 0$ и, следовательно, $Q = Mv_C = 0$. Поэтому главный вектор количеств движения в данном случае от угловой скорости не зависит и равен нулю.



К задаче 9.31

Задача 9.31. Определить главный вектор количеств движения колеса массой M, катящегося по прямолинейному рельсу, если центр масс колеса движется по закону $x_C = bt$.

Решение. Главный вектор количеств движения колеса

$$Q = Mv_C,$$

где M – масса, а v_C – скорость центра масс колеса.

В рассматриваемом случае $v_C = \dot{x}_C = b$, т.е.

$$Q = Mb.$$

Вектор Q коллинеарен v_C, т.е. направлен по горизонтали направо (на рисунке он изображен приложенным в точке C).

Задача 9.32. Балка A массы M_1 перемещается по горизонтали направо посредством двух катушек B и D массой M_2 и радиусом r каждая, катящихся по земле без скольжения. Скорость центра масс каждой из катушек равна v.

Определить главный вектор количеств движения системы. Балка находится от земли на расстоянии $r + b$ (рис.).

Решение. Главный вектор количеств движения системы:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_D,$$

где Q_A – главный вектор количеств движения балки A, Q_B и Q_D – главные векторы количеств движения катушек B и D.

Имеем

$$Q_A = M_1 v_A, \quad Q_B = Q_D = M_2 v.$$

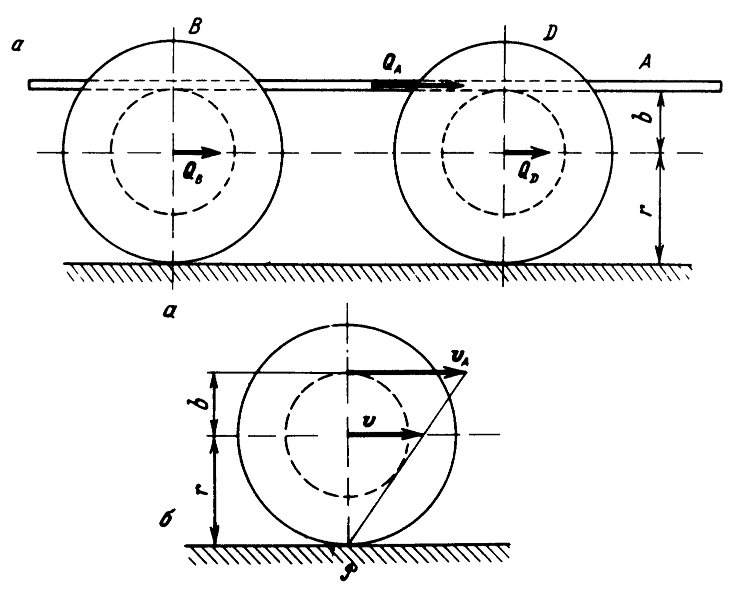
Учитывая, что мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$ каждой из катушек находится в точке касания катушки с землей (рис. *б*), находим

$$v_A = \frac{r+b}{r} v.$$

Итак,

$$Q = M_1 v_A + 2M_2 v = \left(\frac{r+b}{r} M_1 + 2M_2\right) v.$$

Таким образом, направление главного вектора количеств движения системы совпадает с направлением движения балки.



К задаче 9.32

Задача 9.33. Определить главный вектор количеств движения кривошипно-ползунного механизма, рассмотренного в задаче 9.1, если массы кривошипа и шатуна равны m, а масса ползуна $m/2$.

Решение. Проекции главного вектора количеств движения механизма на оси x и y даются формулами

$$Q_x = M\dot{x}_C, \quad Q_y = M\dot{y}_C, \tag{1}$$

где масса механизма $M = m + m + {}^1\!/_2 m = {}^5\!/_2 m$.

Использовав формулы (3) задачи 9.1: $x_C = \frac{6}{5} l \cos \omega t, y_C = \frac{2}{5} l \sin \omega t$, вычислим производные по времени:

$$\dot{x}_C = -\frac{6}{5} l\omega \sin \omega t, \quad \dot{y}_C = \frac{2}{5} l\omega \cos \omega t. \tag{2}$$

Внеся значения (2) в формулы (1), найдем $Q_x = -3ml\omega \sin \omega t$, $Q_y = ml\omega \cos \omega t$. Теперь вычислим модуль искомого главного вектора количеств движения кривошипно-ползунного механизма:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = ml\omega \sqrt{9 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}. \tag{3}$$

Косинус угла, который образует вектор Q с осью x, равен

$$\cos(\widehat{x, Q}) = \frac{Q_x}{Q} = -3 \frac{\sin \omega t}{\sqrt{9 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}}, \tag{4}$$

а осью y

$$\cos(\widehat{y, Q}) = \frac{Q_y}{Q} = \frac{\cos \omega t}{\sqrt{9 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}}. \tag{5}$$

Как и следовало ожидать, при движении механизма его главный вектор количеств движения Q является переменным, зависящим от времени.

Задача 9.34. Определить главный вектор количеств движения кулисного механизма, рассмотренного в задаче 9.26.

Решение. Проекции главного вектора количеств движения механизма на оси декартовых координат определяются формулами

$$Q_x = M\dot{x}_C, \quad Q_y = M\dot{y}_C,$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$.

При решении задачи 9.26 были определены координаты центра масс механизма:

$$x_C = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l + \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3}{2(m_1 + m_2 + m_3)} l \cos \omega t,$$

$$y_C = \frac{m_1 + 2m_2}{2(m_1 + m_2 + m_3)} l \sin \omega t.$$

Дифференцируя эти уравнения по времени, находим проекции скорости центра масс механизма:

$$\dot{x}_C = -\frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3}{2(m_1 + m_2 + m_3)} l\omega \sin \omega t, \qquad \dot{y}_C = \frac{m_1 + 2m_2}{2(m_1 + m_2 + m_3)} l\omega \cos \omega t.$$

Далее находим проекции главного вектора количеств движения кулисного механизма на декартовы оси координат:

$$Q_x = M\dot{x}_C = -\frac{1}{2}(m_1 + 2m_2 + 2m_3) l\omega \sin \omega t,$$

$$Q_y = M\dot{y}_C = \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2) l\omega \cos \omega t.$$

Отсюда определяется модуль главного вектора количеств движения кулисного механизма:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \frac{l\omega}{2}\sqrt{(m_1 + 2m_2 + 2m_3)^2 \sin^2 \omega t + (m_1 + 2m_2)^2 \cos^2 \omega t.}$$

Косинус угла, который образует вектор Q с осью x, равен

$$\cos(\widehat{x, Q}) = \frac{Q_x}{Q} = -\frac{(m_1 + 2m_2 + 2m_3)\sin \omega t}{\sqrt{(m_1 + 2m_2 + 2m_3)^2 \sin^2 \omega t + (m_1 + 2m_2)^2 \cos^2 \omega t}}.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 36.1, 36.3–36.6.

2. **Теорема об изменении количества движения материальной точки (в интегральной форме).** Изменение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени равно векторной сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени:

$$q_2 - q_1 = \sum_{k=1}^{n} S(F_k),$$

где q_1 соответствует начальному моменту времени t_1, а q_2 – конечному моменту времени t_2. Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k), \quad m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_y(F_k),$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_z(F_k).$$

С помощью теоремы об изменении количества движения материальной точки можно решать задачи, в которых в число данных и неизвестных входят: масса m материальной точки, скорость точки в начальный и конечный моменты времени (v_1 и v_2), силы, приложенные к материальной точке, и промежуток времени их действия.

Для вычисления импульса силы по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} F dt$ должна быть известна зависимость силы от времени, т.е. в случае сил, зависящих от координат и скоростей, надо знать закон движения точки.

Указание. Задачи на применение теоремы об изменении количества движения материальной точки следует решать в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке все силы, приложенные к материальной точке, т.е. активные силы и реакции связей (применить принцип освобождаемости от связей);

2) выбрать систему координат;

3) записать теорему об изменении количества движения материальной точки в проекциях на эти оси:

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k), \quad m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_y(F_k),$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_z(F_k);$$

4) а) если в задаче требуется определить начальную или конечную скорости точки при заданном законе изменения сил и промежутке времени их действия, то, вычислив проекции импульсов сил по формулам

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt$$

и подставив их значения в уравнения предыдущего пункта, определяют искомые проекции скорости точки;

б) если по условию задачи требуется определить одну из постоянных сил, приложенных к материальной точке, то ее можно легко получить из уравнений пункта 3), так как в этом случае

$$S_x = F_x(t_2 - t_1), \quad S_y = F_y(t_2 - t_1), \quad S_z = F_z(t_2 - t_1).$$

Задача 9.35. Материальная точка массой m движется равномерно по окружности со скоростью v под действием некоторой системы сил.

Определить импульс равнодействующей этой системы сил при перемещении материальной точки по дуге четверти окружности из точки A в точку B (рис. a).

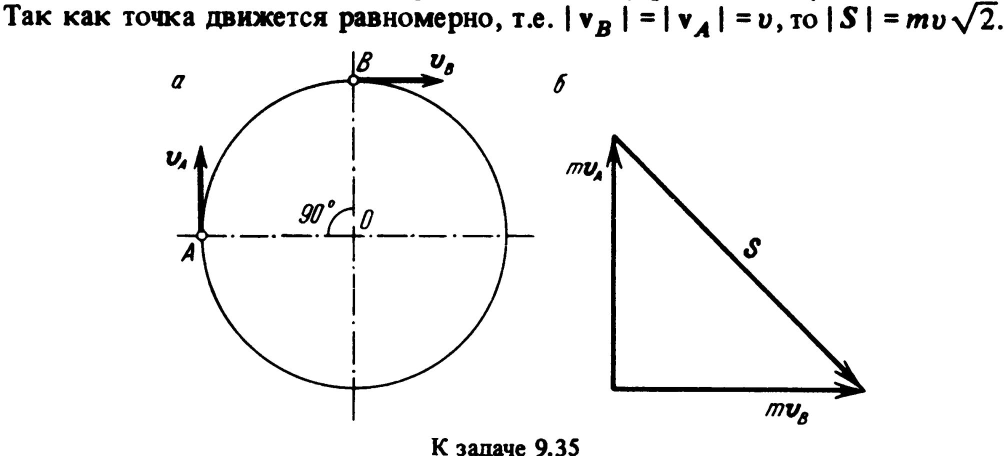
Решение. Применяем теорему об изменении количества движения материальной точки:

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{S}.$$

Так как $m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}_B$, а $m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}_A$, то

$$S = m\mathbf{v}_B - m\mathbf{v}_A.$$

Построив векторы количеств движения $m\mathbf{v}_B$ и $m\mathbf{v}_A$ из одной точки (рис. *б*), находим их разность, равную импульсу равнодействующей силы $\mathbf{S}$. Так как точка движется равномерно, т.е. $|\mathbf{v}_B| = |\mathbf{v}_A| = v$, то $|\mathbf{S}| = mv\sqrt{2}$.



К задаче 9.35

Задача 9.36. Груз спускается вниз по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту; f – коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость. В начальный момент времени скорость груза равнялась v.

Через какой промежуток времени скорость груза удвоится?

Решение. Изобразим силы, приложенные к грузу: $P = mg$ – сила тяжести груза, R – нормальная реакция плоскости, $F_{т.с}$ – сила трения скольжения груза о плоскость, причем $F_{т.с} = fN = fP\cos\alpha$ (рис.).

Направляем ось x вдоль наклонной плоскости вниз.

Запишем теорему об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось x:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k).$$

Согласно условию задачи $v_{1x} = v$, $v_{2x} = 2v$. Так как все силы, приложенные к грузу, постоянны, то

$$\sum_{k=1}^{n} S_x(F_k) = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\Delta t = (mg\sin\alpha - F_{т.с})\Delta t = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)\Delta t,$$

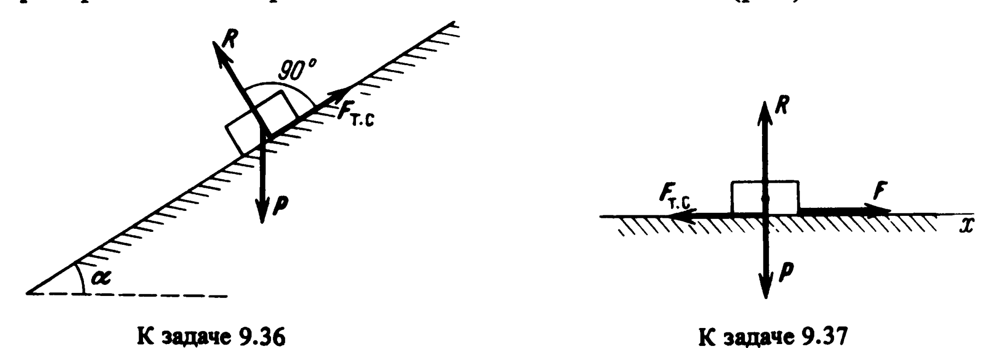
где Δt – искомый промежуток времени. Следовательно,

$$2mv - mv = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)\Delta t,$$

откуда

$$\Delta t = \frac{v}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}.$$

Задача 9.37. Твердое тело массой m начинает двигаться из состояния покоя по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы F, пропорциональной времени: $F = bt$, где b – постоянная (рис.).



К задаче 9.36 К задаче 9.37

Какую скорость приобретет тело через t секунд после начала движения, если коэффициент трения скольжения тела о горизонтальную плоскость равен f?

Решение. Изобразим силы, приложенные к телу: $P = mg$ – сила тяжести, F – движущая сила, равная по модулю $F = bt$, R – нормальная реакция горизонтальной плоскости, $F_{т.с}$ – сила трения скольжения тела о горизонтальную плоскость, причем $F_{т.с} = fP$.

Направим ось x по горизонтали направо.

Запишем теорему об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось x:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k).$$

По условию $v_{1x} = 0$, так как в начальный момент тело находилось в покое; $v_{2x} = v_x$, где v_x – проекция искомой скорости на ось x. Сумма проекций импульсов всех сил на ось x равна

$$\sum_{k=1}^{n} S_x(F_k) = \int_0^t F\,dt - F_{т.с}\cdot t = \int_0^t bt\,dt - fmgt = \frac{bt^2}{2} - fmgt.$$

Следовательно,

$$mv_x = \frac{bt^2}{2} - fmgt,$$

откуда

$$v_x = t\left(\frac{bt}{2m} - fg\right).$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 28.1–28.3, 28.5–28.7, 28.9, 28.11, 28.12.

3. **Теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы (в интегральной форме)**. Изменение главного вектора количеств движения материальной системы за некоторый промежуток времени равно векторной сумме импульсов всех внешних сил системы за тот же промежуток времени:

$$Q_2 - Q_1 = \sum_{k=1}^{n} S(F_k^e).$$

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k^e), \quad Q_{2y} - Q_{1y} = \sum_{k=1}^{n} S_y(F_k^e),$$

$$Q_{2z} - Q_{1z} = \sum_{k=1}^{n} S_z(F_k^e),$$

т.е.

$$M\dot{x}C_2 - M\dot{x}C_1 = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k^e), \quad M\dot{y}C_2 - M\dot{x}C_1 = \sum_{k=1}^{a} S_y(F_k^e),$$

$$M\dot{z}C_2 - M\dot{z}C_1 = \sum_{k=1}^{n} S_z(F_k^e).$$

Этот результат формулируется следующим образом: приращение суммы проекций количеств движения точек системы на какую-либо неподвижную ось равно сумме проекций импульсов всех внешних сил на ту же ось.

Следует обратить внимание на то, что сумма импульсов внутренних сил системы всегда равна нулю: $\sum_{k=1}^{n} S(F_k^i) = 0$, т.е. внутренние силы непосредственно не влияют на изменение главного вектора количеств движения системы материальных точек.

Отсутствие внутренних сил в формулировке теоремы об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек значи-

тельно упрощает решение соответствующих задач. Эта теорема находит также широкое применение в случае движения сплошных сред: жидкостей и газов (см. ниже теорему Эйлера).

Случай сохранения главного вектора количеств движения системы материальных точек.

Если векторная сумма импульсов внешних сил системы равна нулю, то главный вектор количеств движения системы материальных точек постоянен, т.е. если $\sum\limits_{k=1}^{n} S(F_k^e) = 0$, то $Q_2 = Q_1$.

Если сумма проекций импульсов внешних сил на некоторую ось равна нулю, то проекция на эту ось главного вектора количеств движения системы неизменна. Например, если

$$\sum_{k=1}^{n} S_x(F_k^e) = 0, \text{ то } Q_{2x} = Q_{1x}.$$

Закóн сохранения главного вектора количеств движения материальной системы или сохранения его проекции чаще всего применяется при решении задач, в которых в число данных и искомых величин входят массы материальных точек и их скорости в начальный и конечный моменты времени.

Указание. Решать задачи с помощью закона сохранения главного вектора количеств движения надо в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке все внешние силы;

2) выбрать систему координат;

3) записать теорему об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в проекциях на оси координат;

4) если сумма проекций импульсов внешних сил на ось оказывается равной нулю, например $\sum\limits_{k=1}^{n} S_x(F_k^e) = 0$, то следует приравнять между собой проекции на эту ось главного вектора количеств движения системы в начальный и конечный моменты времени, т.е. $Q_{2x} = Q_{1x}$, где $Q_{2x} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_{k2}$ и $Q_{1x} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_{k1}$, и из полученного уравнения определить искомую величину.

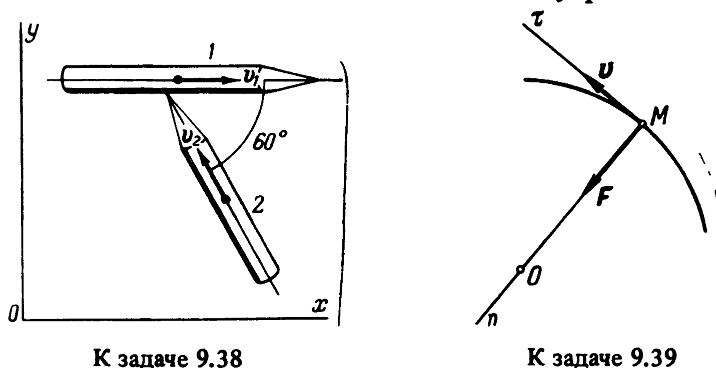
Задача 9.38. В открытом море лайнер *2* массой m_2, шедший со скоростью $v_2 = 37$ км/ч, врезался носом под углом 60° в правый борт лайнера *1* массой m_1, шедшего со скоростью $v_1 = 40$ км/ч (на рисунке дан вид в плане).

Приближéнно считая лайнеры точечными массами, определить их общую скорость в конце столкновения. Машины при этом были выключены. Силой сопротивления воды пренебречь. Отношение масс лайнеров равно $m_1/m_2 = 1{,}2$; оси x и y изображены на рисунке.

Решение. Применим теорему об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в проекциях на оси x и y:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k^e), \quad Q_{2y} - Q_{1y} = \sum_{k=1}^{n} S_y(F_k^e). \tag{1}$$

В состав рассматриваемой материальной системы входят оба лайнера. Поэтому силы их взаимного давления являются внутренними. Внешними



К задаче 9.38 К задаче 9.39

являются силы тяжести лайнеров и нормальные реакции воды. Они перпендикулярны плоскости xy. Поэтому проекции импульсов внешних сил на оси x и y равны нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} S_x(F_k^e) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} S_y(F_k^e) = 0. \tag{2}$$

Воспользовавшись результатом (2), из формул (1) получим $Q_{2x} - Q_{1x} = 0$, $Q_{2y} - Q_{1y} = 0$, т.е. имеет место случай сохранения проекций на оси x и y главного вектора количеств движения материальной системы:

$$Q_{2x} = Q_{1x}, \quad Q_{2y} = Q_{1y}. \tag{3}$$

Здесь индексы 1 соответствуют моменту начала, а индексы 2 – конца столкновения.

Так как $Q_x = \sum_{k=1}^{n} m_k v_{kx}$, $Q_y = \sum_{k=1}^{n} m_k v_{ky}$, то для двух масс запишем:

$$Q_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}, \quad Q_y = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}. \tag{4}$$

В соответствии с направлением скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ перед столкновением (рис.) имеем $v_{1x} = v_1$, $v_{1y} = 0$, $v_{2x} = -v_2 \cos 60°$, $v_{2y} = v_2 \cos 30°$. Поэтому из формул (4) следует:

$$Q_{1x} = m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos 60°, \quad Q_{1y} = m_2 v_2 \cos 30°. \tag{5}$$

В конце столкновения лайнеры приобрели искомую общую скорость **v**, проекции которой обозначим v_x и v_y. Значит,

$$Q_{2x} = (m_1 + m_2)v_x, \quad Q_{2y} = (m_1 + m_2)v_y. \qquad (6)$$

Использовав результаты (5) и (6) в формулах (3), найдем

$$(m_1 + m_2)v_x = m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos 60°, \quad (m_1 + m_2)v_y = m_2 v_2 \cos 30°,$$

т.е.

$$v_x = \frac{\frac{m_1}{m_2} v_1 - v_2 \cos 60°}{m_1/m_2 + 1}, \quad v_y = \frac{v_2 \cos 30°}{m_1/m_2 + 1}.$$

Подставив в эти формулы числовые данные, получим v_x = 13,4 км/ч, v_y = = 14,7 км/ч. Модуль искомой скорости равен $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ = 19,9 км/ч. Вычислим направляющие косинусы:

$$\cos(\widehat{x, \mathbf{v}}) = \frac{v_x}{v} = 0{,}67, \quad \cos(\widehat{y, \mathbf{v}}) = \frac{v_y}{v} = 0{,}74.$$

Отсюда следуют значения углов, которые образует искомая скорость **v** с осями x и y: $(\widehat{x, \mathbf{v}}) = 48°$, $(\widehat{y, \mathbf{v}}) = 42°$.

Задача 9.39. Ракета массой m = 1200 кг вышла со скоростью v = 7,9 км/с на круговую орбиту искусственного спутника Земли. Затем от ее головной части отделилась лаборатория массой m_1 = 200 кг. При этом скорость лаборатории возросла до v_1 = 8 км/с.

Определить, после разделения ракеты, скорость v_2 ее хвостовой части. Силами сопротивления движению пренебречь.

Решение. Движение ракеты происходит под действием силы F притяжения Земли, которая направлена по главной нормали траектории в данной точке, т.е. по радиусу окружности, описываемой ракетой. Поэтому проекция силы F на касательную τ равна нулю:

$$F_\tau = 0. \qquad (1)$$

Применим теорему об изменении главного вектора количеств движения материальной системы: $Q_2 - Q_1 = \sum_{k=1}^{n} S(F_k^e)$. В проекции на касательную τ имеем $Q_{2\tau} - Q_{1\tau} = \sum_{k=1}^{n} S_\tau(F_k^e)$. Приняв во внимание формулу (1), получим $\sum_{k=1}^{n} S_\tau(F_k^e) = 0$, т.е. $Q_{2\tau} - Q_{1\tau} = 0$. Итак,

$$Q_{2\tau} = Q_{1\tau}. \qquad (2)$$

Значит, в данном случае имеет место случай сохранения главного вектора количеств движения материальной системы в проекции на касательную τ.

До отделения головной части проекция на ось τ главного вектора количеств движения всей ракеты была равна

$$Q_{1\tau} = mv_\tau. \tag{3}$$

После отделения головной части массы m_1 со скоростью v_1 осталась хвостовая часть ракеты массы m_2 со скоростью v_2. При этом имеем

$$Q_{2\tau} = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}. \tag{4}$$

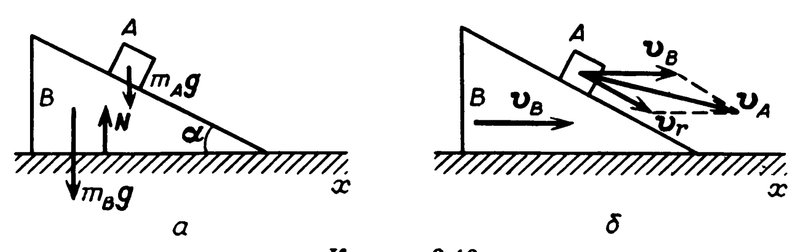
Использовав формулы (3) и (4) в равенстве (2), запишем: $mv_\tau = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}$, откуда определим проекцию $v_{2\tau}$ на касательную τ:

$$v_{2\tau} = \frac{mv_\tau - m_1 v_{1\tau}}{m_2}. \tag{5}$$

Подставив в формулу (5) числовые данные: $m = 1200$ кг, $m_1 = 200$ кг, $m_2 = 1000$ кг, $v_\tau = v = 7{,}9$ км/с, $v_{1\tau} = v_1 = 8$ км/с, получим $v_{2\tau} = v_2 = 7{,}88$ км/с.

Задача 9.40. Груз A массой m_A лежит на гладкой наклонной плоскости призмы B, масса которой m_B (рис. *а*). Наклонная плоскость призмы образует угол α с горизонтом. Груз A, находившийся в покое, начинает скользить по наклонной плоскости с относительной скоростью v_r. Горизонтальная плоскость абсолютно гладкая. Определить скорость движения призмы B.

Р е ш е н и е. Система материальных точек состоит из двух тел: груз A и призма B. Внешние силы, действующие на систему: сила тяжести груза,



К задаче 9.40

равная $m_A g$, сила тяжести призмы $m_B g$, нормальная реакция горизонтальной плоскости N. Заметим, что силы взаимодействия груза A и призмы B являются внутренними силами и поэтому не должны учитываться при применении теоремы об изменении главного вектора количеств движения системы.

Направим ось x по горизонтали направо. Тогда теорему об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек в проекции на ось x можно выразить формулой

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k^e). \tag{1}$$

Но сумма проекций всех внешних сил на ось x равна нулю: $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0$.

Следовательно, и сумма проекций импульсов всех внешних сил на эту ось тоже равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} S_x(\bar{F}_k^e) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} F_{kx}^e \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e \Big) dt = 0. \tag{2}$$

Тогда из уравнения (1) следует

$$Q_{2x} - Q_{1x} = 0, \quad \text{или} \quad Q_{2x} = Q_{1x}, \tag{3}$$

т.е. имеет место закон сохранения проекции на ось x главного вектора количеств движения системы материальных точек. В начальный момент система находилась в покое и, следовательно, $Q_{1x} = 0$.

Вычислим проекцию на ось x главного вектора количеств движения системы во второй момент времени, когда движение началось.

Пусть призма B движется направо со скоростью $\mathbf{v}_B$, которую необходимо определить (рис. *б*).

Для нахождения абсолютной скорости груза A применим теорему сложения скоростей:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_r. \tag{4}$$

Переносная скорость груза A является скоростью призмы B, т.е. $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_B$. Тогда, проектируя равенство (4) на ось x, находим

$$v_{Ax} = v_{Bx} + v_{rx} = v_{Bx} + v_r \cos\alpha.$$

Теперь можно вычислить проекцию главного вектора количеств движения системы на ось x:

$$Q_{2x} = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = m_A (v_{Bx} + v_r \cos\alpha) + m_B v_{Bx}.$$

Но, согласно (3), $Q_{2x} = Q_{1x} = 0$. Следовательно,

$$m_A (v_{Bx} + v_r \cos\alpha) + m_B v_{Bx} = 0,$$

откуда

$$v_{Bx} = -\frac{m_A}{m_A + m_B} v_r \cos\alpha.$$

Знак минус указывает, что в действительности призма B движется налево;

вектор $\mathbf{v}_B$ направлен в противоположную сторону, налево. При решении задач на теорему об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек следует всегда учитывать, что в теорему об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек входят *абсолютные* скорости материальных точек.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 36.7–36.10.

4. Теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в приложении к сплошным средам (теорема Эйлера). Рассматривается объем жидкости (или газа), ограниченный боковой поверхностью трубы и двумя плоскими поперечными сечениями *1* и *2*, перпендикулярными к стенкам трубы (рис. 9.7).

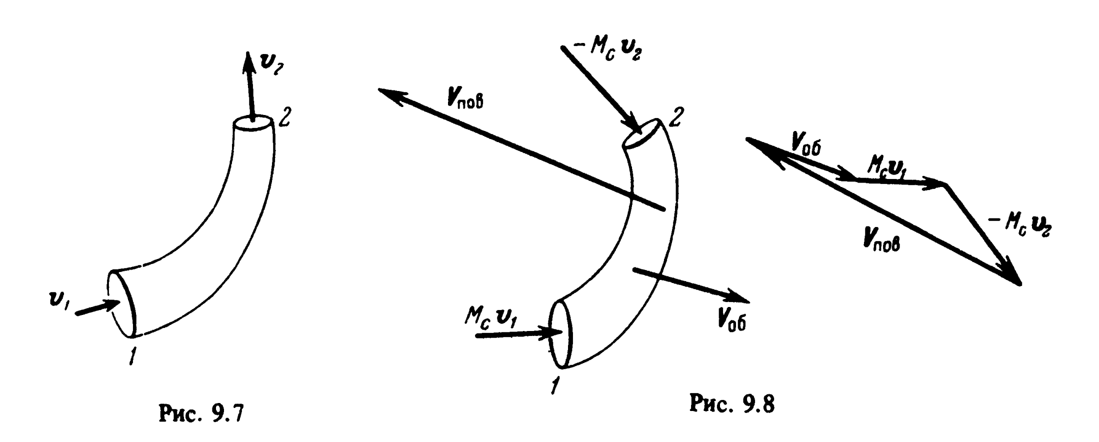


Рис. 9.7 Рис. 9.8

Пусть σ_1 и σ_2 – площади плоских поперечных сечений *1* и *2*; ρ_1 и ρ_2 – плотности жидкости в сечениях *1* и *2*, соответственно $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ – скорости жидкости в сечениях *1* и *2*. При стационарном течении секундная масса M_c, т.е. масса жидкости (или газа), протекающая в единицу времени через любое сечение трубы, постоянна:

$$M_c = \rho_1 v_1 \sigma_1 = \rho_2 v_2 \sigma_2 .$$

Векторы $M_c \mathbf{v}_1$ и $M_c \mathbf{v}_2$ – секундные количества движения жидкости в сечениях *1* и *2*.

Внешние силы, действующие на рассматриваемый объем жидкости, разделяются на объемные и поверхностные.

Объемными называются силы, которые действуют на все частицы жидкости, расположенные как внутри, так и на поверхности рассматриваемого объема (например, силы тяжести частиц жидкости).

Поверхностными называются силы, действующие на частицы жидкости, лежащие на внешней поверхности объема (например, реакции стенок

трубы, приложенные к частицам жидкости, соприкасающимся со стенками трубы).

Теорема Эйлера. Сумма главных векторов объемных и поверхностных сил, а также векторов секундных количеств движения жидкости, протекающей через два сечения трубы, равна нулю, если векторы секундных количеств движения направить внутрь выделенного сечениями объема

$$V_{об} + V_{пов} + M_c \mathbf{v}_1 - M_c \mathbf{v}_2 = 0$$

(т.е. векторы $V_{об}$, $V_{пов}$, $M_c \mathbf{v}_1$ и $-M_c \mathbf{v}_2$ образуют замкнутый многоугольник (рис. 9.8)).

Теоремой Эйлера в приложении к сплошным средам (жидкостям и газам) удобно пользоваться при решении задач, в которых в число данных и искомых величин входят: площади плоских поперечных сечений, ограничивающих рассматриваемый объем (σ_1 и σ_2), плотности жидкости (газа) в этих сечениях (ρ_1 и ρ_2), скорости жидкости (газа) в этих сечениях ($\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$), объемные и поверхностные силы.

Указание. Задачи с помощью теоремы Эйлера рекомендуется решать в следующей последовательности:

1) изобразить на рисунке объемные и поверхностные силы;

2) изобразить на рисунке векторы секундных количеств движения жидкости (газа), протекающей через два сечения, ограничивающие рассматриваемый объем жидкости (газа); при этом векторы секундных количеств движения надо направлять внутрь этого объема;

3) выбрать систему координат;

4) записать теорему Эйлера в проекциях на оси декартовых координат:

$$V_{об\,x} + V_{пов\,x} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} = 0,$$

$$V_{об\,y} + V_{пов\,y} + M_c v_{1y} - M_c v_{2y} = 0,$$

$$V_{об\,z} + V_{пов\,z} + M_c v_{1z} - M_c v_{2z} = 0,$$

где

$$M_c = \rho_1 \sigma_1 v_1 = \rho_2 \sigma_2 v_2;$$

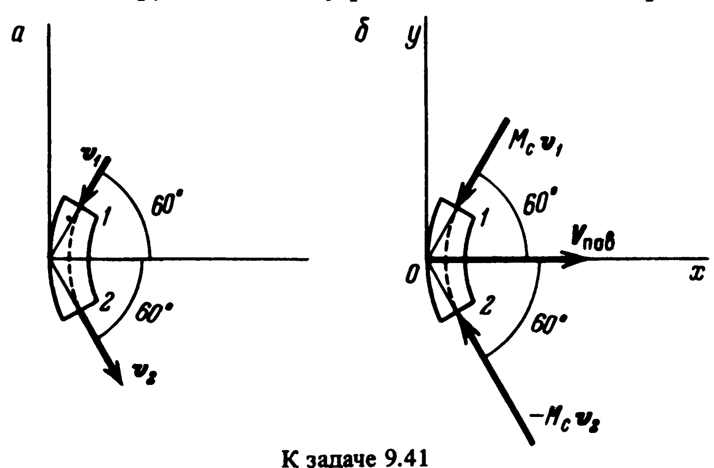
5) из уравнений, составленных в предыдущем пункте, определить искомые величины.

Задача 9.41. Струя воды протекает по изогнутой трубе, прямолинейные участки которой образуют угол 120°, со скоростью 10 м/с. Ось трубы, изображенная на рис. *а*, расположена в горизонтальной плоскости. Сечение трубы – круг, диаметр которого 10 см.

Определить главный вектор сил добавочных динамических давлений воды на стенки трубы.

Решение. Используем теорему Эйлера в приложении к сплошным средам. На рис. *а* изображен вид трубы в плане.

Объемной является сила тяжести воды, которая перпендикулярна плоскости рисунка. Поверхностными являются реакции стенок трубы, приложенные к частицам воды. Определив главный вектор реакций стенок трубы, найдем искомый главный вектор добавочных динамических давлений воды на стенки трубы по закону равенства действия и противодействия.



К задаче 9.41

Изображаем векторы секундных количеств движения воды, протекающей через сечения трубы *1* и *2*, направив их внутрь рассматриваемого объема (рис. *б*). Секундная масса воды, т.е. масса воды, протекающей через сечение трубы в одну секунду, равна

$$M_c = \gamma \sigma v,$$

где γ – плотность воды, σ – площадь поперечного сечения трубы, v – модуль скорости движения воды по трубе.

Направим ось x по горизонтали направо, а ось y – в той же горизонтальной плоскости перпендикулярно оси x.

Запишем теорему Эйлера в проекциях на оси x и y:

$$V_{\text{об}\,x} + V_{\text{пов}\,x} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} = 0,$$

$$V_{\text{об}\,y} + V_{\text{пов}\,y} + M_c v_{1y} - M_c v_{2y} = 0.$$

В данном случае, поскольку вектор $V_{\text{об}}$ перпендикулярен осям x и y, получим

$$V_{\text{пов}\,x} - M_c v \cos 60^\circ - M_c v \cos 60^\circ = 0,$$

$$V_{\text{пов}\,y} - M_c v \cos 30^\circ + M_c v \cos 30^\circ = 0$$

(индексы при скоростях отброшены, так как в нашем случае $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v$), откуда

$$V_{\text{пов}\,x} = 2M_c v \cos 60^\circ, \quad V_{\text{пов}\,y} = 0.$$

Итак, главный вектор добавочных динамических реакций стенок трубы направлен параллельно оси x (рис. *б*). Так как $M_c = \gamma\sigma v$, то

$$V_{\text{пов}} = 2\gamma\sigma v^2 \cos 60^\circ.$$

По условию $\gamma = 1$ кг/дм^3, $\sigma = \pi \cdot 1^2/4 = 0{,}79$ дм^2, $v = 100$ дм/с. Подставив эти значения, получим, что $V_{\text{пов}} = 822$ Н.

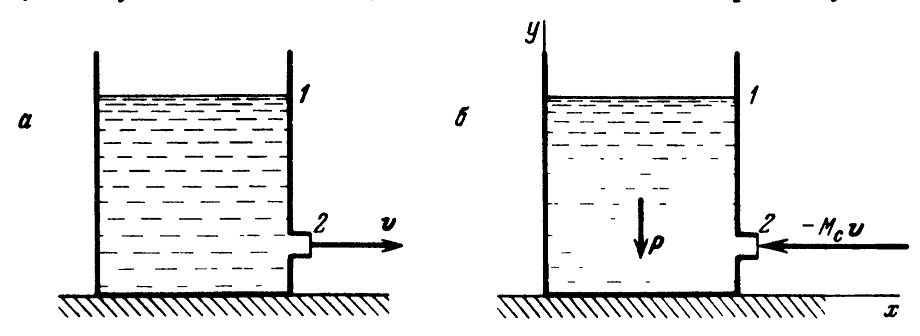
Главный вектор N сил добавочных динамических давлений воды на стенки трубы равен по модулю и направлен противоположно $V_{\text{пов}}$, т.е. по горизонтали налево.

Задача 9.42. Из резервуара, наполненного водой, вытекает струя воды со скоростью $v = 12$ м/с. Диаметр выходного отверстия $d = 4$ см (рис. *а*).

Определить суммарную добавочную горизонтальную реакцию стенок резервуара. Понижением уровня воды в резервуаре пренебречь.

Решение. Используем теорему Эйлера в приложении к сплошным средам. Объемными являются силы тяжести частиц воды. Поверхностными – реакции стенок резервуара.

Так как скоростью понижения уровня воды в резервуаре мы пренебрегаем, то секундное количество движения воды в сечении *1* равно нулю.



К задаче 9.42

Вектор секундного количества движения воды, проходящей через сечение *2*, направляем внутрь рассматриваемого объема воды, т.е. по горизонтали налево.

Выбранные оси декартовых координат x, y изображены на рис. *б*.

Теорема Эйлера в проекции на ось x имеет вид

$$V_{\text{об}\,x} + V_{\text{пов}\,x} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} = 0.$$

В данном случае, так как $V_{\text{об}\,x}$ и $M_c v_{1x}$ равны нулю, получим

$$V_{\text{пов}\,x} - M_c v = 0, \quad \text{т.е.} \quad V_{\text{пов}\,x} = M_c v.$$

Секундная масса воды равна $M_c = \gamma\sigma v$, где γ – плотность воды, σ – площадь поперечного сечения *2*, v – модуль скорости течения воды, т.е.

$V_{\text{пов}\,x} = \gamma\sigma v^2$. В данной задаче

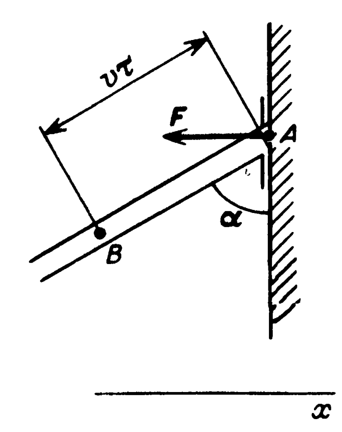
$$\gamma = 1 \text{ кг/дм}^3, \quad \sigma = \frac{\pi \cdot 0{,}4^2}{4} = 0{,}13 \text{ дм}^2, \quad v = 120 \text{ дм/с}.$$

Подставив числовые значения, получим модуль искомой суммарной добавочной горизонтальной реакции стенок резервуара $R_x = V_{\text{пов}\,x} = 187$ Н.

Задача 9.43. Струя воды, движущаяся прямолинейно со скоростью v = const, под углом α встречает на своем пути преграду в виде стенки. Площадь поперечного сечения струи равна σ, плотность воды (масса единицы объема воды) равна ρ.

Определить силу давления струи на стенку.

Решение. Силу давления струи воды на стенку будем считать направленной перпендикулярно стенке. Согласно закону о равенстве действия и противодействия, частицы воды, оказывая давление на стенку, вызывают равную и противоположно направленную реакцию стенки F.



К задаче 9.43

Для нахождения реакции стенки F выделим отрезок струи $AB = v\tau$, движение которого будет рассматриваться (рис.). Здесь τ – малый промежуток времени. Для этого промежутка времени от начала движения $t_1 = t$ до момента $t_2 = t + \tau$ применим к рассматриваемому объему воды теорему об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в приложении к сплошным средам. Запишем уравнение, выражающее эту теорему, в проекции на ось x, перпендикулярную стенке.

В начальный момент $t_1 = t$ количество движения рассматриваемого объема воды в проекции на ось x равно

$$\Sigma m_i v_{ix} = \Sigma m_i v \sin\alpha = v \sin\alpha \Sigma m_i = Mv \sin\alpha.$$

Здесь M – масса воды в выделенной части струи AB, равная ее объему $\sigma v\tau$, умноженному на плотность $M = \rho\sigma v\tau$. Итак,

$$\Sigma m_i x_{ix} = \rho\sigma v^2 \tau \sin\alpha.$$

За время τ все частицы воды в рассматриваемом объеме добегают до стенки, их скорости направлены по стенке, и проекции этих скоростей на ось x равны нулю. Следовательно, в момент $t_2 = t + \tau$ проекции скорости v_{ix_2} равны нулю, и

$$\Sigma m_i v_{ix_2} = 0.$$

На выделенную часть струи действуют внешние силы: сила тяжести, действующая по вертикали, реакция стенки F, направленная перпенди-

кулярно стенке по горизонтали, и сила давления со стороны массы воды, не входящей в рассматриваемый объем. Пренебрегая силой давления ввиду ее малости по сравнению с реакцией стенки, находим проекцию импульса этой силы на ось x. Она равна $-F\tau$.

Тогда теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в приложении к сплошным средам (теорема Эйлера) в проекции на ось x примет вид

$$-\rho\sigma v^2 \tau \sin\alpha = -F\tau,$$

откуда искомая сила давления струи на стенку равна

$$F = \rho\sigma v^2 \sin\alpha.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 36.11–36.14.

§ 5. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ГЛАВНОГО МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

1. Момент количества движения материальной точки. Главный момент количеств движения материальной системы. *Моментом* l_O *количества движения (кинетическим моментом) материальной точки относительно центра O* называется вектор, определяемый формулой

$$l_O = r \times m\mathbf{v}.$$

Модуль этого вектора равен $|l_O| = mvh$, где h – плечо (рис. 9.9). Момент количества движения в системе СИ измеряется в кг · м²/с. Момент количества движения l_z материальной точки относительно оси равен проекции на эту ось момента количества движения материальной точки относительно любого центра, лежащего на оси:

$$l_z = \text{пр}_z l_O.$$

Разложение вектора l_O по ортам имеет вид

$$l_O = l_x i + l_y j + l_z k.$$

Его модуль дается формулой

$$|l_O| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2},$$

а соответствующие направляющие косинуса будут:

$$\cos(\widehat{x, l_0}) = \frac{l_x}{|l_O|}, \quad \cos(\widehat{y, l_O}) = \frac{l_y}{|l_O|}, \quad \cos(\widehat{z, l_O}) = \frac{l_z}{|l_O|}.$$

Моменты количества движения материальной точки относительно осей декартовых координат даются формулами:

$$l_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad l_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

где x, y, z — координаты материальной точки в системе осей, имеющей начало в центре O; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — проекции скорости точки на эти оси.

Главный момент L_O количеств движения материальной системы (кинетический момент) относительно центра O равен векторной сумме моментов количеств движения относительно того же центра материальных точек системы, т.е.

$$L_O = \sum_{k=1}^{n} l_{kO} = \sum_{k=1}^{n} (r_k \times m_k v_k) \quad (1^*)$$

(было бы ошибочным считать, что $L_O = r_c \times M v_c$, так как момент главного вектора количеств движения относительно центра, вообще говоря, не равен главному моменту количеств движения всех материальных точек системы относительно того же центра).

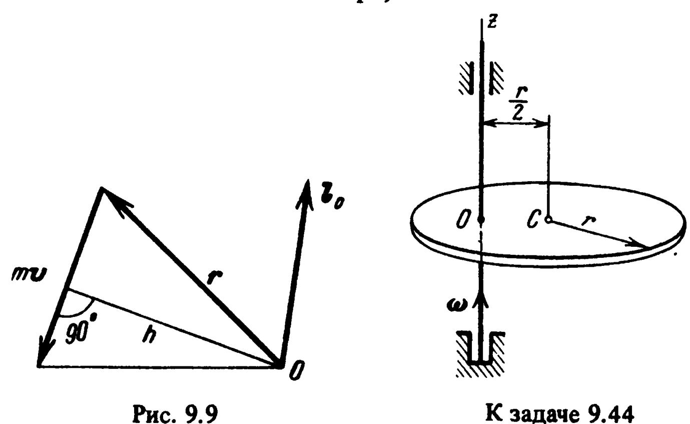


Рис. 9.9 К задаче 9.44

Главные моменты количеств движения материальной системы относительно осей декартовых координат определяются формулами:

$$L_x = \sum_{k=1}^{n} l_{kx}, \quad L_y = \sum_{k=1}^{n} l_{ky}, \quad L_z = \sum_{k=1}^{n} l_{kz}. \quad (2^*)$$

Главный момент количеств движения L_z твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, относительно этой оси равен произведению момента инерции I_z твердого тела относительно этой же оси на проекцию угловой скорости ω_z:

$$L_z = I_z \omega_z. \quad (3^*)$$

Разложим движение точек материальной системы на переносное вместе с осями, начало которых взято в центре масс C системы, и на их относительное движение по отношению к центру масс. Тогда

$$L_O = L_C + m_O(Q_C), \qquad (4^*)$$

т.е. главный момент количеств движения системы L_O относительно неподвижного центра O равен векторной сумме главного момента L_C этой системы в движении по отношению к осям, движущимся поступательно вместе с центром масс C, и момента $m_O(Q_C)$ относительно неподвижного центра O главного вектора количеств движения Q_C системы, приложенного в центре масс C.

Зависимость (4*) в проекциях на оси x, y, z имеет вид

$$L_{Ox} = L_{Cx} + m_{Ox}(Q_C), \quad L_{Oy} = L_{Cy} + m_{Oy}(Q_C), \quad L_{Oz} = L_{Cz} + m_{Oz}(Q_C). \qquad (5^*)$$

Если в состав системы входит n твердых тел, то

$$L_O = \sum_{k=1}^{n} L_{kO}, \qquad (6^*)$$

т.е. главный момент количеств движения системы относительно неподвижного центра O равен векторной сумме главных моментов количеств движения относительно того же центра всех твердых тел, входящих в состав данной системы.

Зависимость (6*) в проекциях на оси x, y, z имеет вид

$$L_x = \sum_{k=1}^{n} L_{kx}, \quad L_y = \sum_{k=1}^{n} L_{ky}, \quad L_z = \sum_{k=1}^{n} L_{kz}. \qquad (7^*)$$

Нетрудно проследить полную аналогию между понятием момента силы в статике и момента количества движения в динамике, вытекающую из сопоставления соответствующих формул:

$$m_O(F) = r \times F, \quad l_O = r \times m\mathbf{v} \text{ и т.д.}$$

Место силы в этих формулах занимает количество движения.

Задача 9.44. Вычислить главный момент количеств движения относительно оси вращения диска массой M и радиусом r, эксцентрично насаженного на ось вращения и вращающегося с угловой скоростью ω.

Плоскость диска перпендикулярна оси вращения. Эксцентриситет равен половине радиуса (рис.).

Решение. Направим вдоль оси вращения координатную ось z.

Главный момент количеств движения твердого тела относительно оси вращения $L_z = I_z\omega_z$, где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Для вычисления I_z применяем теорему Штейнера.

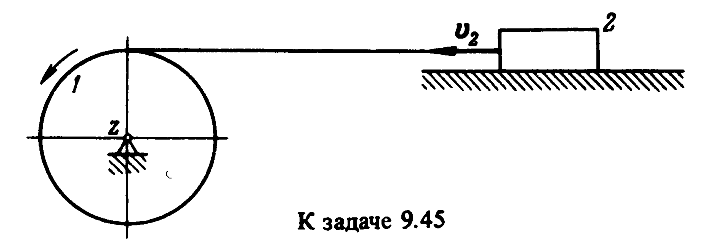
Мысленно проведя через центр масс C диска ось, параллельную оси z, найдем

$$I_z = I_C + M\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{Mr^2}{2} + \frac{Mr^2}{4} = \frac{3}{4}Mr^2.$$

Итак, искомый главный момент количеств движения рассматриваемого диска относительно оси вращения z дается формулой (3^*)

$$L_z = I_z\omega_z = \frac{3}{4}Mr^2\omega_z.$$

Задача 9.45. При вращении барабана *1* массой M_1 и радиусом r_1 вокруг неподвижной оси z на его боковую поверхность наматывается нить,



К задаче 9.45

которая приводит в движение груз *2* массой M_2, скользящий по неподвижной горизонтальной плоскости (рис.).

Вычислить главный момент количеств движения системы, относительно оси z, выразив его в зависимости от угловой скорости. Барабан считать однородным круглым цилиндром. Массой нити пренебречь. Ось z направлена перпендикулярно плоскости рисунка на нас.

Решение. В состав системы входят два твердых тела: барабан и груз. Поэтому

$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)}, \tag{1}$$

где $L_z^{(1)}$ – главный момент количеств движения барабана, а $L_z^{(2)}$ – груза относительно неподвижной оси z.

Вычислим $L_z^{(1)}$ по формуле (3^*) (стр. 231), приняв во внимание, что $I_z = M_1 r^2/2$. Имеем

$$L_z^{(1)} = \frac{M_1 r^2}{2}\omega_z. \tag{2}$$

Главный момент количеств движения груза, движущегося поступательно, определяется как момент количества движения материальной точки, т.е. $L_z^{(2)} = m_2 v_2 \cdot r$. Так как $v_2 = r\omega$, то

$$L_z^{(2)} = M_2 r^2 \omega_z. \tag{3}$$

Подставив результаты (2) и (3) в формулу (1), получим искомый главный момент количеств движения

$$L_z = \frac{M_1 + 2M_2}{2} r^2 \omega_z. \tag{4}$$

2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Производная по времени от вектора момента количества движения материальной точки относительно неподвижного центра равна векторной сумме моментов относительно того же центра всех сил, приложенных к материальной точке:

$$\frac{dl_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k). \tag{8*}$$

Та же теорема, записанная относительно неподвижных осей декартовых координат, имеет вид

$$\frac{dl_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k), \quad \frac{dl_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k),$$

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k). \tag{9*}$$

Указание. Задачи с помощью теоремы об изменении момента количества движения материальной точки рекомендуется решать в следующей последовательности:

1) выбрать систему координат (при движении точки по дуге окружности следует одну из осей направить через центр окружности перпендикулярно к ее плоскости);

2) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке, т.е. активные силы и реакции связей (применив закон освобождаемости от связей);

3) вычислить суммы моментов сил, приложенных к материальной точке, относительно осей координат;

4) изобразить вектор количества движения материальной точки, записать выражение его моментов относительно неподвижных осей координат и взять от них производные по времени;

5) подставить результаты подсчетов двух предыдущих пунктов решения задачи в уравнения теоремы об изменении момента количества движения материальной точки;

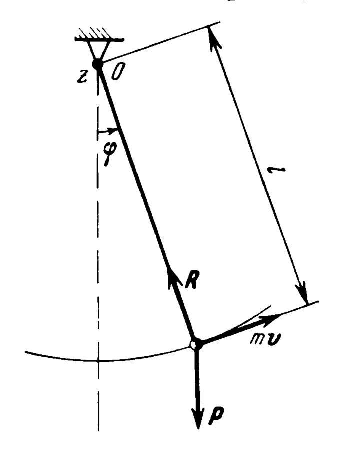
6) решить, в соответствии с условием, первую либо вторую задачу динамики точки.

Пункт 4) решения задачи можно, минуя 2) и 3), выполнять после 1).

Задача 9.46. Найти закон и период колебаний математического маятника, длина нити которого равна l. В начальный момент маятнику, нить которого занимала отвесное положение, была сообщена посредством толчка начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$.

Решение. *Математическим маятником* называется материальная точка, подвешенная посредством невесомой нерастяжимой нити к неподвижной оси и движущаяся в вертикальной плоскости.

На рисунке маятник изображен в отклоненном положении от вертикали на угол φ. Направление положительного отсчета угла поворота φ указано на рисунке. Маятник совершает качания около оси z, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через точку привеса O. Траекторией материальной точки является дуга окружности, расположенная в вертикальной плоскости с центром в O и радиусом l.



К задаче 9.46

Для решения задачи применяем теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси z:

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k). \tag{1}$$

Изображаем силу тяжести материальной точки $P = Mg$ и реакцию нити R. Момент реакции нити R относительно оси z равен нулю, а момент силы тяжести P равен $-Ph = -Mgl\sin\varphi$. Момент отрицателен, так как его направление противоположно направлению положительного отсчета угла поворота φ. Итак, сумма моментов всех сил, приложенных к маятнику, равна

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k) = -Mgl\sin\varphi. \tag{2}$$

Рисунок сделан в предположении, что маятник движется в сторону увеличения угла поворота φ. Момент количества движения маятника относительно оси z равен $l_z = Mv_\tau l$; так как $v_\tau = l\dot{\varphi}$, то $l_z = Ml^2\dot{\varphi}$ и

$$\frac{dl_z}{dt} = Ml^2\ddot{\varphi}. \tag{3}$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k)$ и dl_z/dt из формул (2) и (3) в урав-

нение (1), получим

$$Ml^2\ddot{\varphi} = -Mgl\sin\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \qquad (4)$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения колебаний маятника представляет известные трудности. Поэтому решим задачу приближенно, считая колебания маятника малыми. Разложив $\sin\varphi$ в ряд

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots$$

и пренебрегая членами разложения порядка выше первого, получим $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда дифференциальное уравнение колебаний маятника примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Обозначив $g/l = k^2$, запишем окончательно:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Для решения этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами составим соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$. Корни характеристического уравнения равны $\lambda_{1,2} = \pm ki$, и решение уравнения запишется в виде

$$\varphi = C_1\cos kt + C_2\sin kt. \qquad (5)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся заданными начальными условиями движения. В условии задачи указано, что в начальный момент маятнику, нить которого занимала отвесное положение, была сообщена посредством толчка начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$, т.е. при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

Дифференцируя φ, определенное уравнением (5), по времени, находим

$$\dot{\varphi} = -C_1k\sin kt + C_2k\cos kt. \qquad (6)$$

Подставив в (5) $t = 0$, $\varphi = 0$, а в (6) $t = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, получим $C_1 = 0$, $C_2 = \dot{\varphi}_0/k$. Теперь уравнение (5) принимает вид

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}\sin kt,$$

где $k = \sqrt{g/l}$. Обозначим $\dot{\varphi}_0/k = \alpha$; тогда окончательно

$$\varphi = \alpha \sin kt.$$

Итак, маятник совершает гармонические колебания с угловой амплитудой α и с круговой частотой $k = \sqrt{g/l}$. При малых колебаниях маятника ($\sin\varphi \approx \varphi$) оказывается, что круговая частота колебаний не зависит от начальных условий движения, т.е. колебания маятника обладают свойством *изохронности*.

Период колебаний маятника равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{7}$$

Масса материальной точки не входит в выражение периода колебаний T. Следовательно, материальные точки с различными массами имеют при одинаковой длине нити маятника l один и тот же период колебаний. (В *секундном маятнике* $T/2 = 1$ с, т.е. $\pi\sqrt{l/g} = 1$, откуда длина нити секундного маятника равна $l = g/\pi^2 \approx 1$ м.)

Переходим к определению периода колебаний T из точного дифференциального уравнения колебаний математического маятника (4)

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Обозначив $g/l = k^2$, умножив почленно уравнение на $d\varphi$ и учитывая, что $\ddot{\varphi}d\varphi = \dfrac{d\dot{\varphi}}{dt}d\varphi = \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}$, получим

$$\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = -k^2\sin\varphi\,d\varphi.$$

Проинтегрировав, находим

$$\dot{\varphi}^2 = 2k^2\cos\varphi + C;$$

так как при $\varphi = \alpha$ $\dot{\varphi} = 0$, то $C = -2k^2\cos\alpha$ и, следовательно,

$$\dot{\varphi} = k\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)},$$

или, учитывая, что $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$,

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}} = k\,dt.$$

Воспользовавшись тождеством $\cos\varphi - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right)$,

получим

$$\frac{d(\varphi/2)}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\varphi/2)}} = k\,dt. \tag{8}$$

Сделаем подстановку

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin u, \tag{9}$$

откуда

$$d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha/2)\cos u\,du}{\cos(\varphi/2)}.$$

Теперь уравнение (8) принимает вид

$$\frac{du}{\cos(\varphi/2)} = k\,dt,$$

или

$$\frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2)\sin^2 u}} = k\,dt.$$

В силу начального условия: при $t = 0$ $\varphi = 0$, из формулы (9) вытекает, что в начальный момент $u = 0$,а из условия: при $t = T/4$ $\varphi = \alpha$ следует, что $u = \pi/2$. Поэтому

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2)\sin^2 u}} = \frac{kT}{4},$$

где $k = \sqrt{g/l}$.

Итак, период колебаний маятника равен

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K, \tag{10}$$

где

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2)\sin^2 u}}$$

является эллиптическим интегралом первого рода. Разлагая

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2)\sin^2 u}}$$

в ряд и почленно интегрируя, получим

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\sin^2(\alpha/2)}{4} + \frac{9\sin^4(\alpha/2)}{64} + \ldots\right).$$

После подстановки полученного значения K в формулу (10) приходим к искомому выражению периода колебаний маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots\right), \tag{11}$$

т.е. колебания маятника при конечной угловой амплитуде α свойством изохронности не обладают – его период зависит от угловой амплитуды колебаний α.

Считая α малой величиной и пренебрегая в формуле (11) членами разложения, содержащими α во второй и более высоких степенях, получим приближенную формулу (7):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{12}$$

При угловой амплитуде колебаний $\alpha = 20°$ период колебаний, подсчитанный по формуле (11) или по более точной формуле (10), больше периода колебаний маятника, определенного по приближенной формуле (12), всего лишь на 0,8%, но при $\alpha = 60°$ – соответственно уже на 3,5%.

Задача 9.47. Максимальное угловое отклонение математического маятника массой m и длиной l равно 60° (рис.).

Найти натяжение нити маятника в функции угла отклонения θ и его максимальное значение. Массой нити пренебречь.

Решение. Колебания математического маятника описываются кинематическим уравнением

$$\theta = \theta_{max}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha\right), \tag{1}$$

где θ_{max} (наиболее угловая амплитуда) и α (начальная фаза) зависят от начальных условий движения.

В рассматриваемой задаче

$$\theta = \frac{\pi}{3}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha\right) \tag{2}$$

К задаче 9.47

Угловую скорость маятника в произвольный момент времени определяем, дифференцируя (2):

$$\dot\theta = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha\right). \tag{3}$$

Линейная скорость маятника равна

$$v = \dot{\theta} l = \frac{\pi}{3}\sqrt{gl}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right). \tag{4}$$

Запишем динамическое уравнение движения маятника как материальной точки в проекции на нормаль к траектории:

$$\frac{mv^2}{l} = -P\cos\theta + N. \tag{5}$$

Здесь $P = mg$ – сила тяжести, а N – реакция нити маятника. Из (5) получим

$$N = \frac{mv^2}{l} + P\cos\theta = m\left(\frac{v^2}{l} + g\cos\theta\right).$$

Подставим в N выражение (4) для скорости:

$$N = m(\dot{\theta}^2 l + g\cos\theta) = m\left[\frac{\pi^2}{9}g\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right) + g\cos\theta\right]. \tag{6}$$

Выразим в (6) $\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right)$ через синус того же аргумента, а синус в свою очередь представим из (1) как функцию θ:

$$\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right) = 1 - \sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{max}}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{9\theta^2}{\pi^2}.$$

Тогда выражение для натяжения нити получит вид

$$N = mg\left(\cos\theta + \frac{\pi^2}{9} - \theta^2\right).$$

Максимальным натяжение будет при $\theta = 0$. Оно равно

$$N_{max} = mg\left(1 + \frac{\pi^2}{9}\right).$$

Указание. Рекомендуем решить задачи 28.4, 28.13 из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского.

3. Случай сохранения момента количества движения материальной точки. Если векторная сумма моментов относительно неподвижного

центра всех сил, приложенных к материальной точке, равна нулю, то момент количества движения материальной точки относительно того же центра постоянен, т.е. если $\sum\limits_{k=1}^{n} m_O(\boldsymbol{F}_k) = 0$, то l_O постоянен.

Аналогично, если сумма моментов сил, приложенных к материальной точке, относительно оси равна нулю, то момент количества движения этой точки относительно той же оси постоянен. Например, если $\sum\limits_{k=1}^{n} m_x(F_k) = 0$, то l_x – постоянная величина.

Этими частными случаями теоремы об изменении момента количества движения материальной точки удобно пользоваться при изучении движения материальной точки под действием центральной силы.

Указание. При сохранении момента количества движения материальной точки задачи можно решать в такой последовательности:

1) выбрать центр, относительно которого следует применить теорему об изменении момента количества движения материальной точки (при движении точки под действием центральной силы следует брать центр силы);

2) изобразить на рисунке все активные силы и реакции связей, приложенные к материальной точке;

3) определить вектор количества движения материальной точки и найти момент количества движения этой точки относительно центра;

4) применить теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и, проверив, что сумма моментов всех сил относительно центра равна нулю, приравнять моменты количеств движения материальной точки в ее начальном и конечном положениях: $l_{2O} = l_{1O}$. Из этого уравнения определить искомую величину.

В некоторых задачах приходится пользоваться этой теоремой относительно одной из осей координат.

Задача 9.48. Показать, что планеты, находящиеся под действием центральных сил, имеют плоскую траекторию. Силой сопротивления движению пренебречь.

Решение. Рассмотрим планету, схематизированную на рисунке в виде точечной массы M.

К точке M приложена только одна сила – центральная сила F, линия действия которой при движении планет проходит через центр O. Применим теорему об изменении главного момента количеств движения материальной точки

$$\frac{dl_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_O(\boldsymbol{F}_k). \qquad (1)$$

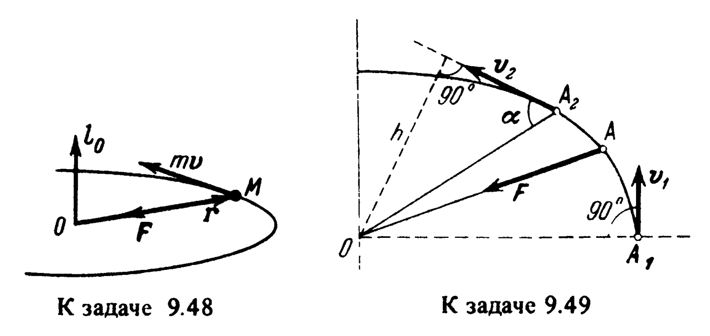
Так как линия действия силы F проходит через точку O, то

$$\sum_{k=1}^{n} m_O(F_k) = 0. \qquad (2)$$

Подставив результат (2) в формулу (1), получим $dl_O/dt = 0$, откуда

$$l_O = C. \qquad (3)$$

По определению момент количества движения материальной точки равен $l_O = r \times m\mathrm{v}$. В соответствии с формулой (3) он векторно неизменен. Значит, векторы r и $m\mathrm{v}$ постоянно лежат в плоскости, перпендикулярной вектору l_O т.е. точка M имеет плоскую траекторию.



К задаче 9.48 К задаче 9.49

Задача 9.49. Материальная точка движется под действием центральной силы F, линия действия которой неизменно проходит через точку O. Найти скорость точки в положении A_2, если в положении A_1 ее скорость v_1 равнялась 4 м/с, причем $\dfrac{OA_1}{OA_2} = \dfrac{3}{2}$ и угол, образуемый скоростью v_2 с линией действия силы, $\alpha = 60°$ (рис.).

Решение. Применяем теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси z, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка (на рисунке эта ось не показана):

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k).$$

Так как к материальной точке приложена только сила F, момент которой относительно оси равен нулю, то $\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k) = 0$ и, следовательно, l_z – постоянная величина, т.е. $l_{1z} = l_{2z}$. Момент количества движения материальной точки в положении A_1 относительно оси z

$$l_{1z} = Mv_1 \cdot OA_1.$$

Момент количества движения материальной точки в положении A_2 относительно оси z

$$l_{2z} = Mv_2 h = Mv_2 \cdot OA_2 \sin\alpha.$$

Так как $l_{1z} = l_{2z}$, то $Mv_1 \cdot OA_1 = Mv_2 \cdot OA_2 \sin\alpha$, откуда $v_2 = v_1 \dfrac{OA_1}{OA_2 \sin\alpha}$.

После подстановки численных значений получим, что $v_2 = 6{,}92$ м/с.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 28.4, 28.8–28.10.

4. Теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы. Производная по времени главного момента количеств движения материальной системы относительно неподвижного центра равна векторной сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра, т.е.

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k^e). \qquad (10^*)$$

Следует обратить внимание на то, что, подобно теоремам о движении центра масс, об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в формулировку данной теоремы также не входят внутренние силы системы, определение которых обычно связано со значительными трудностями.

Та же теорема, записанная относительно осей декартовых координат, имеет вид

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k^e), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k^e),$$
$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e). \qquad (11^*)$$

Применяя эту теорему, можно решать как первую, так и вторую задачи динамики.

Теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно неподвижной оси удобно применять при рассмотрении движения материальной системы, в состав которой входят тела, вращающиеся вокруг этой оси.

Указание. Задачи с помощью теоремы об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно неподвижной оси рекомендуется решать в следующем порядке:

1) направить одну из осей координат вдоль неподвижной оси вращения;

2) записать теорему об изменении главного момента количеств движения системы (11*) относительно соответствующей оси;

3) изобразить на рисунке все внешние силы системы;

4) вычислить главный момент внешних сил относительно неподвижной оси;

5) вычислить главный момент количеств движения системы относительно неподвижной оси и взять его производную по времени;

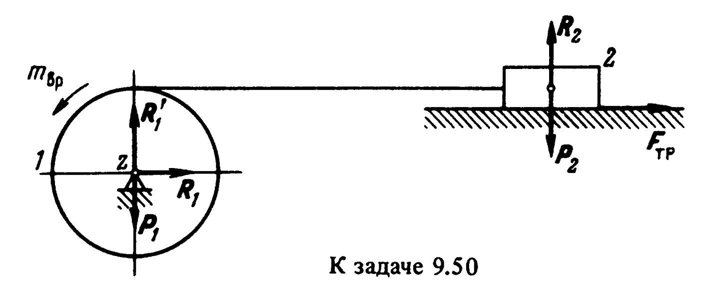
6) подставить результаты пунктов 4) и 5) в 2) и затем, в зависимости от условия, решить первую либо вторую задачу динамики.

Задача 9.50. Использовав условие и решение задачи 9.45, определить угловое ускорение барабана, если к нему приложен вращающий момент $m_{вр}$, а коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен f. Высотой груза пренебречь.

Решение. Применим теорему (11*) об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек относительно оси z, т.е.

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e).$$

Изобразим внешние силы и моменты системы: $m_{вр}$ – вращающий момент, $P_1 = M_1 g$ – сила тяжести барабана, $P_2 = M_2 g$ – сила тяжести груза, R_1 и R_1' – составляющие реакции оси барабана, R_2 – нормальная



К задаче 9.50

реакция плоскости, $F_{тр}$ – сила трения при скольжении груза о плоскость. Учтя, что $R_2 = -P_2$, $F_{тр} = fM_2 g$, а силы P_1, R_1 и R_1' приложены в точке, лежащей на оси z, запишем

$$\Sigma m_z(F_k^e) = m_{вр} - fM_2 gr. \tag{1}$$

Главный момент количеств движения L_z данной системы относительно неподвижной оси z представлен формулой (4) задачи 9.45. Взяв производную L_z по времени и учтя, что $\dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$, имеем

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{M_1 + 2M_2}{2} r^2 \ddot{\varphi}. \tag{2}$$

Подставив результаты (1) и (2) в уравнение (11*) и решив его относительно $\ddot{\varphi}$, получим искомый результат:

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{(M_1 + 2M_2)r^2}(m_{\text{вр}} - fM_2gr). \quad (3)$$

Указание. Рекомендуем решить задачу 37.44 из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского.

5. Случай сохранения главного момента количеств движения материальной системы. Если векторная сумма моментов всех внешних сил системы относительно неподвижного центра равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно того же центра постоянен, т.е. если

$$\sum_{k=1}^{n} m_O(F_k^e) = 0,$$

то вектор L_O постоянен.

Аналогично, если сумма моментов всех внешних сил системы относительно неподвижной оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно той же оси постоянен. Например, если

$$\sum_{k=1}^{n} m_x(F_k^e) = 0, \text{ то } L_x \text{ — постоянная величина.}$$

Теорему о сохранении главного момента количеств движения материальной системы относительно неподвижной оси рекомендуется применять при рассмотрении движения материальной системы, в состав которой входит твердое тело, вращающееся вокруг этой оси. Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси равна нулю, то можно получить соотношение между массами материальных точек, их скоростями, а также моментом инерции и угловой скоростью вращения твердого тела.

Указание. Задачи с помощью теоремы о сохранении главного момента количеств движения рекомендуется решать в такой последовательности:

1) выбрать координатные оси, направив одну из них вдоль неподвижной оси вращения;

2) записать теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно выбранной оси, например:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e);$$

3) изобразить на рисунке все внешние силы системы;

4) показать, что сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси равна нулю;

5) вычислить и приравнять главные моменты количеств движения материальной системы относительно оси в начальный и конечный моменты времени: $L_{1z} = L_{2z}$, где

$$L_{1z} = \sum_{k=1}^{n} l_{1kz} \text{ и } L_{2z} = \sum_{k=1}^{n} l_{2kz};$$

6) решив уравнение $L_{1z} = L_{2z}$, определить искомую величину.

Задача 9.51. Полому кольцу радиусом R и массой m сообщили угловую скорость ω_0 вокруг вертикальной оси y. Внутри кольца из наивысшей точки движется шарик массой M (рис.).

Считая шарик материальной точкой, найти отношение наибольшей угловой скорости вращения кольца к наименьшей. Момент инерции полого кольца считать равным $I_x = I_y = mR^2/2$. Трением в опорах пренебречь.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из полого кольца и шарика M.

В первом положении (шарик находится в верхней точке кольца) момент инерции системы относительно оси y равен

$$I_{y1} = \frac{mR^2}{2}, \tag{1}$$

так как шарик в этом положении находится на оси вращения y и его момент инерции относительно этой оси равен нулю. Следовательно, кинетический момент системы в первом положении равен

$$L_{y1} = I_{y1}\omega_0 = \frac{mR^2}{2}\omega_0. \tag{2}$$

Второе положение реализуется, когда шарик находится на наибольшем расстоянии от оси вращения y (т.е. на оси x), на расстоянии R от оси вращения y. В этом положении момент инерции рассматриваемой системы равен

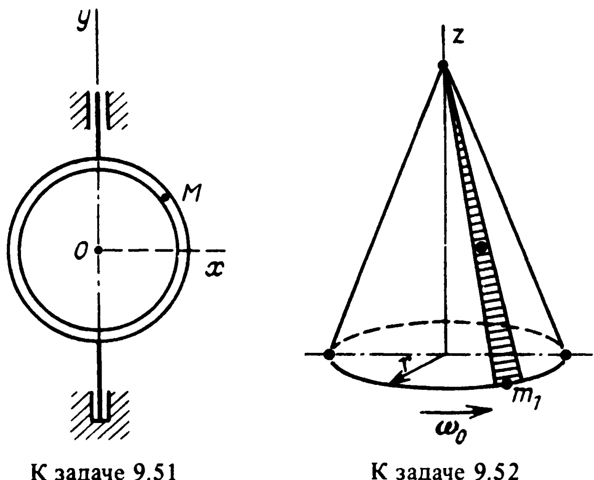
$$I_{y2} = \frac{mR^2}{2} + MR^2. \tag{3}$$

Кинетический момент системы во втором положении равен

$$L_{y2} = I_{y2}\omega = \left(\frac{m}{2} + M\right)R^2\omega. \tag{4}$$

Но, согласно условию, на систему действуют внешние силы: в первом положении – силы тяжести кольца и шарика, а также реакция подпятника. Все они направлены по оси вращения, и, следовательно, сумма их моментов относительно оси y равна нулю. Во втором (и любом другом поло-

жении) на систему, кроме сил тяжести кольца и шарика, реакции подпятника, действует еще пара сил, образованная двумя равными, противоположно направленными горизонтальными силами F_x, $-F_x$. Эта пара сил возникает в подпятнике и подшипнике и уравновешивает момент



К задаче 9.51 К задаче 9.52

силы тяжести шарика, стремящийся повернуть кольцо вокруг оси z. Линии действия этих сил пересекают ось y, и, следовательно, главный момент внешних сил относительно оси вращения по-прежнему равен нулю. Поэтому

$$I_y \frac{d\omega}{dt} = 0$$

в любом положении. Следовательно, интегрируя, находим

$$L_y = I_y \omega = \text{const}.$$

Приравнивая найденные ранее значения кинетического момента (2) и (4)

$$\frac{m}{2} R^2 \omega_0 = \left(\frac{m}{2} + M\right) R^2 \omega,$$

находим

$$\frac{\omega_0}{\omega} = 1 + \frac{2M}{m}.$$

Угловая скорость ω_0 будет наибольшей (так как момент инерции системы в этом положении будет наименьшим), а угловая скорость ω будет наименьшей (так как момент инерции системы во втором положении будет наибольшим).

Задача 9.52. Однородный круговой конус массой m, радиус основания которого равен r, вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижной вертикальной оси симметрии z. Вдоль образующей конуса положена лестница, на нижней ступени которой стоит человек массой m_1 (рис.). Момент инерции конуса относительно оси z равен

$$I_z = \frac{3}{10} mr^2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Определить угловую скорость конуса в моменты времени, когда 1) человек пройдет половину длины лестницы и 2) он достигнет вершины конуса.

Решение. Рассматриваемая система состоит из однородного конуса и человека. На систему действуют активные силы: сила тяжести конуса и сила тяжести человека. Обе силы параллельны оси z, и, следовательно, их моменты относительно этой оси равны нулю. Реакции опор, являющиеся также внешними силами (как и силы тяжести), приложены к неподвижной оси z, и, следовательно, их моменты относительно этой оси равны нулю.

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$I\epsilon = \sum_{i=1}^{n} m_z (F_i^e), \tag{1}$$

где I — момент инерции конуса вместе с человеком, ϵ — угловое ускорение системы. В нашем случае момент инерции вращающейся системы равен

$$I = I_z + m_1 \rho^2, \tag{2}$$

где ρ — расстояние от человека до оси вращения z.

Сумма моментов внешних сил относительно оси z равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} m_z (F_i^e) = 0. \tag{3}$$

Внося значения момента инерции (2) и главного момента внешних сил относительно оси z (3) в уравнение (1), находим

$$(I_z + m_1 \rho^2)\,\epsilon = 0. \tag{4}$$

Но $\epsilon = d\omega/dt$, и уравнение (4) принимает вид

$$(I_z + m_1 \rho^2) \frac{d\omega}{dt} = 0. \tag{5}$$

Интегрируя, находим

$$(I_z + m_1 \rho^2)\,\omega = C_1 = \text{const}. \qquad (6)$$

Это закон сохранения главного момента количеств движения относительно оси вращения.

В начальный момент расстояние от человека до оси равно $\rho = r$, а угловая скорость конуса ω_0. Внося эти значения переменных в (6), получаем

$$(I_z + m_1 r^2)\,\omega_0 = C_1. \qquad (7)$$

Подставляя это значение произвольной постоянной интегрирования в (6), имеем

$$(I_z + m_1 \rho^2)\,\omega = (I_z + m_1 r^2)\,\omega_0. \qquad (8)$$

Когда человек пройдет половину лестницы, расстояние от него до оси z будет равно $\rho_1 = r/2$. Подставляя это значение ρ_1 в уравнение (8), находим искомую угловую скорость

$$\left[I_z + m_1\left(\frac{r}{2}\right)^2\right]\omega_1 = (I_z + m_1 r^2)\,\omega_0,$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{I_z + m_1 r^2}{I_z + m_1 r^2/4}\,\omega_0.$$

Когда человек достигнет вершины конуса, расстояние от него до оси z равно $\rho = 0$. Тогда угловая скорость конуса, согласно (8), станет равной

$$\omega_2 = \frac{I_z + m_1 r^2}{I_z}\,\omega_0.$$

При подъеме человека по лестнице суммарный момент инерции уменьшается по мере приближения человека к оси вращения и в соответствии с теоремой о сохранении главного момента количеств движения угловая скорость растет.

Задача 9.53. Кольцевая рама может вращаться вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через ее центр масс. В раме симметрично относительно оси Oz закреплены вертикальные оси двух одинаковых однородных дисков радиусом r и массой m. Расстояние между центрами дисков равно $2b$ (рис.). В начальный момент система находится в покое. Затем диски начинают вращаться в одну сторону с равными угловыми скоростями ω_1 относительно рамы. Это осуществляется без внешних сил при помощи двух встроенных электромоторов. Зная момент инерции рамы относительно оси Oz, равный I, определить угловую скорость рамы ω_2.

Решить эту задачу также в случае, когда диски вращаются в противоположные стороны.

Решение 1. Применим теорему моментов (теорему о сохранении момента количества движения) относительно оси Oz. Поскольку все внешние силы (силы тяжести) параллельны оси Oz, момент количества движения системы относительно этой оси сохраняется. До начала движения он был равен нулю; следовательно, когда диски и рама будут вращаться, он тоже будет равен нулю:

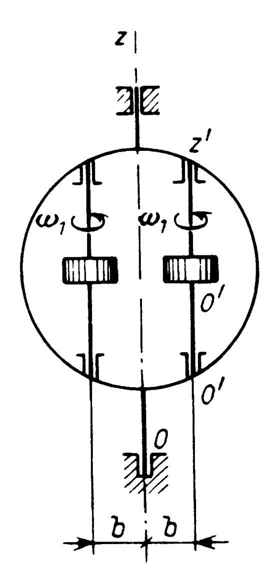
$$L_z = 0. \quad (1)$$

Но момент количества движения системы представляет собой сумму

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} + L_{3z} \quad (2)$$

моментов количества движения первого и второго дисков и рамы относительно оси Oz.

Движение дисков является сложным: они вращаются относительно рамы и вместе с ней. Будем считать первое из этих движений относительным, а второе переносным. Тогда



К задаче 9.53

$$L_{1z} = L_{1z}^{(r)} + L_{1z}^{(e)}, \quad (3)$$

где $L_{1z}^{(r)}$ — момент количества движения первого диска относительно оси z в относительном движении, а $L_{1z}^{(e)}$ — момент количества движения первого диска относительно оси z в переносном движении. Аналогично и для второго диска.

Проведем ось $O'z'$ через центр диска параллельно оси Oz (рис.). Тогда моменты количества движения диска в относительном движении относительно осей Oz и $O'z'$ будут одинаковыми. Действительно, поскольку можно считать, что начало координат O' совпадает с центром масс диска, то имеет место соотношение

$$L_O = L_{O'} + m\mathbf{v}_C^r \times \overline{O'O}, \quad (4)$$

где L_O и $L_{O'}$ — моменты количества движения относительно O и O', а $\mathbf{v}_C^r$ — относительная скорость центра масс диска. Однако эта скорость равна нулю (центр масс диска неподвижен относительно рамы). Отсюда получаем равенство моментов

$$L_O = L_{O'}, \quad (5)$$

а следовательно, равны и проекции этих моментов на параллельные оси:

$$L_{1z}^r = L_{1z'}^r. \quad (6)$$

Поскольку диск в относительном движении вращается относительно оси $O'z'$, то, считая это вращение направленным против хода часовой стрелки, имеем

$$\omega'_{1z} = \omega_1. \tag{7}$$

Следовательно,

$$L^r_{1z} = L^r_{1z'} = I_{z'}\,\omega'_{1z} = I_{z'}\,\omega_1, \tag{8}$$

где

$$I_{z'} = \frac{1}{2}mr^2 \tag{9}$$

– момент инерции диска относительно оси $O'z'$. Подставляя (9) в (8), имеем для момента количества движения диска в относительном движении

$$L^r_{1z} = \frac{1}{2}mr^2\omega_1. \tag{10}$$

Переносным движением диска является его вращение вместе с рамой относительно оси Oz. Обозначая проекцию угловой скорости рамы на ось Oz через ω_z, имеем

$$L^e_{1z} = I_z\,\omega_z. \tag{11}$$

Поскольку ось $O'z'$ проходит через центр масс диска, то, согласно формуле связи моментов инерции относительно параллельных осей, получим

$$I_z = I_{z'} + mb^2, \tag{12}$$

или, используя (9),

$$I_z = \frac{1}{2}mr^2 + mb^2. \tag{13}$$

Следовательно, из (11) имеем

$$L^e_{1z} = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mb^2\right)\omega_z \tag{14}$$

и, наконец, из (3), (10) и (14) получаем

$$L_{1z} = \frac{1}{2}mr^2\omega_1 + \left(\frac{1}{2}mr^2 + mb^2\right)\omega_z. \tag{15}$$

Если второй диск вращается в ту же сторону, то очевидно, что и

$$L_{2z} = \frac{1}{2}mr^2\omega_1 + \left(\frac{1}{2}mr^2 + mb^2\right)\omega_z. \tag{16}$$

Для рамы имеем

$$L_{3z} = I\omega_z. \qquad (17)$$

Из (1) и (2) получаем

$$L_{1z} + L_{2z} + L_{3z} = 0. \qquad (18)$$

Подставляя (15)–(17) в (18) и приводя подобные члены, получаем

$$mr^2\omega_1 + (mr^2 + 2mb^2)\,\omega_z + I\omega_z = 0, \qquad (19)$$

откуда

$$\omega_z = -\frac{mr^2}{mr^2 + 2mb^2 + I}\,\omega_1. \qquad (20)$$

Знак минус у ω_z означает, что рама вращается по ходу часовой стрелки, т.е. в обратную сторону по отношению к дискам, чего и следовало ожидать.

Если считать ω_2 абсолютной угловой скоростью, то

$$\omega_z = -\,\omega_2, \qquad (21)$$

и, следовательно,

$$\omega_2 = \frac{mr^2}{mr^2 + 2mb^2 + I}\,\omega_1. \qquad (22)$$

2. Если диски начинают вращаться в противоположные стороны, то, считая, что по ходу часовой стрелки вращается второй диск, для него вместо (7) получаем

$$\omega'_{2z} = -\,\omega_1. \qquad (23)$$

Вместо (10) для второго диска будем, следовательно, иметь

$$L^r_{2z} = -\frac{1}{2}mr^2\omega_1, \qquad (24)$$

а вместо (16), поскольку (14) не изменится,

$$L_{2z} = -\frac{1}{2}mr^2\omega_1 + \left(\frac{1}{2}mr^2 + mb^2\right)\omega_z. \qquad (25)$$

Формулы (15) и (17) сохранят свой вид. Тогда, подставляя (15), (17), (25) в (18), получим

$$-\frac{1}{2}mr^2\omega_1 + \left(\frac{1}{2}mr^2 + mb^2\right)\omega_z + \frac{1}{2}mr^2\omega_1 +$$
$$+\left(\frac{1}{2}mr^2 + mb^2\right)\omega_z + I\omega_z = 0,$$

или

$$(mr^2 + 2mb^2 + I)\,\omega_z = 0.$$

Отсюда $\omega_z = 0$ и $\omega_2 = 0$. Рама останется неподвижной.

Механически это совершенно очевидно, поскольку моменты количества движения (24) и (10) в этом случае компенсируют друг друга, и полный момент количества движения при неподвижной раме равен нулю.

Задача 9.54. На какую долю изменится продолжительность суток, если радиус земного шара сократится на $1/n$ своей длины вследствие охлаждения Земли ($1/n$ – очень малая величина).

Решение. Поскольку все силы в данном случае являются внутренними, можно применить теорему о сохранении момента количества движения относительно земной оси.

До сокращения

$$L_z = I_z\,\omega. \tag{1}$$

После сокращения

$$L_{z1} = I_{z1}\,\omega_1. \tag{2}$$

Здесь I_z, I_{z1} – моменты инерции Земли относительно ее оси соответственно до и после сокращения ее радиуса, а ω и ω_1 – соответствующие угловые скорости.

Имеем

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{3}$$

где T – продолжительность суток до сокращения радиуса, и аналогично

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \tag{4}$$

где T_1 – продолжительность суток после этого сокращения.

Разделив правые и левые части, из (3) и (4) получим

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{T_1}{T}. \tag{5}$$

В соответствии с законом сохранения момента количества движения из (1) и (2) имеем

$$I_z\,\omega = I_{z1}\,\omega_1, \tag{6}$$

откуда

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{I_{z1}}{I_z}. \tag{7}$$

Сравнивая (5) и (7), получаем

$$\frac{T_1}{T} = \frac{I_{z1}}{I_z}. \tag{8}$$

Для окончательного решения задачи нужно сделать предположение о распределении масс внутри Земли до и после сокращения. Если считать Землю однородным шаром, причем однородность сохранится и после сокращения, то

$$I_z = \frac{2}{5} mR^2, \tag{9}$$

$$I_{z1} = \frac{2}{5} mR_1^2, \tag{10}$$

где R и R_1 – радиусы Земли соответственно до и после сокращения (масса, естественно, не изменяется). Тогда из (9) и (10) следует

$$\frac{I_{z1}}{I_z} = \frac{R_1^2}{R^2}, \tag{11}$$

а из (8) и (11) имеем

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2. \tag{12}$$

По условию

$$R_1 = R\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{13}$$

Из (12) и (13) имеем

$$\frac{T_1}{T} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \ldots \tag{14}$$

Поскольку $1/n$ – малая величина, то третьим членом в правой части формулы (14) можно пренебречь. Тогда

$$\frac{T_1}{T} \approx 1 - \frac{2}{n}. \tag{15}$$

Следовательно, продолжительность суток сократится на $2/n$ часть своей величины, т.е. Земля начнет вращаться быстрее.

П р и м е ч а н и е. Если считать Землю неоднородной, например плотность изменяющейся вдоль радиуса (как это и имеет место на самом деле),

и при этом считать, что сокращение разных слоев также происходит по-разному, то условий задачи недостаточно для получения ответа. Например, если считать для упрощения, что Земля состоит из однородного ядра массой m_1 и радиусом r и однородной оболочки массой m_2 с внешним радиусом R и внутренним радиусом r, то для момента инерции ядра имеем

$$I_{z\text{я}} = \frac{2}{5} m_1 r^2, \tag{16}$$

а для момента инерции оболочки

$$I_{z\text{o}} = \frac{2}{5} m_2 \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}. \tag{17}$$

Следовательно, момент инерции всей Земли до сокращения равен

$$I_z = I_{z\text{я}} + I_{z\text{o}} = \frac{2}{5} m_1 r^2 + \frac{2}{5} m_2 \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}. \tag{18}$$

Аналогично после сокращения

$$I_{z1} = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 + \frac{2}{3} m_2 \frac{R_1^5 - r_1^5}{R_1^3 - r_1^3}, \tag{19}$$

где r_1, R_1 – соответственно радиус ядра и радиус Земли после сокращения. Очевидно, что отношение I_{z1}/I_z зависит (и довольно сложным образом) от соотношения всех величин, входящих в эти выражения. Если, однако,

$$R_1 = R\left(1 - \frac{1}{n}\right), \tag{20}$$

как в (13), и

$$r_1 = r\left(1 - \frac{1}{n}\right), \tag{21}$$

т.е. оба радиуса сокращаются в одинаковом отношении, то, подставляя (20) и (21) в (19), получаем

$$I_{z1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 I_z,$$

что и приведет к соотношениям (14) и (15). В общем же случае, например если сокращается только оболочка, это будет не так. Тем более формула (15) будет неверна в более сложных случаях, скажем если распределение плотности по радиусу изменяется более сложным образом и если оно зависит от угловых координат.

Следует, однако, отметить, что вывод, полученный из формул (20) и (21), имеет и более общий характер: если относительное сокращение радиусов всех точек Земли одинаково, то формула (15) сохраняет силу. Подтвердить это можно следующим рассуждением: момент инерции относительно оси выражается интегралом

$$I_z = \int_{(m)} r^2 dm,$$

где r — расстояние до оси z. Если все радиусы изменяются в одинаковом отношении, то $r_1 = kr$, где $k = \text{const}$. Тогда

$$I_{z1} = \int_{(m)} r_1^2 dm = k^2 \int_{(m)} r^2 dm = k^2 I_z,$$

откуда при $k = 1 - 1/n$ следует все дальнейшее.

Это несколько абстрактное рассуждение (неясно, по чему проводится интегрирование, а переход от dm к $\rho\, dV$ потребовал бы подробного анализа соответствия областей — при преобразовании подобия) может быть сделано гораздо более наглядным, если заменить интеграл суммами, как бы "разбив" Землю на частицы. Тогда

$$I_z = \Sigma r_i^2 \Delta m_i.$$

При равномерном сокращении (сжатии) каждый радиус изменяется в том же отношении, т.е. $r_{i1} = kr_i$. После сжатия

$$I_{z1} = \Sigma r_{i1}^2 \cdot \Delta m_i = \Sigma k^2 r_i^2 \cdot \Delta m_i = k^2 I_z.$$

Если $k = 1 - 1/n$, то (8) и (11) приводят к (16).

Задача 9.55. На боковой поверхности кругового конуса с радиусом основания r симметрично расположены два груза, соединенные между собой тонкой нитью и отстоящие от оси вращения конуса на расстояние одной трети радиуса основания конуса. Конус вместе с грузами вращается с угловой скоростью ω. После внезапного разрыва нити грузы начали опускаться по боковой поверхности конуса (рис.).

Определить угловую скорость конуса в момент, когда грузы достигнут основания конуса, продолжая вращаться вместе с конусом. Масса каждого из грузов в четыре раза меньше массы конуса. Грузы считать точечными массами. Силами сопротивления пренебрегаем. Ось конуса установлена в подпятнике A и цилиндрическом подшипнике B.

Решение. Возьмем начало координат в нижней опоре оси конуса A (рис.). Ось z направим по оси вращения конуса. К материальной системе приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести конуса, $\boldsymbol{P}_1 = m_1\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{P}_2 = m_2\boldsymbol{g}$ — силы тяжести грузов, R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By} — составляющие реакций опор A и B.

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек относительно оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e). \qquad (1)$$

Но внешние силы, действующие на конус и грузы, либо параллельны оси z ($m_1 g$ и $m_2 g$), либо пересекают ось z (mg, R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By}). Следовательно, сумма моментов всех внешних сил относительно оси z равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = 0. \qquad (2)$$

Согласно (1),

$$\frac{dL_z}{dt} = 0, \qquad (3)$$

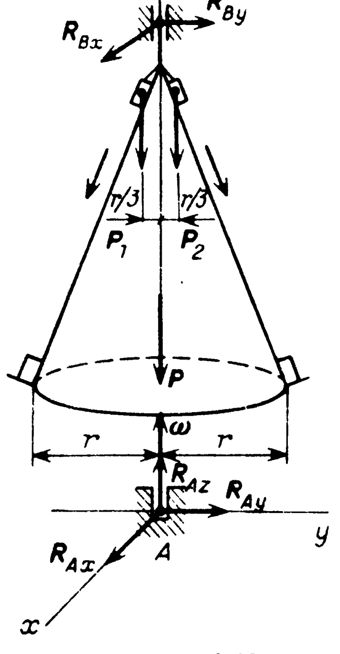
и, следовательно,

$$L_z = \text{const}. \qquad (4)$$

Таким образом, главные моменты количеств движения системы материальных точек относительно оси z в начале и в конце движения грузов равны:

$$L_{z1} = L_{z2}. \qquad (5)$$

Итак, имеет место случай сохранения проекции главного момента количеств движения системы материальных точек на ось z.



К задаче 9.55

Воспользовавшись формулой $L_z = I_z \omega_z$, запишем:

$$L_{1z} = I_{1z}\omega_{1z}, \quad L_{2z} = I_{2z}\omega_{2z}, \qquad (6)$$

где I_{1z} и I_{2z} — моменты инерции системы соответственно в первом и втором положении грузов. Учитывая (5) и (6), находим

$$I_{1z}\omega_{1z} = I_{2z}\omega_{2z}, \qquad (7)$$

откуда

$$\omega_{2z} = \frac{I_{1z}}{I_{2z}}\omega_{1z}. \qquad (8)$$

Вычислим I_{1z} и I_{2z}. Система материальных точек состоит из конуса и двух грузов. Следовательно, момент инерции системы равен сумме моментов инерции конуса и грузов. Момент инерции конуса относительно

оси вращения z равен $\frac{3}{10}mr^2$. Грузы считаем точечными массами. В соответствии с начальными и конечными положениями грузов находим

$$I_{1z} = \frac{3}{10}mr^2 + 2\frac{m}{4}\left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{16}{45}mr^2, \tag{9}$$

$$I_{2z} = \frac{3}{10}mr^2 + 2\frac{m}{4}r^2 = \frac{4}{5}mr^2. \tag{10}$$

Подставляя найденные значения моментов инерции (9) и (10) в формулу (8), получаем

$$\omega_{2z} = \frac{16}{45}\frac{5}{4}\omega_{1z} = \frac{4}{9}\omega_{1z}.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 37.50–37.54, 37.56, 37.57.

6. Теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении по отношению к центру масс. Разложим движение материальных точек системы на переносное поступательное вместе с осями декартовых координат, начало которых совмещено с центром масс системы, и относительное движение по отношению к центру масс. При этом теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении по отношению к центру масс имеет вид, тождественный аналогичной теореме (6*) в абсолютном движении:

$$\frac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m}_C(\boldsymbol{F}_k^e), \tag{12*}$$

т.е. производная по времени главного момента количеств движения материальной системы относительно центра масс системы в ее относительном движении в системе координат, движущихся поступательно вместе с центром масс, равна векторной сумме моментов внешних сил системы относительно центра масс.

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат, начало которых совмещено с центром масс системы и движущихся поступательно вместе с центром масс, имеет вид

$$\frac{dL_{Cx}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{Cx}(\boldsymbol{F}_k^e), \quad \frac{dL_{Cy}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{Cy}(\boldsymbol{F}_k^e),$$

$$\frac{dL_{Cz}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{Cz}(\boldsymbol{F}_k^e). \tag{13*}$$

С помощью этой теоремы можно решать как первую , так и вторую задачи динамики. Теорема широко применяется в задачах динамики плоскопараллельного движения твердого тела (см. § 6) и движения свободного твердого тела, т.е. в тех случаях, когда движение твердого тела можно разложить на переносное вместе с осями координат, движущимися поступательно с центром масс, и относительное движение по отношению к этим осям.

Указание. Задачи с помощью теоремы об изменении главного момента количеств движения системы в относительном движении по отношению к центру масс рекомендуется решать в следующем порядке:

1) направить одну из подвижных осей координат через центр масс системы;

2) записать теорему об изменении главного момента количеств движения системы в относительном движении относительно соответствующей подвижной оси;

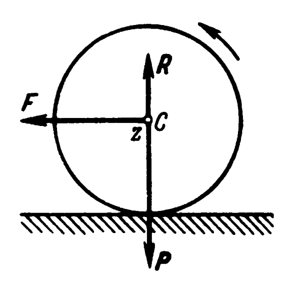
3) изобразить на рисунке все внешние силы системы;

4) вычислить главный момент внешних сил относительно соответствующей подвижной оси, проходящей через центр масс;

5) вычислить главный момент количеств движения системы относительно той же подвижной оси и затем взять его производную по времени;

6) подставить результаты пунктов 4) и 5) в 2) и затем, в зависимости от условия, решить первую либо вторую задачу динамики.

Задача 9.56. К центру масс C колеса радиусом r приложена горизонтальная сила F. В начальнй момент колесо находилось в покое.



К задаче 9.56

Показать, что при отсутствии силы трения между колесом и горизонтальным рельсом качение колеса по рельсу невозможно.

Ось z_C направлена через центр масс C колеса перпендикулярно плоскости рисунка на нас. Момент инерции колеса относительно этой оси равен I_{zC}.

Решение. Колесо совершает плоскопараллельное движение. Разложим его на переносное поступательное вместе с центром масс C и относительное вокруг подвижной оси z_C, проходящей через центр масс перпендикулярно неподвижной плоскости (т.е. плоскости рисунка).

Для описания вращательного движения колеса применим теорему об изменении главного момента количеств движения (13*) в относительном движении по отношению к оси z_C, проходящей через центр масс:

$$\frac{dL_{z_C}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{z_C}(F_k^e). \tag{1}$$

В соответствии с формулой (3*), $L_{z_C} = I_{z_C}\omega_z$. Поэтому

$$\frac{dL_{z_C}}{dt} = I_{z_C}\dot{\omega}_z = I_{z_C}\ddot{\varphi}. \tag{2}$$

К колесу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{F}$ — движущая сила, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция рельса.

Вычислив сумму моментов внешних сил относительно оси z_C, находим:

$$\sum m_{z_C}(F_k^e) = 0. \tag{3}$$

Подставив результаты (2) и (3) в уравнение (1) и решив его относительно $\ddot{\varphi}$, получим

$$\ddot{\varphi} = 0. \tag{4}$$

Первый интеграл дифференциального уравнения (4) будет

$$\dot{\varphi} = C_1. \tag{5}$$

В начальный момент колесо находилось в покое, т.е. при $t = 0$, $\dot{\varphi} = 0$. Подставив это начальное условие в уравнение (5), найдем $C_1 = 0$. Поэтому угловая скорость колеса равна нулю:

$$\dot{\varphi} = 0, \tag{6}$$

т.е. качение колеса отсутствует. Таким образом показано, что при отсутствии силы трения колесо, находившееся в начальный момент в покое, катиться не может и будет только скользить.

7. Случай сохранения главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении по отношению к центру масс системы. Если векторная сумма моментов внешних сил относительно центра масс равна нулю, то главный момент количеств движения материальной системы относительно центра масс в системе осей координат, движущихся поступательно вместе с центром масс, сохраняется неизменным, т.е. если $\sum_{k=1}^{n} m_c(F_k^e) = 0$, то $\boldsymbol{L}_c$ постоянно.

Примером случая сохранения главного момента количеств движения материальной системы относительно центра масс может служить Солнечная система, состоящая из Солнца, планет и их спутников. Эту систему можно считать изолированной, если пренебречь действием звезд, которое ввиду

их удаленности ничтожно мало. Силы взаимного притяжения между телами Солнечной системы являются внутренними силами. Следовательно, внешние силы в Солнечной системе отсутствуют.

Возьмем систему координат с началом в центре масс Солнечной системы, направив оси к трем "неподвижным" звездам. Главный момент количеств движения L_C Солнечной системы, вычисленный относительно ее центра масс, будет сохранять свою величину и направление по отношению к звездной системе координат неизменными. Направление вектора L_C определяет перпендикулярную ему плоскость. Эта плоскость называется *неизменяемой плоскостью планетной системы.* Ее существование установил Пьер Лаплас (1749–1827), французский математик и астроном, в своей монографии "Трактат о небесной механике".

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат, начало которых совмещено с центром масс системы и движущихся поступательно вместе с центром масс, имеет вид: если $\sum\limits_{k=1}^{n} m_{cx}(F_k^e) = 0$, то L_{cx} постоянно, и т.д.

Область применения теорем об изменении и о сохранении главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении по отношению к центру масс системы является общей (см. стр. 258). Общими являются и три первых пункта решения задач (см. стр. 259).

Если окажется (это необходимо доказать), что сумма моментов всех внешних сил относительно подвижной оси, проходящей через центр масс, равна нулю, то нужно вычислить и приравнять главные моменты количеств движения системы относительно данной оси в начальный и конечный моменты времени. Затем из составленного уравнения определить искомую величину.

Задача 9.57. Акробат, совершая сальто, отталкиваясь ногами от земли, сообщает себе в начальный момент угловую скорость $\omega_1 = 1$ об/с вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр масс. При этом момент инерции акробата относительно оси равен $I_1 = 1{,}5$ кг · м^2. Для того чтобы в полете увеличить угловую скорость, акробат поджимает ноги и руки к туловищу, тем самым уменьшая момент инерции до $I_2 = 0{,}5$ кг · м^2.

Определить угловую скорость вращения ω_2 акробата вокруг горизонтальной оси в полете. Силами сопротивления движению пренебречь.

Решение. Единственной внешней силой, действующей на акробата в полете, является его сила тяжести.

Движение акробата в процессе выполнения сальто является сложным. Разложив его на переносное поступательное движение вместе с центром масс и относительное вращательное вокруг горизонтальной оси x, проходящей через центр масс, можно воспользоваться теоремой об изменении главного момента количеств движения материальной системы в относитель-

ном движении по отношению к этой оси:

$$\frac{dL_{cx}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{cx}(F_k^e).$$

Так как горизонтальная ось x проходит через центр тяжести акробата, то момент силы тяжести относительно этой оси равен нулю. Следовательно, $dL_{cx}/dt = 0$ и L_{cx} постоянно, т.е. $L_{1cx} = L_{2cx}$. Итак, имеет место случай сохранения главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении.

Так как $L_{1cx} = I_1\omega_1$ и $L_{2cx} = I_2\omega_2$, то $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, откуда $\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1$. Подставив числовые значения, получим $\omega_2 = 3$ об/с.

8. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e),$$

где φ — угол поворота твердого тела, I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения, $m_z(F_k^e)$ — момент k-й внешней силы относительно оси z.

Из сопоставления этого дифференциального уравнения с теоремой о движении центра масс материальной системы

$$Ma_C = \sum_{k=1}^{n} F_k^e,$$

применяемой при решении задач о поступательном движении твердого тела, следует, что масса M твердого тела, движущегося поступательно, и момент инерции I_z твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, имеют аналогичный смысл: масса M — *мера инертности твердого тела, движущегося поступательно*; *момент инерции I_z — мера инертности твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.*

С помощью дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси можно решить как первую так и вторую задачи динамики.

В первой задаче по заданному моменту инерции твердого тела I_z относительно оси вращения и закону вращения твердого тела $\varphi = f(t)$ определяется главный момент относительно этой оси внешних сил, приложенных к твердому телу.

Во второй задаче по заданным моменту инерции твердого тела I_z относительно оси вращения и моментам внешних сил относительно этой

оси определяется уравнение вращения твердого тела $\varphi = f(t)$. При этом должны быть заданы начальные условия движения: положение и угловая скорость твердого тела в начальный момент времени, т.е.

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0.$$

Решение вторых задач часто представляет значительные трудности, так как при этом приходится интегрировать дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Моменты внешних сил относительно оси вращения могут зависеть не только от времени, но также от угла поворота φ, угловой скорости $\dot{\varphi}$ и углового ускорения $\ddot{\varphi}$ твердого тела, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = f(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, t),$$

или являются функцией какой-либо одной из переменных, стоящих в правой части этого уравнения.

Легко решаются задачи в случаях, когда моменты внешних сил постоянны.

Указание. Задачи динамики о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси надо решать в такой последовательности:

1) направить одну из декартовых осей координат (ось z) по оси вращения твердого тела;

2) изобразить на рисунке все внешние силы, приложенные к твердому телу;

3) вычислить сумму моментов всех внешних сил относительно оси вращения

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e);$$

4) записав дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e),$$

подставить в него выражение суммы моментов всех внешних сил, значение момента инерции I_z твердого тела относительно оси вращения и решать, в зависимости от условия, первую либо вторую задачи.

Задача 9.58. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси под действием приложенной к нему системы сил.

Чему должен быть равен главный момент внешних сил относительно оси вращения для того, чтобы твердое тело вращалось: а) равномерно, б) равнопеременно?

Решение. Направив ось z по оси вращения твердого тела, запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e);$$

а) в случае равномерного вращения угловая скорость $\dot{\varphi}$ твердого тела постоянна, следовательно, $\ddot{\varphi} = 0$ и

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = 0,$$

т.е. главный момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю.

б) в случае равнопеременного вращения угловое ускорение твердого тела $\ddot{\varphi}$ постоянно, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = \text{const},$$

т.е. главный момент внешних сил относительно оси вращения постоянен.

Задача 9.59. Определить вращающий момент m_z, под действием которого диск массой 20 кг и радиусом 10 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 4t^2$. Центр масс диска лежит на оси вращения.

Решение. Направляем ось z по оси вращения диска.

Дифференциальное уравнение вращения диска вокруг неподвижной оси z имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e).$$

К диску и его оси приложены внешние силы и моменты: сила тяжести диска, реакции опор и искомый момент.

Так как моменты опорных реакций и силы тяжести диска относительно его оси вращения z равны нулю, то сумма моментов всех внешних сил равна искомому вращающему моменту относительно оси вращения z. Следовательно,

$$m_z = I_z \ddot{\varphi}.$$

Момент инерции диска относительно оси вращения равен

$$I_z = \frac{mr^2}{2} = \frac{20 \cdot 0{,}1^2}{2} = 0{,}1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad \text{а} \quad \ddot{\varphi} = 8 \text{ рад/с}^2,$$

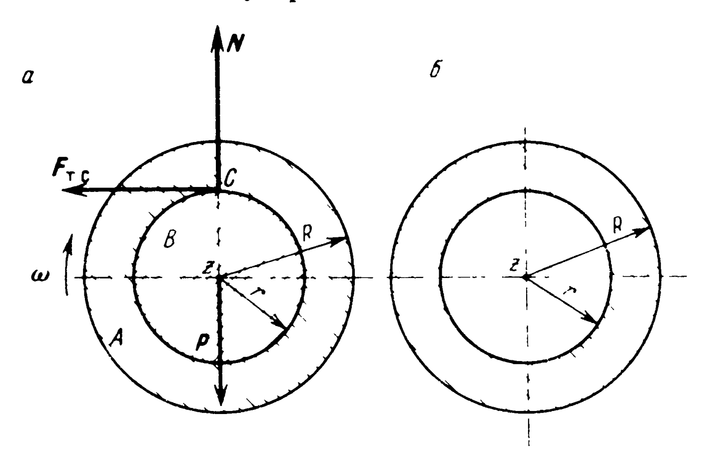
тогда искомый вращающий момент

$$m_z = 0{,}8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = 0{,}8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Задача 9.60. Кольцу A радиусом R, насаженному на неподвижный горизонтальный вал B радиусом r, в начальный момент была сообщена угловая скорость ω_0 (рис. *а*)

Сколько оборотов сделает кольцо до остановки, если коэффициент трения скольжения кольца о вал равен f?

Решение. Допустим, что кольцо A при вращении соприкасается с осью B в точке C. К кольцу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила



К задаче 9.60

тяжести кольца, N — нормальная реакция вала, $F_{т.с}$ — сила трения скольжения кольца о вал: $F_{т.с} = fN = fP$, направленная перпендикулярно нормальной реакции N в сторону, противоположную движению, т.е. по горизонтали налево.

Выберем направление отсчета угла поворота φ в сторону вращения кольца, т.е. по ходу часовой стрелки (ось z направлена от нас за плоскость рисунка).

Запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e). \tag{1}$$

Для определения числа оборотов, которое сделало кольцо до остановки, требуется проинтегрировать это уравнение, предварительно определив I_z — момент инерции кольца относительно оси вращения z и $\sum\limits_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e)$ — главный момент внешних сил относительно оси z. Так как моменты сил

P и N относительно оси z равны нулю, то

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = m_z(F_{\text{т.с}}) = -F_{\text{т.с}} r = -fPr = -fMgr. \qquad (2)$$

Момент силы трения скольжения $F_{\text{т.с}}$ отрицателен, так как его направление противоположно направлению положительного отсчета угла поворота φ.

Момент инерции кольца вычислим как разность моментов инерции большого диска радиусом R и малого диска радиусом r (рис. *б*):

$$I_z = \frac{M_R R^2}{2} - \frac{M_r r^2}{2},$$

где M_R – масса диска радиусом R, а M_r – масса диска радиусом r.

Обозначив γ плотность кольца, получим $M_R = \gamma\pi R^2$ и $M_r = \gamma\pi r^2$. Тогда

$$I_z = \frac{\gamma\pi R^4}{2} - \frac{\gamma\pi r^4}{2} = \frac{\gamma\pi}{2}(R^4 - r^4).$$

Учитывая, что масса кольца $M = \gamma\pi(R^2 - r^2)$, имеем

$$I_z = \frac{M}{2}(R^2 + r^2). \qquad (3)$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e)$ и I_z из формул (2) и (3) в уравнение (1), находим

$$\frac{M}{2}(R^2 + r^2)\ddot{\varphi} = -fMgr,$$

откуда

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2fgr}{R^2 + r^2}. \qquad (4)$$

Начальные условия движения имеют вид

при $t = 0$ $\quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega_0$.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (4), получим

$$\dot{\varphi} = -\frac{2fgr}{R^2 + r^2} t + C_1;$$

подставив $t = 0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$, найдем, что $C_1 = \omega_0$; следовательно,

$$\dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{2fgr}{R^2 + r^2} t. \qquad (5)$$

Решив дифференциальное уравнение (5), имеем

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{fgr}{R^2 + r^2} t^2 + C_2.$$

Подставляя $t = 0, \varphi = 0$, имеем $C_2 = 0$; итак,

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{fgr}{R^2 + r^2} t^2. \quad (6)$$

Для того чтобы определить угол поворота φ, на который повернулось кольцо до остановки, следует предварительно вычислить соответствующий момент времени. В момент остановки $t = \tau$ угловая скорость кольца $\dot\varphi = 0$. Подставив эти значения в уравнение (5), получаем $\tau = \dfrac{\omega_0(R^2 + r^2)}{2fgr}$. Для определения φ_τ – угла поворота кольца в момент остановки – остается подставить полученное значение τ в уравнение (6). Находим

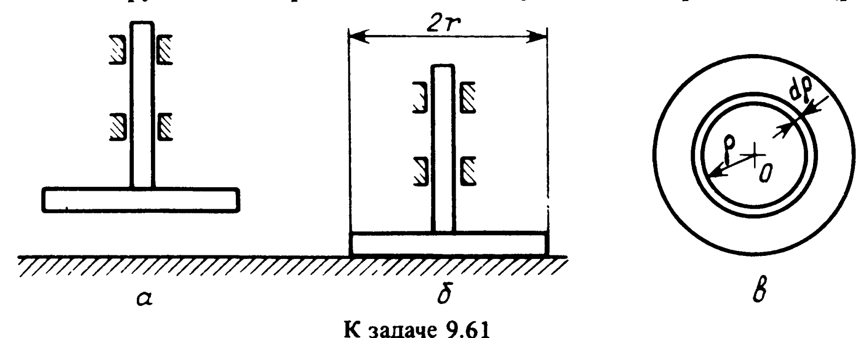
$$\varphi_\tau = \frac{\omega_0^2(R^2 + r^2)}{4fgr}.$$

Число оборотов, которое сделало кольцо до остановки, равно

$$n_\tau = \frac{\varphi_\tau}{2\pi} = \frac{\omega_0^2(R^2 + r^2)}{8\pi fgr}.$$

Эту задачу можно решить также и с помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы.

Задача 9.61. Сплошной однородный цилиндр массой m и радиусом r вращается вокруг своей вертикальной оси с угловой скоростью ω_0 (рис. *а*).



К задаче 9.61

Цилиндр опускают до соприкосновения его нижней поверхности с неподвижной негладкой горизонтальной плоскостью (рис. *б*). Коэффициент трения скольжения цилиндра о неподвижную плоскость равен f.

Считая, что при соприкосновении суммарное нормальное давление равно силе тяжести цилиндра, определить число оборотов, которое цилиндр сделает до остановки.

Решение. Применим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I_z\ddot{\varphi} = M_z^e, \tag{1}$$

где I_z – момент инерции сплошного цилиндра относительно оси вращения z, равный

$$I_z = \frac{mr^2}{2}, \tag{2}$$

φ – угол поворота, M_z^e – главный момент всех внешних сил относительно оси z.

Для нахождения главного момента внешних сил относительно оси вращения воспользуемся рис. *в*.

Давление p, приходящееся на единицу горизонтальной площади, равно отношению силы тяжести цилиндра к площади соприкосновения:

$$p = \frac{mg}{\pi r^2}.$$

Выделим кольцо, площадь которого равна (рис. *в*)

$$ds = 2\pi\rho\ d\rho.$$

Тогда сила трения, приложенная к этому кольцу, равна

$$\Delta F = fp\ ds = f\frac{mg}{\pi r^2}\cdot 2\pi\rho\ d\rho$$

и направлена по касательной к кольцу.

Элементарный момент этой силы трения относительно оси вращения равен

$$-\Delta F\cdot\rho = -f\frac{mg}{\pi r^2}2\pi\rho^2\ d\rho = -\frac{2fmg}{r^2}\pi\rho^2\,d\rho.$$

Главный момент внешних сил относительно оси вращения равен

$$M_z^e = -2f\frac{mg}{r^2}\int_0^r\rho^2 d\rho = -\frac{2}{3}f\frac{mg}{r^2}r^3 = -\frac{2}{3}fmgr.$$

Внося найденные значения в уравнение (1), находим

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3}fmgr.$$

Отсюда

$$\ddot{\varphi} = -\frac{4}{3} f \frac{g}{r}.$$

Умножая обе части уравнения на $d\varphi$, находим

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi = -\frac{4}{3} f \frac{g}{r} d\varphi,$$

или

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{4}{3} f \frac{g}{r} d\varphi.$$

Интегрируя обе части этого уравнения:

$$\int_{\omega_0}^{0} \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{4}{3} f \frac{g}{r} \int_{0}^{\varphi_1} d\varphi$$

(где φ_1 – угол поворота цилиндра до остановки в радианах), находим

$$-\frac{\omega_0^2}{2} = -\frac{4}{3} f \frac{g}{r} \varphi_1.$$

Отсюда

$$\varphi_1 = \frac{3}{8} \frac{\omega_0^2 r}{fg}.$$

Число оборотов, которое сделает цилиндр до остановки, равно

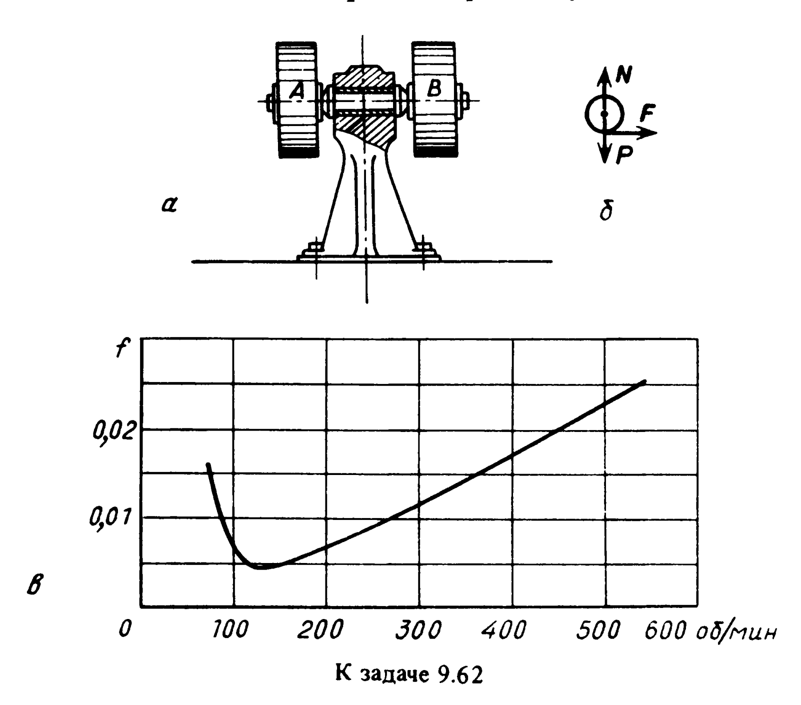
$$x = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{3}{16} \frac{\omega^2 r}{\pi f g}.$$

Задача 9.62. Для экспериментального определения коэффициента трения в подшипнике короткому валу с насаженными на его концах тяжелыми шкивами A и B, установленному в подшипнике (рис. *а*), сообщают большую угловую скорость ω_0. Вследствии трения в подшипнике вал постепенно замедляется до полной остановки. Промежуток времени от начала вращения с угловой скоростью ω_0 до остановки равен T. Радиус инерции вращающегося вала со шкивами относительно оси вращения ρ. Сила тяжести вращающихся тел равна P, радиус вала r. Найти коэффициент трения в подшипнике.

Решение. 1. Применим к решению задачи дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e). \tag{1}$$

Здесь $I_z = \frac{P}{g}\rho^2$. Внешними силами, приложенными к валу, являются: вес $\boldsymbol{P}$, нормальная реакция подшипника $\boldsymbol{N}$ и сила трения $\boldsymbol{F}$ (рис. *б*). Моменты сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{N}$ относительно оси вращения равны нулю, так как линия дейст-



К задаче 9.62

вия сил пересекает ось вращения. Момент силы трения $\boldsymbol{F}$ равен Fr. Уравнение (1) принимает вид

$$\frac{P}{g}\rho^2\ddot{\varphi} = -Fr. \tag{2}$$

Подставив выражение для силы трения $F = fP$, получим из (2)

$$\frac{P}{g}\rho^2\ddot{\varphi} = -fPr, \tag{3}$$

или

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{fgr}{\rho^2}. \tag{4}$$

Интегрирование этого дифференциального уравнения, если считать коэффи-

циент трения f постоянным, не представляет затруднений:

$$d\omega = -\frac{fgr}{\rho^2}\,dt, \tag{5}$$

$$\omega = -\frac{fgr}{\rho^2}\,t + C. \tag{6}$$

Произвольная постоянная интегрирования C определяется по начальным данным: при $t = 0$ $\omega = \omega_0$. Подставляя в уравнение (6) начальные условия, находим $C = \omega_0$, и, следовательно,

$$\omega = \omega_0 - \frac{fgr}{\rho^2}\,t. \tag{7}$$

Пусть вал остановился через T секунд. Тогда, внося в уравнение (7) $\omega = 0$ и $t = T$, находим значение коэффициента трения в подшипнике

$$f = \frac{\omega_0 \rho^2}{grT}. \tag{8}$$

2. Интегрирование дифференциального уравнения (4) было проведено при постоянном значении коэффициентра трения f. Рассмотрим, как определить значение коэффициента трения f экспериментально, не прибегая к утверждению о постоянстве коэффициента трения.

Уравнение (4) запишем так:

$$f = -\frac{\epsilon \rho^2}{gr}. \tag{9}$$

Из этой формулы следует, что определение коэффициента трения f сводится к вычислению углового ускорения ϵ. Вычисление ϵ можно произвести следующим образом. Разобьем промежуток времени T, в течение которого угловая скорость вала снизилась от ω_0 до нуля, на k равных отрезков

$$\Delta t = \frac{T}{k}. \tag{10}$$

Найдем наблюдением над вращающимся валом, какое число оборотов сделал вал за каждый из равных промежутков времени:

$$\begin{array}{ll} (\Delta t)_1 & \varphi_1 \\ (\Delta t)_2 & \varphi_2 \\ \dots\dots & \dots \\ (\Delta t)_k & \varphi_k \end{array} \tag{11}$$

Тогда средняя угловая скорость в течение каждого из равных промежутков времени будет

$$\frac{\varphi_1}{\Delta t} = \omega_1, \quad \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta t} = \omega_2, \quad \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\Delta t} = \omega_3, \ldots, \quad \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\Delta t} = \omega_k. \quad (12)$$

Теперь можно определить среднее угловое ускорение ϵ внутри каждого из равных промежутков времени:

$$\epsilon_1 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t}, \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}, \ldots, \epsilon_k = \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\Delta t}.$$

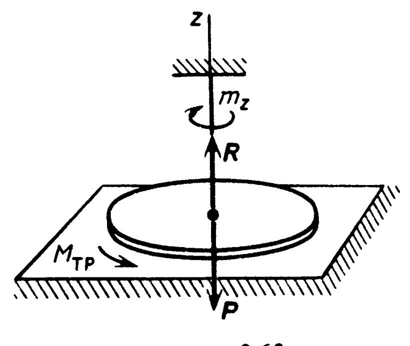
Зная угловое ускорение, соответствующее середине каждого промежутка времени, находим при помощи формулы (9) значение коэффициента трения в эти моменты времени.

Опыты и расчеты, проведенные по этой схеме, показали, что коэффициент трения с увеличением частоты вращения вначале уменьшается, достигает минимума и при дальнейшем увеличении частоты вращения монотонно возрастает (рис. *в*).

Задача 9.63. Диск, подвешенный на упругой проволоке, совершает крутильные колебания. Нижнее шероховатое основание диска соприкасается с неподвижной горизонтальной плоскостью (рис.). При этом возникает сила трения. Наибольшее значение момента силы трения относительно оси вращения равно $M_{тр} = 10$ Н · см. Упругий момент проволоки пропорционален углу закручивания φ:

$$m_z = -c\varphi, \quad (1)$$

где c – коэффициент упругости проволоки, равный упругому моменту, необходимому для закручивания проволоки на 1 рад; $c = 50$ Н · см. В начальный момент диск повернут на угол 1 рад и отпущен без начальной скорости.



К задаче 9.63

Определить число и значение угловых амплитуд колебаний диска до остановки, если его момент инерции относительно оси, совпадающей с осью проволоки, равен $I_z = 0{,}5$ кг · см^2.

Р е ш е н и е. Ввиду действия момента силы трения крутильные колебания диска будут затухать. Движение прекратится в том крайнем положении диска, в котором момент силы трения окажется бо́льшим или равным упругому моменту проволоки, так как в крайнем положении угловая скорость диска равна нулю.

Решение задачи осложняется тем, что при переменах направления вращения диска изменяется направление момента силы трения, который, будучи по модулю величиной постоянной, должен в дифференциальном уравнении колебаний диска менять знак. Поэтому необходимо составлять дифференциальные уравнения колебаний диска при движении в каждом из направлений (по ходу часовой стрелки и против него) в отдельности. При этом значения угла поворота и угловой скорости диска в моменты, когда данное дифференциальное уравнение утрачивает силу, становятся начальными условиями для последующего дифференциального уравнения.

Начало отсчета угла поворота φ диска выбираем в положении, в котором упругий момент проволоки равен нулю. Будем считать положительным отсчет угла поворота φ диска в направлении против хода часовой стрелки (полагаем, что наблюдатель смотрит с конца оси z вниз на диск).

К диску приложены: $\boldsymbol{P}$ – сила тяжести диска, $\boldsymbol{R}$ – сила реакции проволоки, m_z – упругий восстанавливающий момент проволоки и момент сил трения нижнего основания диска о неподвижную горизонтальную плоскость. Наибольшее значение модуля этого момента равно $M_{\text{тр}}$.

Для решения задачи воспользуемся дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z (\boldsymbol{F}_k^e). \tag{2}$$

В начальный момент диск был повернут на угол $\varphi_0 = 1$ рад против хода часовой стрелки и отпущен без начальной скорости. При этом момент трения относительно оси z, действующий против хода часовой стрелки, входит в дифференциальное уравнение со знаком плюс. Следовательно,

$$I_z \ddot{\varphi} = m_z + M_{\text{тр}} = -c\varphi + M_{\text{тр}}. \tag{3}$$

Внося в это уравнение значения величин, находим

$$0{,}5\ddot{\varphi} = -50\varphi + 10, \tag{4}$$

или

$$\ddot{\varphi} + 100\varphi = 20. \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение (5) описывает движение диска по ходу часовой стрелки при начальных условиях движения: при $t = 0$ $\varphi_0 = 1$ рад, $\dot{\varphi}_0 = 0$. Общее решение этого дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения полного уравнения (5). Следовательно,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{6}$$

Для определения φ_1 общего решения однородного уравнения

$$\ddot{\varphi}_1 + 100\varphi_1 = 0 \tag{7}$$

составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 100 = 0, \tag{8}$$

корни которого равны $\lambda_{1,2} = \pm 10i$. Следовательно, решение однородного уравнения (7) имеет вид

$$\varphi_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{9}$$

Ищем частное решение φ_2 в виде постоянного: $\varphi_2 = A$. Подставляя это значение φ_2 в уравнение (5), находим

$$100A = 20, \quad \text{или} \quad A = 0{,}2. \tag{10}$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (5) имеет вид

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + 0{,}2. \tag{11}$$

Вычисляем производную от φ по времени t:

$$\dot\varphi = -10C_1 \sin 10t + 10C_2 \cos 10t. \tag{12}$$

Подставляя в уравнения (11) и (12) начальные условия: при $t = 0$ $\varphi = 1$ рад, $\dot\varphi = 0$, находим значение произвольные постоянных:

$$C_1 = 0{,}8, \qquad C_2 = 0. \tag{13}$$

Внося эти значения C_1 и C_2 в уравнение (11), находим

$$\varphi = 0{,}8 \cos 10t + 0{,}2. \tag{14}$$

Это – уравнение вращения диска по ходу часовой стрелки на первом этапе движения. Угловая скорость диска равна производной по времени от угла поворота:

$$\dot\varphi = -8 \sin 10t. \tag{15}$$

Перемена направления движения произойдет в момент времени, соответствующий $\dot\varphi = 0$. Полагая

$$-8 \sin 10t = 0, \tag{16}$$

находим, что $t_1 = 0$ и $t_2 = \dfrac{\pi}{10}$ с. Значение t_1 соответствует началу движения диска из состояния покоя, а значение t_2 – первой перемене направления движения.

Подставляя в уравнение (14) значение $t_2 = \dfrac{\pi}{10}$ с, получим угловую амплитуду диска

$$\varphi_1 = 0{,}6 \text{ рад}. \tag{17}$$

В этом крайнем положении диска упругий момент равен

$$|m_z| = 50 \cdot 0{,}6 = 30 \text{ Н} \cdot \text{см}. \qquad (18)$$

Так как максимальный момент трения равен $M_{тр} = 10$ Н · см $< m_z$, то начинается движение диска против хода часовой стрелки. При этом упругий момент направлен против хода часовой стрелки, а момент трения – по ходу часовой стрелки. Дифференциальное уравнение вращения диска принимает вид

$$0{,}5\ddot{\varphi} = -50\varphi - 10. \qquad (19)$$

Отсюда находим дифференциальное уравнение диска против хода часовой стрелки

$$\ddot{\varphi} + 100\varphi = -20, \qquad (20)$$

при начальных условиях: при $t = 0$ $\varphi = 0{,}6$ рад, $\dot{\varphi} = 0$, причем отсчет времени начинаем опять сначала.

Решив дифференциальное уравнение (20) аналогично уравнению (5), получим

$$\varphi = -0{,}4\cos 10t - 0{,}2. \qquad (21)$$

Это – уравнение вращения диска против хода часовой стрелки. Угловая скорость диска равна

$$\dot{\varphi} = 4\sin 10t.$$

Перемена направления движения диска произойдет в момент времени, соответствующий $\dot{\varphi} = 0$. При этом $4\sin 10t = 0$, откуда находим, что $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi/10$ с. Значение $t_1 = 0$ соответствует началу движения диска против хода часовой стрелки, а значение $t_2 = \pi/10$ – перемене направления движения.

Подставив в (21) время $t_2 = \pi/10$, получим угловую амплитуду

$$\varphi_2 = 0{,}2 \text{ рад}.$$

В этом крайнем положении диска модуль упругого момента равен

$$|m_z| = 50 \cdot 0{,}2 = 10 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Так как $M_{тр} = 10$ Н · см, т.е. $|m_z| = |M_{тр}|$, то в этом крайнем положении диска его движение прекратится.

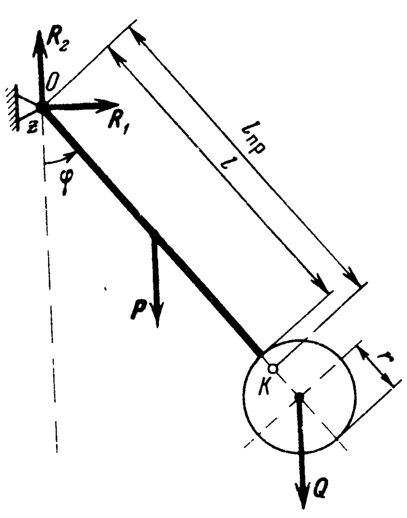
Итак, диск, будучи в начальный момент повернут на 1 рад против хода часовой стрелки и отпущен без начальной скорости, движется по ходу часовой стрелки вплоть до поворота в отрицательном направлении отсчета на 0,6 рад (следовательно, размах колебаний по часовой стрелке равен 1,6 рад); затем диск меняет направление вращения и движется против хода часовой стрелки вплоть до поворота в положительном направлении отсчета

на 0,2 рад (следовательно, размах колебаний против хода часовой стрелки равен 0,8 рад).

В этом положении диска его движение прекратится.

Задача 9.64. Физический маятник состоит из однородного стержня длиной l, к концу которого прикреплен круглый однородный диск радиуса $r = l/8$.

Определить закон колебаний маятника и положение его центра качаний, если он подвешен за свободный конец стержня. В начальный момент маятник был отклонен от вертикального положения на угол φ_0 и ему была сообщена начальная угловая скорость $\dot\varphi_0$. Масса диска в два раза больше массы стержня.



К задаче 9.64

Решение. ***Физическим маятником*** называется твердое тело, подвешенное к неподвижной горизонтальной оси.

Изобразим физический маятник в отклоненном от вертикали положении. Выберем направление положительного отсчета угла поворота φ от вертикали против хода часовой стрелки, направим ось z вдоль оси привеса маятника в точке O перпендикулярно плоскости рисунка на нас.

Внешними силами, приложенными к маятнику, являются: $P = M_1 g$ — сила тяжести стержня, $Q = M_2 g$ — сила тяжести диска, R_1 и R_2 — составляющие реакции оси подвеса маятника.

Применяем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot\varphi = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e). \tag{1}$$

Моменты сил R_1 и R_2 относительно оси привеса z равны нулю, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = m_z(P) + m_z(Q) = -M_1 g \frac{l}{2} \sin\varphi - M_2 g (l + r)\sin\varphi$$

(знаки минус указывают, что направления моментов сил P и Q противоположны направлению положительного отсчета угла поворота φ). Учитывая, что $M_2 = 2M_1$ и $r = l/8$, получим, что сумма моментов внешних сил относительно оси z будет

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = -\frac{11}{4} M_1 g l \sin\varphi. \tag{2}$$

Вычисляем момент инерции маятника относительно оси привеса z как сумму моментов инерции стержня $I_z^{(1)}$ и диска $I_z^{(2)}$ относительно той же оси: $I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)}$.

Применив теорему Штейнера и учитывая, что $M_2 = 2M_1$ и $r = l/8$, находим

$$I_z^{(1)} = M_1 \frac{l^2}{12} + M_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 = M_1 \frac{l^2}{3},$$

$$I_z^{(2)} = M_2 \frac{r^2}{2} + M_2(l+r)^2 = \frac{163}{64} M_1 l^2;$$

следовательно, момент инерции маятника относительно оси привеса z равен

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = \frac{553}{192} M_1 l^2. \qquad (3)$$

Подставив $\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e)$ и I_z из формул (2) и (3) в уравнение (1), получим

$$\frac{553}{192} M_1 l^2 \ddot{\varphi} = -\frac{11}{4} M_1 g l \sin\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{528}{553} \frac{g}{l} \sin\varphi = 0.$$

Рассмотрим малые колебания маятника, предположив, что $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда дифференциальное уравнение качаний маятника принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{528}{553} \frac{g}{l} \varphi = 0. \qquad (4)$$

Обозначив

$$\frac{528}{553} \frac{g}{l} = k^2, \qquad (5)$$

перепишем полученное уравнение так:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + k^2 = 0$. Его корни: $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно,

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \qquad (6)$$

и

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (7)$$

Запишем начальные условия движения маятника: при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Подставив $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$ в (6) и $t = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ в (7), имеем $C_1 = \varphi_0$, $C_2 = \dot{\varphi}_0/k$. Внеся эти значения в уравнения (6), находим

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt.$$

Введем обозначения:

$$\varphi_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{\dot{\varphi}_0}{k} = a \cos \alpha; \qquad (8)$$

тогда

$$\varphi = a \sin (kt + \alpha),$$

т.е. физический маятник совершает гармонические колебания.

Угловая амплитуда колебаний a и начальная фаза α, определенные из системы уравнений (8), равны

$$a = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{k^2}}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{k\varphi_0}{\dot{\varphi}_0}.$$

Они зависят от начальных условий движения и круговой частоты колебаний.

Круговая частота колебаний $k = \sqrt{\frac{528}{553}\frac{g}{l}}$ (см. формулу (5)) от начальных условий движения не зависит, т.е. в случае малых колебаний ($\sin \varphi \approx \varphi$) физический маятник обладает свойством изохронности. При рассмотрении задачи 9.46 о колебаниях математического маятника была получена формула для круговой частоты колебаний маятника с конечной угловой амплитудой. В этом случае маятник свойством изохронности не обладает и его период зависит от угловой амплитуды колебаний.

Для определения положения центра качаний данного физического маятника следует учесть, что центр качаний отстоит от точки привеса O на расстоянии приведенной длины физического маятника (напомним, что приведенной длиной физического маятника называется длина нити математического маятника, круговая частота качаний которого равна круговой частоте качаний данного физического маятника).

В ходе решения задачи о колебаниях математического маятника (см. задачу 9.46) была определена его круговая частота колебаний $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Для рассматриваемого физического маятника $k = \sqrt{\frac{528}{553}\frac{g}{l}}$.

Приравняв квадраты круговых частот, находим приведенную длину физического маятника $l_{\text{пр}} = \dfrac{553}{528} l$.

Следовательно, центр качаний K данного физического маятника отстоит от точки подвеса O на расстояние $\dfrac{553}{528} l$ (рис.).

Голландский ученый механик, физик и математик Христиан Гюйгенс (1629–1695) впервые решил задачу об определении центра качаний физического маятника. Согласно этой задаче, между центром качаний и точкой подвеса существует зависимость: если физический маятник перевернуть и сделать центр качаний точкой подвеса, то прежняя точка подвеса сделается центром качаний и маятник будет качаться так же, как и ранее.

Задача 9.65. На каком расстоянии от центра масс должен быть подвешен физический маятник, чтобы период его малых колебаний был наименьшим? (Föppl).

Решение. Обозначим главные центральные моменты инерции физического маятника через I_{x_C}, I_{y_C}, I_{z_C}, и пусть один из них, например I_{z_C}, является наименьшим. Расстояние от центра масс до точки подвеса маятника обозначим h.

Период колебаний равен $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$, где l – приведенная длина физического маятника.

Найдем ее, используя уравнение движения маятника

$$(I_{z_C} + Mh^2)\ddot{\varphi} = -Mgh \sin\varphi.$$

Полагая $I_{z_C} = M\rho^2$, где ρ – радиус инерции твердого тела относительно главной центральной оси z_C, а колебания малыми, перепишем это уравнение в виде

$$M(\rho^2 + h^2)\ddot{\varphi} + Mgh\,\varphi = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{gh}{\rho^2 + h^2}\varphi = 0.$$

Таким образом, приведенная длина физического маятника равна

$$l = \frac{\rho^2 + h^2}{h} = \frac{\rho^2}{h} + h.$$

Находим условия максимума или минимума, приравнивая производную нулю:

$$\frac{dl}{dh} = -\frac{\rho^2}{h^2} + 1 = 0.$$

Отсюда $h = \rho$. Далее вычисляем вторую производную

$$\frac{d^2 l}{dh^2} = \frac{2\rho^2}{h^3} > 0.$$

Следовательно, найденное значение h соответствует минимуму.

Задача 9.66. Два физических маятника качаются вокруг одной и той же горизонтальной оси независимо друг от друга. Массы маятников соответственно равны M_1 и M_2, расстояния от их центров масс до общей горизонтальной оси суть h_1 и h_2, а приведенные длины равны l_1 и l_2. Затем маятники соединили не имеющей массы связью, после чего они стали колебаться как одно твердое тело. Определить приведенную длину физического маятника (Lamb).

Решение. Для малых колебаний каждого физического маятника можно записать дифференциальные уравнения:

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + M_1 g h_1 \varphi_1 = 0, \qquad I_2 \ddot{\varphi}_2 + M_2 g h_2 \varphi_2 = 0.$$

Отсюда находится приведенная длина каждого из маятников:

$$l_1 = \frac{I_1}{M_1 h_1}, \qquad l_2 = \frac{I_2}{M_2 h_2}.$$

Общий момент инерции после соединения маятников равен

$$I = I_1 + I_2 = M_1 h_1 l_1 + M_2 h_2 l_2.$$

Далее находим расстояние от центра масс соединенных маятников до оси подвеса

$$h = \frac{M_1 h_1 + M_2 h_2}{M_1 + M_2}.$$

Дифференциальное уравнение малых колебаний соединенных маятников будет иметь вид

$$I\ddot{\varphi} + (M_1 + M_2) g h \varphi = 0,$$

откуда приведенная длина соединенных маятников равна

$$l = \frac{I}{(M_1 + M_2) h} = \frac{(M_1 h_1 l_1 + M_2 h_2 l_2)(M_1 + M_2)}{(M_1 + M_2)(M_1 h_1 + M_2 h_2)} = \frac{M_1 h_1 l_1 + M_2 h_2 l_2}{M_1 h_1 + M_2 h_2}.$$

Задача 9.67. Твердое тело, подвешенное на упругой проволоке, ось которой проходит через центр масс твердого тела, совершает крутильные колебания под действием внешнего момента $m = f(t)$, где $f(t)$ – однозначная периодическая функция периода τ. При кручении твердого тела возникает восстанавливающий момент: $m_z = -c\varphi$, где c – коэффициент упругости проволоки при кручении, φ – угол закручивания. Момент инер-

ции твердого тела относительно оси z, направленной вдоль проволоки, равен I_z.

Пренебрегая силой сопротивления движению, определить закон вынужденных крутильных колебаний твердого тела.

Решение. Разложим $m = f(t)$ в ряд Фурье, проверив предварительно выполнение условий Дирихле

$$f(t) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (b_j \cos i\omega t + d_j \sin i\omega t), \tag{1}$$

где $\omega = 2\pi/\tau$, а τ -- период вынужденных колебаний.

Коэффициенты ряда Фурье вычисляются, как известно, по формулам

$$b_j = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos i\omega t \; dt, \tag{2}$$

$$d_j = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin i\omega t \; dt, \tag{3}$$

где $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, i = 1, 2, 3, \ldots$

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг оси z имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z (F_k^e). \tag{4}$$

Сила тяжести твердого тела и сила реакции проволоки совпадают по направлению с проволокой. Следовательно, их моменты относительно оси z равны нулю, и правая часть уравнения (4) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = m_z + m = -c\varphi + f(t). \tag{5}$$

Воспользовавшись формулой (1), запишем (5) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} m_z (F_k^e) = -c\varphi + \frac{1}{2} b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (b_j \cos i\omega t + d_j \sin i\omega t). \tag{6}$$

Следовательно, дифференциальное уравнение крутильных колебаний твердого тела имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = -c\varphi + \frac{1}{2} b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (b_j \cos i\omega t + d_j \sin i\omega t), \tag{7}$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = \frac{b_0}{2I_z} + \frac{1}{I_z} \sum_{j=1}^{\infty} (b_j \cos i\omega t + d_j \sin i\omega t), \tag{8}$$

где $k^2 = c/I_z$. Для определения закона вынужденных крутильных колебаний требуется найти только частное решение дифференциального уравнения (8). Это частное решение ищем в виде

$$\varphi = B_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (B_j \cos i\omega t + D_j \sin i\omega t). \tag{9}$$

Для вычисления коэффициентов B_0, B_j и D_j ($j = 1, 2, 3, \ldots$) подставим значение φ из формулы (9) в уравнение (8):

$$-i^2\omega^2 \sum_{j=1}^{\infty} (B_j \cos i\omega t + D_j \sin i\omega t) + k^2 B_0 +$$

$$+ k^2 \sum_{j=1}^{\infty} (B_j \cos i\omega t + D_j \sin i\omega t) =$$

$$= \frac{b_0}{2I_z} + \frac{1}{I_z} \sum_{j=1}^{\infty} (b_j \cos i\omega t + d_j \sin i\omega t). \tag{10}$$

Приравняв постоянные слагаемые, а также коэффициенты, стоящие при соответствующих синусах и косинусах в левой и правой частях уравнения (10), найдем

$$B_j (k^2 - i^2\omega^2) = \frac{b_j}{I_z}, \quad D_j (k^2 - i^2\omega^2) = \frac{d_j}{I_z}, \tag{11}$$

откуда

$$B_j = \frac{b_j}{(k^2 - i^2\omega^2) I_z}, \quad D_j = \frac{d_j}{(k^2 - i^2\omega^2) I_z}, \tag{12}$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots$

Подставив вычисленные значения B_j и D_j в уравнение (9), находим уравнение вынужденных крутильных колебаний твердого тела:

$$\varphi = \frac{b_0}{2c} + \frac{1}{I_z} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{b_j}{k^2 - i^2\omega^2} \cos i\omega t + \frac{d_j}{k^2 - i^2\omega^2} \sin \omega t \right), \tag{13}$$

где

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k^2 = \frac{c}{I_z}, \quad b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos i\omega t \, dt,$$

$$d_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin i\omega t \, dt \quad (j = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Твердое тело попадает в резонанс при условии $k^2 - i^2\omega^2 = 0$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$, т.е. при $k = i\omega$. Так, при $i = 1$, т.е. при $k = \omega$, имеют место резонансные колебания первого порядка, при $i = 2$, т.е. при $k = 2\omega$, имеют место резонансные колебания второго порядка и т.д. и, наконец, при $i = n$, т.е. при $k = n\omega$, имеют место резонансные колебания n-го порядка.

При одном порядке величин b_j и d_j по мере повышения порядка резонансных колебаний их амплитуды уменьшаются. Поэтому наиболее опасными являются резонансные колебания низших порядков.

Задача 9.68. Определить расстояние от оси вращения физического маятника, на котором следует подвесить добавочный груз, чтобы период колебаний физического маятника остался неизменным (Lamb).

Решение. *Физическим маятником* называется твердое тело, подвешенное к неподвижной горизонтальной оси. При отклонении от вертикали положение маятника полностью определяется углом поворота φ. Положительное направление отсчета угла поворота φ выбираем от вертикали против хода часовой стрелки.

Обозначим массу физического маятника буквой M, его момент инерции относительно оси вращения I_z, расстояние от центра масс до оси вращения h. *Приведенной длиной физического маятника* называется длина нити l математического маятника, круговая частота качаний которого равна круговой частоте качаний данного физического маятника.

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной горизонтальной оси z имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e). \tag{1}$$

Внешними силами, приложенными к физическому маятнику, являются: Mg – сила тяжести, приложенная в центре масс; R_x, R_y – составляющие реакции оси подвеса маятника. Сумма моментов внешних сил относительно оси подвеса равна

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = -Mgh\sin\varphi, \tag{2}$$

так как моменты сил R_x, R_y относительно оси подвеса z равны нулю. Внося (2) в уравнение (1), находим

$$I_z \ddot{\varphi} = -Mgh \sin\varphi. \tag{3}$$

Ограничившись рассмотрением малых колебаний маятника, положим $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mg}{I_z} h\varphi = 0. \tag{4}$$

Дифференциальное уравнение малых колебаний математического маятника, как известно, имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0. \tag{5}$$

Сопоставляя уравнения (4) и (5), находим приведенную длину физического маятника до присоединения добавочного груза:

$$l = \frac{I_z}{Mh}. \tag{6}$$

После присоединения добавочного груза массой m на искомом расстоянии x от оси подвеса уравнение (3) примет вид

$$(I_z + mx^2)\ddot{\varphi} = -(Mgh + mgx)\sin\varphi, \tag{7}$$

а дифференциальное уравнение малых колебаний маятника (4) – вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mh + mx}{I_z + mx^2} g\varphi = 0. \tag{8}$$

Отсюда по определению

$$l = \frac{I_z + mx^2}{Mh + mx}. \tag{9}$$

Решаем далее уравнения (6) и (9) совместно, исключая из них I_z:

$$l = \frac{Mhl + mx^2}{Mh + mx}.$$

Далее имеем

$$lmx = mx^2,$$

откуда находим два решения:

$$x_1 = l, \quad x_2 = 0.$$

Следовательно, не изменяя периода колебаний физического маятника, можно добавить груз на оси привеса или на расстоянии приведенной длины математического маятника.

Задача 9.69. Две точечные массы m_1 и m_2 соединены невесомым жестким стержнем, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через конец стержня O. Расстояния от оси O до точек m_1 и m_2 равны соответственно l_1 и l_2. Будучи отклоненным на начальный угол φ_0, стержень с массами качается вокруг оси O.

Определить угловое ускорение стержня как функцию угла поворота φ и приведенную длину эквивалентного математического маятника. Найти период малых колебаний стержня.

Решение. Применим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} m_z(F_i^e). \tag{1}$$

В этом уравнении I_z – момент инерции твердого тела относительно оси вращения z, проходящей через точку O. Он равен в рассматриваемом случае

$$I_z = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2. \tag{2}$$

Сумма моментов всех внешних сил относительно оси вращения равна

$$\sum_{i=1}^{n} m_z(F_i^e) = -m_1 g l_1 \sin\varphi - m_2 g l_2 \sin\varphi. \tag{3}$$

Внося эти значения в уравнение (1), находим

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\varphi} = (-m_1 l_1 - m_2 l_2) g \sin\varphi \tag{4}$$

Отсюда находится угловое ускорение системы

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} g \sin\varphi. \tag{5}$$

К задаче 9.69

Дифференциальное уравнение колебаний математического маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0. \tag{6}$$

Сопоставляя уравнения (5) и (6), заключаем, что длина эквивалентного математического маятника равна

$$l = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2}. \tag{7}$$

При малых колебаниях маятника можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} g\varphi = 0. \tag{8}$$

Это уравнение можно для краткости записать в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \qquad (9)$$

где

$$k^2 = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} g.$$

Период свободных колебаний, описываемых уравнением (9), равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{(m_1 l_1 + m_2 l_2) g}}\ .$$

Заметим, что нельзя в этой задаче две силы тяжести, $P_1 = m_1 g$ и $P_2 = m_2 g$, заменить одной силой, их равнодействующей, приложенной в центре тяжести, так как моменты инерции относительно оси z этих двух систем различны.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 37.4–37.9, 37.11–37.15, 37.17, 37.25, 37.33–37.35, 37.37, 37.39–37.41, 37.43, 37.44, 37.47–37.49.

§ 6. ДИНАМИКА ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Как известно из кинематики, уравнения плоского движения твердого тела имеют вид

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Разложив это движение на переносное поступательное вместе с поступательно движущимися осями координат, начало которых расположено в центре масс твердого тела, и на относительное вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс C перпендикулярно неподвижной плоскости (рис. 9.10), запишем дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела в форме

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \quad I_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_C(F_k^e). \qquad (1^*)$$

Первые два уравнения определяют закон движения центра масс твердого тела, а третье – его вращение вокруг оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости движения.

Твердое тело будет совершать плоское движение, если его масса распределена симметрично относительно некоторой плоскости Oxy; все внешние силы, приложенные к твердому телу, лежат в этой же плоскости, и начальные скорости точек твердого тела параллельны этой плоскости.

В то время как к кинематике за полюс можно принять любую точку плоской фигуры, в динамике за полюс следует брать центр масс C, так как первые два уравнения системы (1*) справедливы только для него. Иной выбор полюса приводит к усложнению уравнений.

С помощью дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела можно решать как первую, так и вторую задачу динамики.

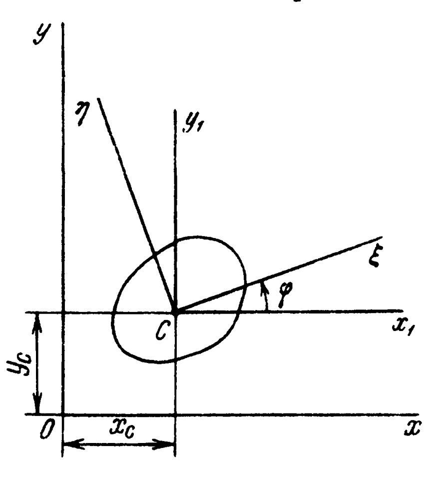


Рис. 9.10

При решении вторых задач динамики (определение движения по заданным силам) приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела. Для определения шести постоянных интегрирования должны быть заданы шесть начальных условий движения, имеющих вид:

при $t = 0$

$$x_C = x_{C_0},\quad y_C = y_{C_0},\quad \dot{x}_C = \dot{x}_{C_0},$$

$$\dot{y}_C = \dot{y}_{C_0},\quad \varphi = \varphi_0,\quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0.$$

Указание. Решение задач динамики плоского движения твердого тела рекомендуется выполнять в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке все внешние силы, приложенные к твердому телу;

2) выбрать систему координат и тем самым определить направление положительного отсчета угла поворота φ;

3) составить дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела (не следует забывать, что в третьем уравнении $I_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_C(F_k^e)$ момент инерции твердого тела I_C и сумма моментов всех внешних сил $\sum_{k=1}^{n} m_C(F_k^e)$ вычисляются относительно оси, проходящей через центр масс C твердого тела, перпендикулярно неподвижной плоскости);

4) а) в случае решения первой задачи искомые внешние силы и их моменты определяются из составленной в предыдущем пункте системы дифференциальных уравнений:

б) в случае решения второй задачи интегрированием системы дифференциальных уравнений движения определяют уравнения движения твердого тела:

$$x_C = f_1(t),\quad y_C = f_2(t),\quad \varphi = f_3(t).$$

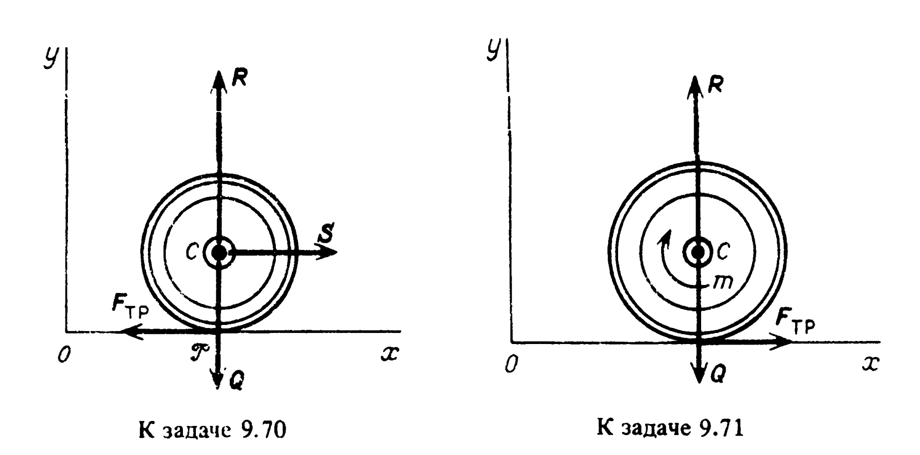
Если тело несвободное, то следует отбросить связи, заменив их действие реакциями, и включить их в число внешних сил, приложенных к телу.

Если по условию задачи известна зависимость двух координат от третьей (например, $x_C = F_1(\varphi)$, $y_C = F_2(\varphi)$) либо некоторые координаты заданы, то, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела, можно определить искомую координату (например, φ) и, кроме того, найти величины двух неизвестных внешних сил (или силы и момента).

Задача 9.70. Колесо массой M и радиусом r катится по горизонтальной плоскости под действием горизонтально направленной силы S, приложенной к центру масс колеса C. Радиус инерции колеса относительно его оси симметрии, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рисунка, равен ρ. Коэффициент трения скольжения колеса о плоскость равен f.

Определить предельное значение силы S, при котором колесо будет катится без скольжения.

Решение. Направление оси x задано. Направляем ось y по вертикали вверх. Угол поворота колеса φ отсчитываем против хода часовой стрелки. К колесу приложены внешние силы (рис.): $Q = Mg$ – сила тяжести колеса, S – движущая сила, R – нормальная реакция плоскости, $F_{тр}$ – сила трения колеса о горизонтальную плоскость. Сила трения препятствует скольжению колеса по горизонтальной плоскости. Поэтому



К задаче 9.70 К задаче 9.71

она направлена в сторону отрицательного направления оси x (рис.). Действительно, при качении скорость точки $\mathcal{P}$ (мгновенного центра скоростей колеса) равна нулю; при скольжении скорость точки $\mathcal{P}$ колеса будет направлена в сторону положительного направления оси x, а сила трения – в противоположную сторону.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения колеса (1*):

$$M\ddot{x}_C = S - F_{\text{тр}}, \qquad M\ddot{y}_C = -Q + R, \quad M\rho^2\ddot{\varphi} = -F_{\text{тр}}r. \tag{1}$$

При движении колеса $y_C = r$ = const. Следовательно, $\ddot{y}_C = 0$. Тогда из второго уравнения системы (1) находим $R = Q = Mg$. Под действием силы S колесо катится без скольжения. В этом случае точка касания колеса с горизонтальной плоскостью $\mathcal{P}$ является мгновенным центром скоростей в движении колеса. Скорость центра колеса $\dot{x}_C$ является вращательной скоростью вокруг мгновенного центра скоростей:

$$\dot{x}_C = -r\dot{\varphi}. \tag{2}$$

Здесь учтено, что $\dot{\varphi}$ в данном случае отрицательно: оно направлено по ходу часовой стрелки. Отсюда

$$\ddot{x}_C = -r\ddot{\varphi}. \tag{3}$$

Подставляя это значение $\ddot{x}_C$ в первое уравнение системы (1), имеем

$$-Mr\ddot{\varphi} = S - F_{\text{тр}}. \tag{4}$$

Умножим это уравнение на ρ^2, а третье уравнение системы (1) на r и сложим их:

$$S\rho^2 - F_{\text{тр}}(\rho^2 + r^2) = 0. \tag{5}$$

Отсюда сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = S\,\frac{\rho^2}{r^2 + \rho^2}. \tag{6}$$

При этом значении силы трения колесо катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Но сила трения должна удовлетворять неравенству

$$F_{\text{тр}} \leqslant fR \leqslant fQ \leqslant fMg, \tag{7}$$

где f – коэффициент трения между колесом и горизонтальной плоскостью. Подставляя в (7) значение силы трения (6), находим

$$S\,\frac{\rho^2}{r^2 + \rho^2} \leqslant fMg, \tag{8}$$

или

$$S \leqslant fMg\,\frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2}. \tag{9}$$

Следовательно, если движущая сила S удовлетворяет уравнению (9) колесо будет катится без скольжения. Если же S больше правой части нера-

венства (8), то колесо начнет скользить и одновременно катиться по горизонтальной плоскости.

Действие сил на колесо, рассмотренное в настоящей задаче, соответствует движению ведомого колеса по горизонтальной плоскости.

Движение ведущего колеса по горизонтальной плоскости будет рассмотрено в следующей задаче.

Задача 9.71. Колесо массой M и радиусом r катится по горизонтальной плоскости под действием вращающего момента m (рис.). Коэффициент трения скольжения колеса о горизонтальную плоскость равен f. Радиус инерции колеса относительно его оси симметрии, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через центр колеса C, равен ρ.

Определить предельное значение момента m, при котором колесо будет катится без скольжения по горизонтальной плоскости.

Р е ш е н и е. Направляем ось x по горизонтальной плоскости, ось y вертикально вверх, угол φ отсчитываем против хода часовой стрелки.

На ведущее колесо действуют внешние силы и моменты: $\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{g}$ – сила тяжести колеса, $\boldsymbol{R}$ – нормальная реакция плоскости, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения колеса о горизонтальную плоскость, m – вращающий момент. Существенное отличие от предыдущей задачи – направление оси трения скольжения. При определении направления силы трения скольжения следует руководствоваться правилом: сила трения скольжения направлена в сторону, противоположную возможному перемещению точки соприкосновения колеса с плоскостью при отсутствии трения скольжения.

В предыдущей задаче в отсутствие трения точка колеса, находящаяся в соприкосновении с плоскостью, начнет перемещаться вправо. Следовательно, сила трения скольжения будет направлена влево – в отрицательном направлении оси x.

В настоящей задаче в отсутствие трения точка колеса, находящаяся в соприкосновении с плоскостью, приобретет скорость, направленную влево, в отрицательном направлении оси x. Следовательно, сила трения скольжения будет направлена вправо – в положительном направлении оси x. Дифференциальные уравнения плоского движения колеса имеют вид

$$M\ddot{x}_C = F_{\text{тр}}, \quad M\ddot{y}_C = R - Mg = 0, \quad M\rho^2\ddot{\varphi} = F_{\text{тр}}r - m. \tag{1}$$

Если колесо катится без скольжения, то $\ddot{x}_C = -r\ddot{\varphi}$. Подставляя это значение в первое уравнение системы (1), имеем

$$-Mr\ddot{\varphi} = F_{\text{тр}}. \tag{2}$$

Умножим это уравнение на ρ^2, а третье уравнение системы (1) – на r и сложим эти два уравнения:

$$F_{\text{тр}}r^2 - mr + F_{\text{тр}}\rho^2 = 0. \tag{3}$$

Отсюда

$$F_{тр} = \frac{mr}{\rho^2 + r^2}. \qquad (4)$$

Таково значение силы трения у ведущего колеса. Сила трения должна удовлетворять неравенству

$$F_{тр} \leqslant fMg. \qquad (5)$$

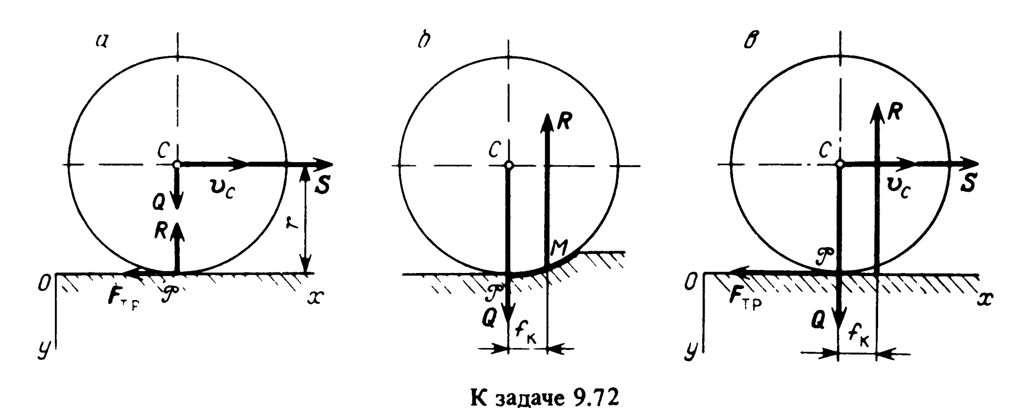
Следовательно, согласно (4),

$$m \leqslant fMg\frac{r^2 + \rho^2}{r}. \qquad (6)$$

Только при соблюдении соотношения (6) ведущее колесо будет катиться без скольжения. Если же вращающий момент m будет превосходить величину, определяемую (6), то скольжение колеса неизбежно.

Задача 9.72. Колесо массой M и радиусом r катится по горизонтальной плоскости без скольжения под действием горизонтальной силы S, приложенной в центре масс C. Задан закон движения центра масс: $x_C = bt^2/2$, где $b > 0$ – постоянная.

Определить силу S в двух вариантах: а) при действии силы трения скольжения (коэффициент трения скольжения f); б) при действии трения качения (коэффициент трения качения $f_к$).



К задаче 9.72

Р е ш е н и е. *Случай 1.* Действует трение скольжения (рис. *а*). К колесу приложены внешние силы: $Q = Mg$ – сила тяжести колеса, S – движущая сила, R – нормальная реакция плоскости, $F_{тр}$ – сила трения колеса о горизонтальную плоскость, направленная в сторону, противоположную движению колеса.

Дифференциальные уравнения плоского движения (1*) в данном случае имеют вид

$$M\ddot{x}_C = S - F_{\text{тр}}, \quad M\ddot{y}_C = Q - R, \quad \frac{Mr^2}{2}\ddot{\varphi} = F_{\text{тр}}r. \qquad (1)$$

При движении колеса координата $y_C = -r$ постоянна, т.е. $\ddot{y}_C = 0$. Из второго уравнения системы (1) находим $R = Q = Mg$.

При качении колеса без скольжения мгновенный центр скоростей расположен в точке $\mathcal{P}$ касания колеса с горизонтальной плоскостью; следовательно, $v_C = r\omega$. Так как скорость центра колеса параллельна оси x, то

$$\dot{x}_C = r\dot{\varphi}. \qquad (2)$$

Формула (2) определяет условие качения колеса без скольжения. Воспользовавшись формулой (2), вычислим

$$\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}. \qquad (3)$$

Так как движение центра масс C колеса задано: $x_C = bt^2/2$, то

$$\ddot{x}_C = b. \qquad (4)$$

Из формул (3) и (4) находим

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r} = \frac{b}{r}. \qquad (5)$$

Использовав формулу (5), из третьего уравнения системы (1) определим искомый модуль силы трения

$$F_{\text{тр}} = \frac{Mb}{2}. \qquad (6)$$

Остается из первого уравнения системы (1) найти S. Принимая во внимание формулы (4) и (6), получаем

$$S = \frac{3b}{2}M.$$

Случай 2. Действует трение качения (рис. *б*). При качении колеса по плоскости в результате деформации колеса и плоскости соприкосновение их происходит не в одной точке $\mathcal{P}$, а по небольшой дуге $\mathcal{P}M$. Суммарная реакция R, подсчитанная по дуге соприкосновения $\mathcal{P}M$, разлагается на нормальную и касательную составляющие. Касательная составляющая является силой трения $F_{\text{тр}}$. Нормальная составляющая реакции оказывается смещенной относительно центра масс колеса C в сторону движения на величину $f_{\text{к}}$, называемую коэффициентом трения качения (рис. *б*). Следовательно, в отличие от коэффициента трения скольжения f, который

является безразмерной величиной, коэффициент трения качения $f_к$ измеряется в сантиметрах (при качении колеса железнодорожного вагона по рельсу коэффициент трения качения $f_к$ имеет порядок сотых долей сантиметра).

При учете трения качения первое и второе уравнения системы (4) остаются без изменения. В правую часть третьего уравнения добавляется отрицательный момент смещенной реакции R, т.е. $m_C(R) = -f_к R = -f_к Mg$. Следовательно, система дифференциальных уравнений движения колеса принимает вид (рис. *в*)

$$M\ddot{x}_C = S - F_{тр}, \quad M\ddot{y}_C = Mg - R, \quad \frac{Mr^2}{2}\ddot{\varphi} = F_{тр}r - Mgf_к. \tag{7}$$

Из второго уравнения этой системы находим выражение для нормальной реакции: $R = Mg$; таким образом, на нее трение качения влияния не оказывает. Из третьего уравнения системы (7) с использованием формулы (5) находим

$$F_{тр} = \left(\frac{b}{2g} + \frac{f_к}{r}\right)Mg.$$

После подстановки полученного значения $F_{тр}$ и значения $\ddot{x}_C$ из формулы (4) в первое уравнение системы (7) получим

$$S = \left(\frac{3b}{2g} + \frac{f_к}{r}\right)Mg.$$

Как и следовало ожидать, для получения того же самого закона движения центра масс C колеса при наличии трения качения следует прикладывать бо́льшую по модулю силу S.

Задача 9.73. Однородный шар массой m и радиусом r катится под действием силы тяжести по наклонной плоскости, образующей угол β с горизонтом (рис.). Каким должно быть минимальное значение коэффициента трения скольжения, чтобы шар катился, а не скользил? В начальный момент времени шар находился в покое.

Р е ш е н и е. Проведем ось x вдоль наклонной плоскости, а ось y перпендикулярно ей. Начало координат совпадает с начальным положением. Точка касания шара с наклонной плоскостью обозначена M_0. Поворот шара относительно его начального положения будем измерять углом α, образованным радиусом CM, проведенным в той точке M, которая являлась в начальный момент времени точкой касания шара с плоскостью, с начальным напраьлением C_0M_0 этого радиуса (рис.).

На шар действуют три внешние силы: сила тяжести mg, нормальная реакция плоскости N и сила трения T.

Применим принцип освобождаемости от связей и напишем три дифференциальных уравнения плоского движения шара:

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\beta - T, \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = -mg\cos\beta + N, \quad (2)$$

$$I_C\ddot{\alpha} = Tr. \quad (3)$$

Момент инерции шара относительно центральной оси равен

$$I_C = \frac{2}{5}mr^2. \quad (4)$$

Так как шар катится по наклонной плоскости без скольжения, то

$$x_C = r\alpha. \quad (5)$$

Дифференцируя это равенство дважды, находим

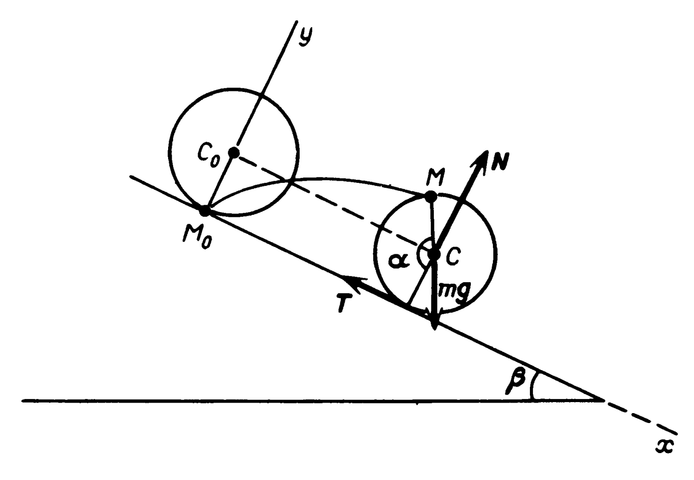
$$\ddot{x}_C = r\ddot{\alpha}. \quad (6)$$

Внося значения (6) и (4) в (3) и решая полученное уравнение, имеем

$$T = \frac{2}{5}m\ddot{x}_C. \quad (7)$$

Далее решая (7) совместно с (1), получаем

$$\ddot{x}_C = \frac{5}{7}g\sin\beta. \quad (8)$$



К задаче 9.73

Заметим, что если бы шар не катился, а скользил по наклонной плоскости без трения, то его центр масс двигался бы согласно уравнению

$$\ddot{x}_C = g \sin\beta. \tag{9}$$

Сопоставляя уравнения (8) и (9), можно заметить, что в случае катящегося шара пять седьмых силы тяжести идет на приведение шара в поступательное движение, а две седьмых силы тяжести – на приведение его во вращательное движение.

Движение центра масс шара, согласно (8), происходит по закону

$$x_C = \frac{5}{14} g \sin\beta \cdot t^2. \tag{10}$$

Уравнение (10) получается двойным интегрированием уравнения (8). Вращение шара происходит согласно (5):

$$\alpha = \frac{5}{14} \frac{g}{r} \sin\beta \cdot t^2. \tag{11}$$

Так как $y_C = \mathrm{const}$, то из уравнения (2) находим

$$N = mg \cos\beta. \tag{12}$$

Из уравнений (1) и (8) находим силу трения

$$T = m\,(g \sin\beta - \ddot{x}_C) = \frac{2}{7} mg \sin\beta. \tag{13}$$

Согласно условию, трение достаточно велико, чтобы не было скольжения. Следовательно,

$$T \leqslant fN,$$

где f – коэффициент предельного трения скольжения. Следовательно, для чистого качения достаточно, чтобы

$$\frac{2}{7} mg \sin\beta < fN = f mg \cos\beta,$$

или

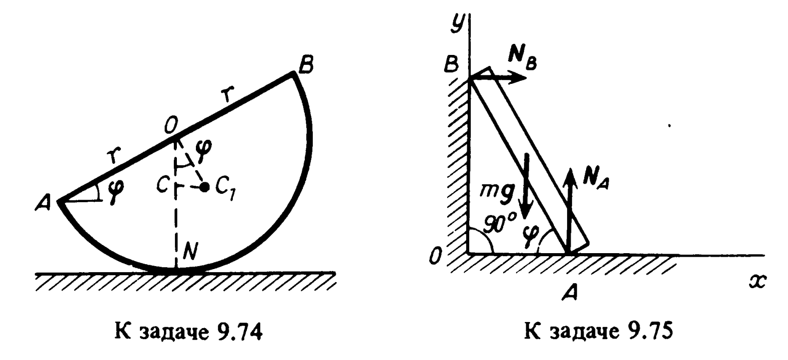
$$f > \frac{2}{7} \operatorname{tg}\beta.$$

Задача 9.74. На абсолютно гладкую горизонтальную плоскость поставлено тяжелое однородное тело. Тело имеет форму половины круга. Диаметр круга в начальный момент образует угол φ с горизонтом. Тело в начальный момент опирается на плоскость в точке N (рис.).

Определить в начальный момент положение мгновенной оси вращения полукруга.

Решение. Определим вначале положение центра тяжести полукруга. Воспользуемся для этого второй теоремой Паппа Александрийского (вторая половина III в.). Эту теорему Папп сформулировал без доказательства. Доказательство было дано Паулем Гульдином, швейцарским математиком, в 1640 г.

Согласно этой теореме, "объем тела вращения, описанного плоской фигурой, вращающейся вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры и не



К задаче 9.74 К задаче 9.75

пересекающей ее контура, равен произведению площади фигуры на длину пути, описанного ее центром тяжести".

Выбираем за ось диаметр AB полукруга. По теореме объем шара равен произведению площади фигуры на длину пути, описанного ее центром тяжести:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi r^2}{2} 2\pi y_{C_1},$$

откуда

$$y_{C_1} = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}.$$

Ось y проведена из центра O перпендикулярно диаметру AB.

На полукруг действуют две вертикальные силы – реакция абсолютно гладкой плоскости и сила тяжести. Следовательно, согласно теореме о движении центра масс, его ускорение и скорость будут направлены по вертикали вниз. Скорость точки N полукруга направлена по гладкой плоскости.

Восставляем перпендикуляры к скоростям двух точек C_1 и N плоской фигуры – полукруга. Они пересекутся в мгновенном центре вращения плоской фигуры C. Находим расстояние от точки N по вертикали до

точки C:

$$NC = r - \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi}\cos\varphi = r\left(1 - \frac{4}{3\pi}\cos\varphi\right),$$

так как угол COC_1 равен φ.

Задача 9.75. Однородный стержень массой m и длиной $AB = l$ скользит по гладкому горизонтальному полу и по гладкой вертикальной стене.

Определить как функции угла φ, образованного стержнем с горизонтальным полом, угловую скорость ω и угловое ускорение ϵ стержня, а также реакции в точках A и B во время движения. Найти угол φ_1, при котором стержень AB перестанет соприкасаться со стеной (рис.).

Р е ш е н и е. Стержень совершает плоское движение. Составляем три дифференциальных уравнения плоского движения:

$$m\ddot{x}_C = N_B,$$
$$m\ddot{y}_C = N_A - mg, \qquad (1)$$
$$I_{zC}\ddot{\varphi} = N_B\,\frac{l}{2}\sin\varphi - N_A\,\frac{l}{2}\cos\varphi.$$

Здесь x_C, y_C – координаты центра масс стержня; N_A, N_B – реакции пола и стены; I_{zC} – момент инерции стержня относительно оси z_C, перпендикулярной рисунку и проходящей через центр масс стержня. Координаты центра масс стержня равны

$$x_C = \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad y_C = \frac{l}{2}\sin\varphi. \qquad (2)$$

Проекции скорости центра масс на оси координат определяются как первые производные от координат по времени:

$$\dot{x}_C = -\frac{l}{2}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}, \quad \dot{y}_C = \frac{l}{2}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}. \qquad (3)$$

Проекции ускорения центра масс на оси координат равны вторым производным от координат по времени:

$$\ddot{x}_C = -\frac{l}{2}(\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}), \quad \ddot{y}_C = \frac{l}{2}(-\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\cdot\ddot{\varphi}). \qquad (4)$$

Внося значения (4) проекций ускорения центра масс в первые два уравнения системы (1), находим

$$N_A = mg + m\,\frac{l}{2}(\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2), \quad N_B = -\frac{ml}{2}(\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}).$$
(5)

Найденные значения реакций вносим в третье уравнение системы (1), вводя обозначения $\dot\varphi = \omega$, $\ddot\varphi = \epsilon$:

$$\frac{ml^2}{12}\epsilon = -\frac{ml^2}{4}(\sin\varphi\cos\varphi\cdot\omega^2 + \sin^2\varphi\cdot\epsilon) -$$

$$-\left[mg\frac{l}{2}\cos\varphi + \frac{ml^2}{4}(\cos\varphi\cdot\epsilon - \sin\varphi\cdot\omega^2)\cos\varphi\right] = -\frac{ml}{2}\left(\frac{\epsilon}{2} + g\cos^2\varphi\right). \tag{6}$$

Из (6) определяется угловое ускорение стержня как функция угла φ:

$$\epsilon = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\varphi. \tag{7}$$

Из очевидного равенства

$$\omega\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\epsilon,$$

умножая обе его части на dt, получаем

$$\omega\,d\omega = \epsilon\,d\varphi. \tag{8}$$

Вносся в уравнение (8) значение ϵ (7) и интегрируя, находим

$$\int_0^\omega \omega\,d\omega = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\epsilon\,d\varphi = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos\varphi, \tag{9}$$

или

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi). \tag{10}$$

Значения углового ускорения (7) и угловой скорости (10) вносим в формулы (5). Тогда реакции N_A и N_B будут равны

$$N_A = mg + \frac{ml}{2}\left[-\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos^2\varphi - \sin\varphi\cdot\frac{3g}{l}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)\right] =$$

$$= mg\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\sin\varphi\sin\varphi_0 + \frac{9}{4}\sin^2\varphi\right), \tag{11}$$

$$N_B = -\frac{ml}{2}\left[\frac{3g}{l}\cos\varphi(\sin\varphi_0 - \sin\varphi) + \sin\varphi\left(-\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\varphi\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{4}mg\cos\varphi(3\sin\varphi - 2\sin\varphi_0). \tag{12}$$

Переходим к определению угла φ_1, при котором стержень перестанет соприкасаться со стеной. В этот момент сила давления стержня на стену и равная по модулю реакция N_B обратятся в нуль:

$$N_B = \frac{3}{4} mg \cos\varphi (3 \sin\varphi - 2 \sin\varphi_0) = 0. \tag{13}$$

Отсюда находим

$$\cos\varphi_2 = 0, \tag{14}$$

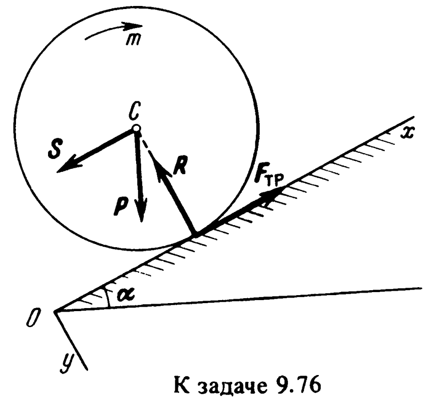
или

$$\sin\varphi_1 = \frac{2}{3} \sin\varphi_0. \tag{15}$$

Решение (14) соответствует $\varphi_2 = \pi/2$, стержень вертикален. Решение (15) определяет значение угла φ_1, при котором стержень перестанет касаться стены.

Задача 9.76. При движении автомашины в гору, склон которой расположен под углом α к горизонту, к ведущему колесу приложен постоянный вращающий момент m. К оси C ведущего колеса приложена со стороны ведомых частей автомашины постоянная сила $\boldsymbol{S}$.

Определить закон движения центра масс C колеса. Колесо считать однородным кольцом массой M и радиусом r. В начальный момент автомашина находилась в покое. Колесо катится без скольжения. Трением качения пренебречь. Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен ρ.



К задаче 9.76

Решение. На колесо действуют внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ – сила тяжести колеса, $\boldsymbol{S}$ – сила, приложенная со стороны ведомых частей автомашины, $\boldsymbol{R}$ – нормальная реакция поверхности Земли, вращающий момент m, $\boldsymbol{F}_{тр}$ – сила трения ведущего колеса о поверхность Земли – направлена в сторону движения и является движущей силой (см. задачу 9.71).

Оси координат изображены на рисунке. В соответствии с направлением осей считаем положительным направление отсчета угла поворота φ по ходу часовой стрелки.

Запишем дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \quad I_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_C(F_k^e),$$

принимающие для рассматриваемой задачи вид

$$M\ddot{x}_C = F_{\text{тр}} - Mg\sin\alpha - S, \qquad M\ddot{y}_C = -R + Mg\cos\alpha,$$
$$M\rho^2\ddot{\varphi} = m - F_{\text{тр}}r. \tag{1}$$

Так как $y_C = -r$ постоянно, то $\ddot{y}_C = 0$ и из второго уравнения системы следует, что $R = Mg\cos\alpha$.

Разделив первое уравнение системы (1) на третье и использовав при этом вытекающее из условия качения колеса без скольжения $\dot{x}_C = r\dot{\varphi}$ соотношение $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$, получим

$$\frac{F_{\text{тр}} - Mg\sin\alpha - S}{\dfrac{m}{r} - F_{\text{тр}}} = \frac{r}{\rho^2},$$

откуда

$$F_{\text{тр}} = \frac{mr + (Mg\sin\alpha + S)\rho^2}{r^2 + \rho^2}. \tag{2}$$

После подстановки значения $F_{\text{тр}}$ из формулы (2) в правую часть первого уравнения системы (1) найдем

$$\ddot{x}_C = \frac{r}{M}\,\frac{m - (Mg\sin\alpha + S)r}{r^2 + \rho^2}.$$

Интегрирование этого дифференциального уравнения при начальных условиях движения: $t = 0, x_C = 0, \dot{x}_C = 0$, приводит к выражению

$$x_C = \frac{r}{2M}\,\frac{m - (Mg\sin\alpha + S)r}{r^2 + \rho^2}\,t^2.$$

Как следует из полученного результата, движение колеса вверх из состояния покоя может происходить только при выполнении условия

$$m > (Mg\sin\alpha + S)r. \tag{3}$$

Однако качение ведущего колеса без скольжения может происходить лишь при значениях вращающего момента m, не превосходящих определенного предела. Действительно, так как сила трения должна удовлетворять неравенсту $F_{\text{тр}} \leqslant fR$, т.е. $F_{\text{тр}} \leqslant fMg\cos\alpha$, то, подставив в левую

часть этого неравенства значение $F_{\text{тр}}$ из формулы (2), находим

$$\frac{mr + (Mg\sin\alpha + S)\rho^2}{r^2 + \rho^2} \leqslant fMg\cos\alpha,$$

откуда

$$m \leqslant \frac{1}{r}\,[fMg(r^2 + \rho^2)\cos\alpha - (Mg\sin\alpha + S)\rho^2]. \tag{4}$$

Сопоставив неравенства (3) и (4), запишем

$$(Mg\sin\alpha + S)\,r < m \leqslant \frac{1}{r}\,[fMg(r^2 + \rho^2)\cos\alpha - (Mg\sin\alpha + S)\rho^2].$$

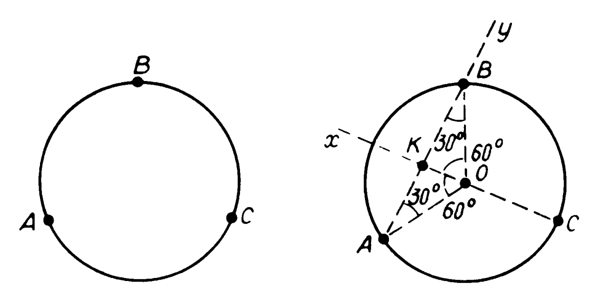
Если величина вращающего момента удовлетворяет этому двойному неравенству, то качение ведущего колеса осуществляется без скольжения.

При

$$m > \frac{1}{r}\,[fMg(r^2 + \rho^2)\cos\alpha - (Mg\sin\alpha + S)\rho^2]$$

колесо начинает скользить.

Задача 9.77. Однородная тонкая горизонтальная круглая пластинка массой M и радиусом r опирается в точках A, B и C, расположенных по ее внешнему краю на одинаковом расстоянии друг от друга (рис.). Определить давление на опоры A и B сразу после того, как будет убрана опора C.



К задаче 9.77

Р е ш е н и е. Отбросим опору C. Тогда на горизонтальную пластинку будут действовать силы: сила тяжести, равная Mg, приложенная в центре O пластинки и действующая по вертикали и две вертикальные реакции — в точках A и B. Проведем через точки O и C ось x. Она разделит хорду AB на две равные части: $AK = KB$. Сумма моментов всех внешних сил относи-

тельно прямой OC равна

$$I_x\ddot{\varphi}_x = N_A \cdot AK - N_B \cdot BK = 0, \qquad (1)$$

так как никакого вращения вокруг оси x в начальный момент после удаления опоры C происходить не будет. Вращение будет происходить вокруг оси y, проходящей через точки A и B. Из уравнения (1) следует, что

$$N_A = N_B \equiv N. \qquad (2)$$

Составим теперь два уравнения движения. Согласно теореме о движении центра масс, запишем

$$Ma_0 = Mg - 2N, \qquad (3)$$

так как на пластинку действуют вертикальные силы — тяжести и реакции опор. Второе уравнение вращения вокруг оси y, проходящей через точки A и B, имеет вид

$$I_{AB}\ddot{\varphi}_y = Mg \cdot OK. \qquad (4)$$

Согласно теореме Штейнера,

$$I_{AB} = I_{y_O} + M \cdot (OK)^2,$$

где $I_{y_O} = Mr^2/4$ — момент инерции круглой однородной пластинки относительно оси y_0, параллельной оси y и проходящей через центр пластинки O, $OK = r\cos 60° = r/2$. Отсюда

$$I_{AB} = \frac{Mr^2}{4} + \frac{Mr^2}{4} = \frac{Mr^2}{2}. \qquad (5)$$

Подставляя значения (5) в уравнение (4), находим угловое ускорение пластинки

$$\frac{Mr^2}{2}\ddot{\varphi}_y = Mg\frac{r}{2},$$

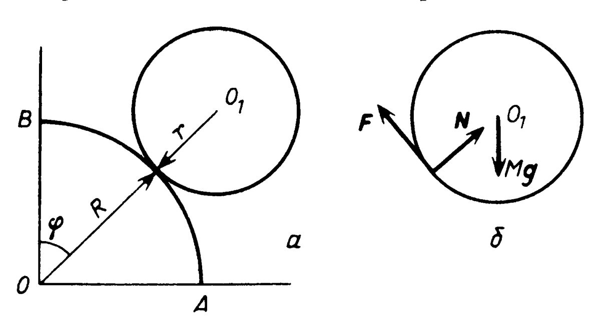
откуда $\ddot{\varphi}_y = \frac{g}{r}$. Учитывая, что $a_0 = OK \cdot \ddot{\varphi}_y = \frac{r}{2}\frac{g}{r} = \frac{g}{2}$, находим из уравнения (3)

$$M\frac{g}{2} = Mg - 2N,$$

откуда искомая реакция равна

$$N = \frac{Mg}{4}.$$

Задача 9.78. С неподвижного шероховатого шара радиусом R скатывается без скольжения другой шар массой M и радиусом r (рис. *а*). В начальный момент времени второй шар находился в покое, соприкасаясь с первым шаром в точке B. Найти при произвольном угле φ нормальную реакцию N и силу трения F между обоими шарами. Угол φ измеряется от



К задаче 9.78

вертикали до прямой, соединяющей центры шаров в произвольный момент времени. Определить наименьшее значение коэффициента трения f и угол φ_1, при котором малый шар отрывается от большого.

Р е ш е н и е. Шар массой M совершает плоское движение. На него действуют силы: сила тяжести $M\boldsymbol{g}$, нормальная реакция $\boldsymbol{N}$ и сила трения $\boldsymbol{F}$, направленная по касательной в точке соприкосновения шаров.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения шара (рис. *б*) в проекции на нормаль и на касательную к траектории полюса O_1, а также дифференциальное уравнение вращения вокруг полюса O_1, являющегося центром масс движущегося шара:

$$M(R+r)\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = Mg\sin\varphi - F, \qquad (1)$$

$$M(R+r)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Mg\cos\varphi - N, \qquad (2)$$

$$I\ddot{\vartheta} = Fr. \qquad (3)$$

В уравнении (3) угол поворота движущегося шара обозначен ϑ. Этот угол связан с углом φ соотношением

$$r(\vartheta - \varphi) = R\varphi. \qquad (4)$$

Из уравнения (4), дифференцируя по времени, находим

$$r\dot{\vartheta} = (R+r)\,\dot{\varphi}. \qquad (5)$$

Тогда

$$\ddot{\vartheta} = \frac{R}{r}\ddot{\varphi} + \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}\left(\frac{R}{r} + 1\right). \quad (6)$$

Момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через центр шара, равен

$$I = \frac{2}{5} Mr^2. \quad (7)$$

Внося полученное значение (7) в уравнение (3), находим

$$\ddot{\vartheta} = \frac{5F}{2M(R+r)}. \quad (8)$$

Подставляя это значение в формулу (6), имеем

$$\ddot{\varphi} = \frac{5}{2}\frac{F}{M(R+r)}. \quad (9)$$

С другой стороны, из уравнения (1) также определяется

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{M(R+r)}(Mg\sin\varphi - F). \quad (10)$$

Мы получили два уравнения (9) и (10) с двумя неизвестными $\ddot{\varphi}$ и F. Решая их совместно, получаем

$$\ddot{\varphi} = \frac{5}{7}\frac{g\sin\varphi}{R+r}, \quad (11)$$

$$F = \frac{2}{7} Mg\sin\varphi. \quad (12)$$

Для определения $\dot{\varphi}$ преобразуем уравнение (11), умножая обе части на $d\varphi$:

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt}d\varphi = \frac{5}{7}\frac{g\sin\varphi}{R+r}d\varphi. \quad (13)$$

Тогда, интегрируя

$$\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = \frac{5}{7}\frac{g}{R+r}\sin\varphi\,d\varphi, \quad (14)$$

находим

$$\frac{\dot\varphi^2}{2} = -\frac{5}{7}\frac{g}{R+r}\cos\varphi + C. \tag{15}$$

Произвольную постоянную интегрирования C определяем, внося в (15) начальные условия: $\dot\varphi = 0$ при $\varphi = 0$. Тогда

$$C = \frac{5}{7}\frac{g}{R+r},$$

и уравнение (15) примет вид

$$\dot\varphi^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{R+r}(1-\cos\varphi).$$

Внося найденное значение $\dot\varphi^2$ в уравнение (2), определяем силу нормального давления движущегося шара:

$$\frac{10}{7}Mg(1-\cos\varphi) = Mg\cos\varphi - N,$$

откуда

$$N = \frac{17}{7}Mg\cos\varphi - \frac{10}{7}Mg. \tag{16}$$

Зная силу нормального давления и силу трения, находим значение коэффициента трения, подставляя в формулу

$$F = fN$$

найденные значения F и N:

$$f = \frac{F}{N} = \frac{2}{7}\frac{Mg\sin\varphi\cdot 7}{17Mg\cos\varphi - 10Mg} = \frac{2\sin\varphi}{17\cos\varphi - 10}. \tag{17}$$

Это – минимальное значение коэффициента трения. Безотрывное движение шара возможно при значении коэффициента трения, равном или большем (17).

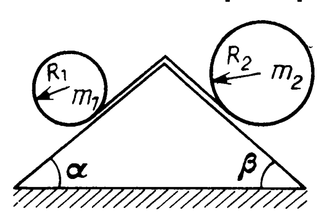
Угол φ, при котором произойдет отрыв движущегося шара от неподвижного, определится из уравнения (16), если положить в нем нормальную реакцию N равной нулю:

$$\cos\varphi_1 = \frac{10}{17}.$$

Задача 9.79. Два цилиндрических вала, массы которых m_1 и m_2, а радиусы R_1 и R_2, катятся по двум наклонным плоскостям, образующим

углы α и β с горизонталью. Через вершину наклонных плоскостей перекинута гибкая гладкая нерастяжимая нить, концы которой намотаны на валы и закреплены на них (рис.).

Каково натяжение нити T и с каким ускорением a_e нить скользит по наклонным плоскостям? Массой нити пренебрегаем.



К задаче 9.79

Р е ш е н и е. Обозначая a_{r1} и a_{r2} относительные ускорения центров валов по отношению к нити, запишем дифференциальные уравнения движения центров масс каждого вала:

$$m_1(a_{r1} + a_e) = m_1 g \sin\alpha - T, \tag{1}$$

$$m_2(a_{r2} - a_e) = m_2 g \sin\beta - T. \tag{2}$$

Обозначая буквами ϵ_1 и ϵ_2 угловые ускорения валов, равные

$$\epsilon_1 = \frac{a_{r1}}{R_1}, \quad \epsilon_2 = \frac{a_{r2}}{R_2}, \tag{3}$$

запишем для каждого вала дифференциальное уравнение вращения вокруг центра масс:

$$\frac{1}{2} m_1 R_1^2 \epsilon_1 = TR_1, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2} m_2 R_2^2 \epsilon_2 = TR_2. \tag{5}$$

Внося угловые ускорения ϵ_1 и ϵ_2 (3) в уравнения (4) и (5), находим

$$a_{r1} = \frac{2T}{m_1}, \quad a_{r2} = \frac{2T}{m_2} \tag{6}$$

Эти значения ускорений вносим в уравнения (1) и (2):

$$m_1\left(\frac{2T}{m_1} + a_e\right) = m_1 g \sin\alpha - T, \tag{7}$$

$$m_2\left(\frac{2T}{m_2} - a_e\right) = m_2 g \sin\beta - T. \tag{8}$$

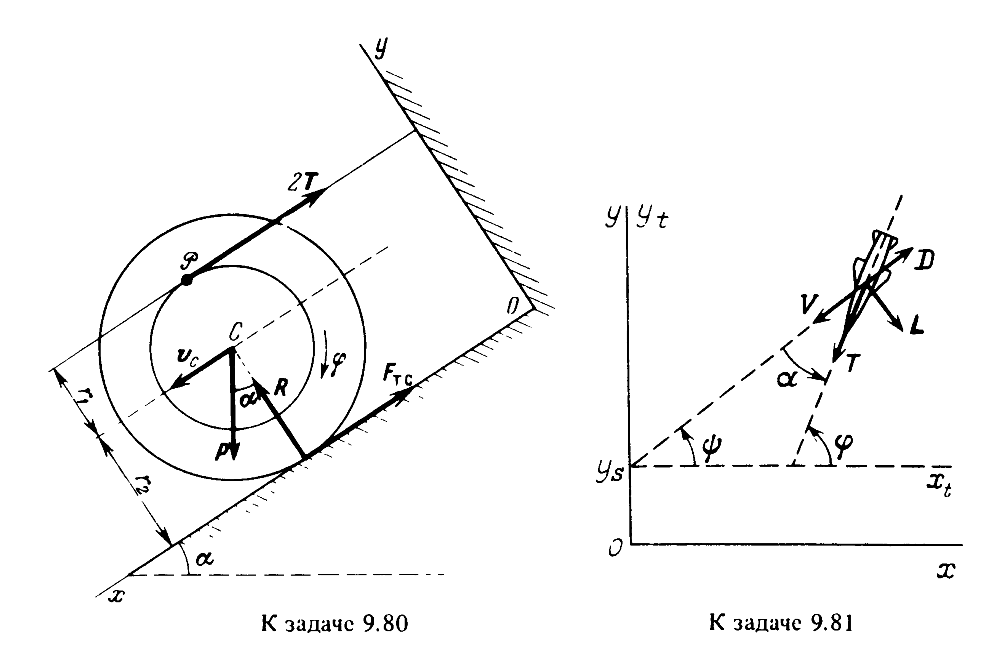
Исключая из этих двух уравнений натяжение нити T, определяем искомое ускорение нити:

$$a_e = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2} g. \tag{9}$$

Внося найденное значение (9) в уравнение (7), находим натяжение нити:

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{3(m_1 + m_2)} (\sin\alpha + \sin\beta).$$

Задача 9.80. Катушка массой M и радиусом r_2 скатывается, скользя под действием силы тяжести, с наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. При этом разматываются две нити, намотанные на ось катушки радиусом r_1 симметрично ее вертикальной плоскости



К задаче 9.80

К задаче 9.81

материальной симметрии (на рисунке прямолинейные участки нитей изображены одной прямой). При движении катушки ее ось остается горизонтальной.

Определить реакции нитей и скорость центра масс C катушки; ρ – радиус инерции катушки относительно оси, проходящей через ее центр масс C перпендикулярно неподвижной плоскости. В начальный момент катушка находилась в покое. Коэффициент трения скольжения катушки о наклонную плоскость равен f.

Решение. К катушке приложены внешние силы; $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ – ее сила тяжести, $2\boldsymbol{T}$ – суммарная реакция нитей, $\boldsymbol{R}$ – нормальная реакция наклонной плоскости, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения катушки о наклонную плоскость. Так как катушка, скатываясь, поворачивается по ходу часовой стрелки, то $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ направлена вдоль наклонной плоскости вверх.

Выбираем оси координат xy так, как это показано на рисунке. Положительным считаем направление отсчета угла φ по ходу часовой стрелки.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения катушки

$$M\ddot{x}_C = Mg\sin\alpha - 2T - F_{\text{тр}}, \quad M\ddot{y}_C = R - Mg\cos\alpha,$$
$$M\rho^2\ddot{\varphi} = 2Tr_1 - F_{\text{тр}}r_2. \tag{1}$$

При движении катушки $y_C = r_2$ постоянно, т.е. $\ddot{y}_C = 0$. Из второго уравнения системы (1) находим модуль нормальной реакции плоскости:

$$R = Mg\cos\alpha. \tag{2}$$

Для определения реакции нити T надо из первого и третьего уравнений системы (1) исключить $\ddot{x}_C$ и $\ddot{\varphi}$. Для этого следует установить зависимость между ними. Заметив, что мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$ расположен в точке схода нити к оси катушки (см. рисунок), запишем $v_C = r_1\omega$, т.е. $\dot{x}_C = r_1\dot{\varphi}$ и, следовательно,

$$\ddot{x}_C = r_1\ddot{\varphi}. \tag{3}$$

Разделив первое уравнение системы (1) на третье и использовав зависимость (3), находим

$$\frac{r_1}{\rho^2} = \frac{Mg\sin\alpha - 2T - F_{\text{тр}}}{2Tr_1 - F_{\text{тр}}r_2},$$

откуда

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{Mg\rho^2\sin\alpha + F_{\text{тр}}(r_1r_2 - \rho^2)}{\rho^2 + r_1^2}. \tag{4}$$

Так как сила трения равна $F_{\text{тр}} = fR$, то $F_{\text{тр}} = f\,Mg\cos\alpha$, и в соответствии с формулой (2) выражение (4) принимает вид

$$T = \frac{Mg}{2}\,\frac{\rho^2\sin\alpha + f(r_1r_2 - \rho^2)\cos\alpha}{\rho^2 + r_1^2}.$$

Таково значение модуля реакции каждой нити.

Остается определить скорость центра масс C катушки. Для этого, подставив в первое уравнение системы (1) значения $F_{\text{тр}}$ и T, находим

$$\ddot{x}_C = gr_1\,\frac{r_1\sin\alpha - f(r_1 + r_2)\cos\alpha}{\rho^2 + r_1^2}.$$

Так как при $t = 0$ $\dot{x}_C = 0$, то

$$\dot{x}_C = gr_1 \frac{r_1 \sin\alpha - f(r_1 + r_2)\cos\alpha}{\rho^2 + r_1^2} t.$$

Для того чтобы катушка скатывалась по наклонной плоскости, необходимо выполнение условия $\dot{x}_C > 0$, т.е.

$$r_1 \sin\alpha - f(r_1 + r_2)\cos\alpha > 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha > f \frac{r_1 + r_2}{r_1}.$$

Если $\operatorname{tg}\alpha \leqslant f \dfrac{r_1 + r_2}{r_1}$, то катушка остается в покое.

Задача 9.81. Осесимметричный управляемый снаряд преследует по кривой погони цель, движущуюся прямолинейно и равномерно. Кривая погони – траектория центра масс снаряда в случае, когда его вектор скорости непрерывно направлен на цель. Цель и снаряд движутся в одной горизонтальной плоскости (рис.).

Определить, при каком соотношении скоростей цели и центра масс снаряда возможно точное поражение цели. Скорость центра масс снаряда постоянна по модулю*).

Р е ш е н и е. Уравнение прямолинейного и равномерного движения цели имеет вид

$$y_s = y_0 + v_s t. \tag{1}$$

На управляемый снаряд в горизонтальной плоскости действуют следующие силы:

а. Сила тяги $\boldsymbol{T}$, направленная по оси симметрии снаряда. По модулю силу тяги считаем постоянной.

б. Сила лобового сопротивления $\boldsymbol{D}$, направленная в сторону, прямо противоположную скорости центра масс снаряда. Сила лобового сопротивления равна

$$D = (C_0 + C_\alpha \alpha^2) v^2, \tag{2}$$

где C_0, C_α – постоянные коэффициенты, α – угол скольжения, v – скорость центра масс снаряда.

в. Боковая сила $\boldsymbol{L}$, направленная перпендикулярно направлению скорости центра масс снаряда. Модуль боковой силы при малых углах сколь-

*) К е л ь з о н А.С. Динамические задачи кибернетики. – Л.: Судпромгиз, 1959.– С. 296.

жения пропорционален углу скольжения α и квадрату скорости:

$$L = C_L v^2 \alpha, \tag{3}$$

где C_L – постоянный коэффициент.

г. Момент $M(\dot{\varphi})$ – демпфирующий момент сил сопротивления воздуха, при вращении снаряда в горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\dot{\varphi}$, равный

$$M(\dot{\varphi}) = -k_2(v) \cdot \dot{\varphi}, \tag{4}$$

где $k_2(v)$ – коэффициент, зависящий только от скорости центра масс снаряда, которая в рассматриваемой задаче является постоянной по модулю.

д. Момент $M(\beta)$ – момент от поворота руля, который равен

$$M(\beta) = -k_1(v) \cdot \beta, \tag{5}$$

где $k_1(v)$ – коэффициент, зависящий только от скорости центра масс снаряда, которая в этой задаче постоянная величина; угол β – угол поворота руля.

е. Момент $M(\alpha)$ – момент аэродинамических сил, зависящий от угла скольжения α:

$$M(\alpha) = k_3(v) \cdot \alpha, \tag{6}$$

где $k_3(v)$ – коэффициент, зависящий от модуля скорости центра масс снаряда, который в этой задаче постоянен.

Заметим, что сила тяги и сила тяжести, линии действия которых проходят через центр масс снаряда, моментов относительно последнего не дадут.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения снаряда при преследовании цели по кривой погони (рис.) в проекции на касательную и главную нормаль:

$$m\dot{v} = T\cos\alpha - (C_0 + C_\alpha \alpha^2) v^2, \tag{7}$$

$$mv(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}) = T\sin\alpha + C_L v^2 \alpha, \tag{8}$$

$$I_z \ddot{\varphi} = -k_1(v) \cdot \beta - k_2(v) \cdot \dot{\varphi} + k_3(v) \cdot \alpha, \tag{9}$$

$$\varphi = \alpha + \psi, \tag{10}$$

$$\dot{x} = -v\cos\psi, \tag{11}$$

$$\dot{y} = -v\sin\psi. \tag{12}$$

Из последних двух уравнений с учетом (1) следует

$$\frac{y - y_s}{x} = \frac{dy}{dx}. \tag{13}$$

Если заданы начальные значения переменных и система уравнений (7)–(12) будет проинтегрирована, то будет найден закон изменения угла

поворота руля β, необходимый для осуществления полета снаряда по кривой погони. Одновременно будут найдены и зависимости остальных переменных от времени.

Однако эта нелинейная система дифференциальных уравнений движения снаряда может быть проинтегрирована только приближенно, методами численного интегрирования на ЭВМ, причем эти сложные вычисления должны быть каждый раз заново проделаны для новых начальных условий. Поэтому, используя некоторые упрощения, вполне оправданные с точки зрения практики, покажем, как можно получить решение в замкнутом виде.

Для того чтобы проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (7)–(12), сделаем следующие предположения. Полагая угол скольжения α малым, заменим соответственно $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$; получим с точностью до величины первого порядка малости включительно вместо уравнений (7) и (8)

$$m\dot{v} = T - C_0 v^2, \tag{14}$$

$$mv(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}) = T\alpha + C_L v^2 \alpha. \tag{15}$$

Сила тяги T постоянна по модулю. В этом случае из уравнений (14) следует, что скорость центра масс снаряда асимптотически стремится к пределу v_0, причем вскоре после начала движения значение скорости настолько близко к предельному, что движение точки можно считать практически равномерным. Скорость этого движения определяется из уравнения

$$T - C_0 v_0^2 = 0, \tag{16}$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{T}{C_0}}. \tag{17}$$

Так как полету снаряда по кривой погони предшествует полет по другой кривой, то можно считать, что к моменту перехода снаряда на кривую погони его скорость уже достигла значения v_0, и дальше снаряд продолжает свой полет с этой постоянной по модулю скоростью. Тогда система дифференциальных уравнений, определяющих движение снаряда, примет вид

$$mv(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}) = T\alpha + C_L v_0^2 \alpha, \tag{18}$$

$$I_z\ddot{\varphi} = -k_1(v)\cdot\beta - k_2(v)\cdot\dot{\varphi} + k_3(v)\cdot\alpha, \tag{19}$$

$$\varphi = \alpha + \psi, \tag{20}$$

$$\dot{x} = -v_0\cos\psi, \tag{21}$$

$$\dot{y} = -v_0\sin\psi. \tag{22}$$

Дифференциальные уравнения (21), (22) вместе с уравнениями (1) и (13) независимы и могут быть проинтегрированы. Эта кинематическая задача подробно разобрана в I томе этой книги (задача 5.28). Там получено (вводим обозначение $v_s/v_0 = k$)

$$\dot{\psi} = -\frac{v_s}{x_0}\left(\frac{\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0}{\sec\psi + \operatorname{tg}\psi}\right)^{1/k}\cos^2\psi. \qquad (23)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{k}{2(1+k)}\left[(\operatorname{tg}\psi + \sec\psi)^{1/k+1} - (\operatorname{tg}\psi_0 + \sec\psi_0)^{1/k+1}\right] +$$

$$+\frac{k}{2(1-k)}\left[(\operatorname{tg}\psi + \sec\psi)^{1/k-1} - (\operatorname{tg}\psi_0 + \sec\psi_0)^{1/k-1}\right] =$$

$$= -\frac{v_s}{x_0}(\operatorname{tg}\psi_0 + \sec\psi_0)^{1/k}t. \qquad (24)$$

Это уравнение дает закон изменения угла ψ с течением времени. Оно является уравнением движения точки по кривой погони. Из этого уравнения однозначно определяется положение точки в любой момент времени.

Если положить в уравнении (24) угол $\psi = -90°$, что соответствует моменту поражения цели (см. упомянутую задачу 5.28 из I тома) можно определить время преследования цели по кривой погони. Для определения этого времени T_1 представим уравнение (24) в виде

$$\frac{1-k\sin\psi}{\cos\psi}\left[\frac{\cos\psi}{\cos\psi_0}\,\frac{1-\sin\psi_0}{1-\sin\psi}\right]^{1/k} - \frac{1-k\sin\psi_0}{\cos\psi_0} =$$

$$= -\frac{v_0}{x_0}(1-k^2)\,t. \qquad (25)$$

Из этого уравнения конечное значение времени T_1 определяется непосредственно. При $\varphi = -90°$ находим

$$T_1 = \frac{x_0}{v_0\cos\psi_0}\left[\frac{1-k\sin\psi_0}{1-k^2}\right]. \qquad (26)$$

Для определения угла α подставим в уравнение (18) значение $\dot{\psi} = \dot{\varphi} - \dot{\alpha}$, полученное в (23):

$$\alpha = -\frac{mv_0v_s}{(T + C_Lv_0^2)x_0}\left[\frac{\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0}{\sec\psi + \operatorname{tg}\psi}\right]^{1/k}\cos^2\psi. \qquad (27)$$

Отсюда находится начальное значение угла скольжения

$$\alpha_0 = -\frac{mv_0 v_s}{(T + C_L v_0^2)x_0} \cos^2 \psi_0. \tag{28}$$

Следовательно, начальный угол отнюдь не является произвольным, а должен удовлетворять уравнению (28).

Из этих уравнений следует, что угол α при избранных системе координат и направлении движения цели всегда отрицателен. Только в этом случае траектория центра инерции будет обращена вогнутостью вверх, как и должно быть при преследовании цели по кривой погони.

Характер изменения угла α весьма важен. Нормальный полет снаряда возможен только при малых углах α. Производная от угла α по времени равна

$$\dot{\alpha} = -\frac{v_s^2}{x_0^2}\left[\frac{\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0}{\sec\psi + \operatorname{tg}\psi}\right]^{2/k} \cos^3\psi \cdot \frac{mv_0}{T + C_L v_0^2}\left(2\sin\psi + \frac{1}{k}\right). \tag{29}$$

Знак $\dot{\alpha}$ определяется знаком скобки $(2\sin\psi + 1/k)$.

Если $1/(2k) > 1$, то $2\sin\psi + 1/k > 0$, и α монотонно убывает вплоть до поражения цели. Так как α_0 отрицательно, то абсолютное значение угла скольжения α при этом непрерывно растет. Если же $1/(2k) < 1$, то при $\sin\psi_1 = -1/(2k)$ производная угла скольжения $\dot{\alpha}$ обращается в нуль и после этого значения ψ_1, величина α становится положительной и угол скольжения α растет (уменьшаясь по абсолютной величине) вплоть до поражения цели.

Найдем предельные значения угла α при поражении цели

$$\lim_{\psi \to -90^\circ} \alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } k > 1/2, \\ -\dfrac{4mv_0 v_s}{(T + C_L v_0^2)x_0}(\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0)^2 & \text{при } k = 1/2, \\ \infty & \text{при } k < 1/2. \end{cases}$$

Поэтому при $k \geqslant 1/2$ следует определять значение α_{max}, соответствующее $\sin\psi_1 = -1/(2k)$. Если же $k < 1/2$, то следует определять значение максимально допустимого угла скольжения α и соответствующее ему расстояние между снарядом и целью.

Учитывая далее, что $\varphi = \alpha + \psi$, находим закон изменения угла φ:

$$\varphi = -\frac{mv_0 v_s}{(T + C_L v_0^2)x_0}\left[\frac{\sec\psi_0 + \operatorname{tg}\psi_0}{\sec\psi + \operatorname{tg}\psi}\right]^{1/k} \cos^2\psi + \psi. \tag{30}$$

Начальное значение угла рыскания φ определяется из уравнения (30):

$$\varphi_0 = -\frac{mv_0 v_s}{(T + C_L v_0^2) x_0} \cos^2 \psi_0 + \psi_0. \tag{31}$$

Переходим к определению угла поворота руля β. Определяем первую производную от угла φ по времени:

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_s}{x_0} \left[\frac{\sec \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_0}{\sec \psi + \operatorname{tg} \psi} \right]^{1/k} \cos^2 \psi -$$

$$-\left(\frac{v_s}{x_0}\right)^2 \frac{mv_0}{T + C_L v^2} \left[\frac{\sec \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_0}{\sec \psi + \operatorname{tg} \psi} \right]^{2/k} \cos^3 \psi \cdot \left(2 \sin \psi + \frac{1}{k}\right). \tag{32}$$

Вторая производная от угла φ по времени равна

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mv_0}{T + C_L v_0^2} \left(\frac{v_s}{x_0}\right)^3 \left[\frac{\sec \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_0}{\sec \psi + \operatorname{tg} \psi} \right]^{3/k} \times$$

$$\times \cos^4 \varphi \left[8 \sin^2 \psi + \frac{7}{k} \sin \psi + \frac{2 - 2k^2}{k^2} \right] -$$

$$-\left(\frac{v_s}{x_0}\right)^2 \left[\frac{\sec \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_0}{\sec \psi + \operatorname{tg} \psi} \right]^{2/k} \cos^3 \psi \left(2 \sin \psi + \frac{1}{k}\right). \tag{33}$$

Пользуясь найденными значениями α, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$, находим из уравнения (19) закон изменения угла поворота руля направления β, соответствующий преследованию цели по кривой погони:

$$\beta = -\frac{v_s}{x_0 k_1(v)} \left[\frac{mv_0}{T + C_L v_0^2} k_3(v) - k_2(v) \right] \left[\frac{\sec \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_0}{\sec \psi + \operatorname{tg} \psi} \right]^{1/k} \cos^2 \psi +$$

$$+\left(\frac{v_s}{x_0}\right)^2 \frac{1}{k_1(v)} \left[\frac{mv_0}{T + C_L v_0^2} k_2(v) + I_z \right] \left[\frac{\sec \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_0}{\sec \psi + \operatorname{tg} \psi} \right]^{2/k} \times$$

$$\times \cos^3 \psi \cdot \left(2 \sin \psi + \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{v_s}{x_0}\right)^3 \frac{I_z}{k_1(v)} \frac{mv_0}{T + C_L v_0^2} \left[\frac{\sec \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_0}{\sec \psi + \operatorname{tg} \psi} \right]^{3/k}$$

$$\times \cos^4 \psi \cdot \left[8 \sin^2 \psi + \frac{7}{k} \sin \psi + \frac{2 - 2k^2}{k^2} \right]. \tag{34}$$

Уравнение (34) позволяет ответить на вопрос: сможет ли при заданных начальных условиях и постоянных величинах, характеризующих динамику снаряда и скорость цели, снаряд осуществить полет по кривой погони? Или в процессе преследования цели угол поворота руля станет равным пре-

дельному углу, руль дойдет до упора, снаряд, сойдя с кривой погони, начнет двигаться по дуге окружности, соответствующей наименьшему возможному радиусу кривизны траектории центра масс снаряда?

Три сомножителя, входящие в формулу (34):

$$\frac{\cos^2\psi}{(\sec\psi+\operatorname{tg}\psi)^{1/k}},\quad \frac{\cos^3\psi}{(\sec\psi+\operatorname{tg}\psi)^{2/k}},\quad \frac{\cos^4\psi}{(\sec\psi+\operatorname{tg}\psi)^{3/k}},\tag{35}$$

обращаются в неопределенность при угле $\psi = -90°$, соответствующему поражению цели.

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, находим

$$\lim_{\psi\to-90°}\frac{\cos^2\psi}{(\sec\psi+\operatorname{tg}\psi)^{1/k}}=\begin{cases}\infty & \text{при } k<1/2,\\ 4 & \text{при } k=1/2,\\ 0 & \text{при } k>1/2,\end{cases}\tag{36}$$

$$\lim_{\psi\to-90°}\frac{\cos^3\psi}{(\sec\psi+\operatorname{tg}\psi)^{2/k}}=\begin{cases}\infty & \text{при } k<2/3,\\ 8 & \text{при } k=2/3,\\ 0 & \text{при } k>2/3,\end{cases}\tag{37}$$

$$\lim_{\psi\to-90°}\frac{\cos^4\psi}{(\sec\psi+\operatorname{tg}\psi)^{3/k}}=\begin{cases}\infty & \text{при } k<3/4,\\ 16 & \text{при } k=3/4,\\ 0 & \text{при } k>3/4.\end{cases}\tag{38}$$

Таким образом, вблизи цели угол поворота руля β стремится к нулю, если $k > 3/4$. В противном случае (при $k < 3/4$) угол поворота руля вблизи цели неограниченно возрастает.

Задача о математически точном попадании снаряда в цель решена. Однако на практике цель имеет конечные размеры, а снаряд, как правило, снабжается целедистанционным взрывателем, который приходит в действие при сближении снаряда с целью на определенное расстояние.

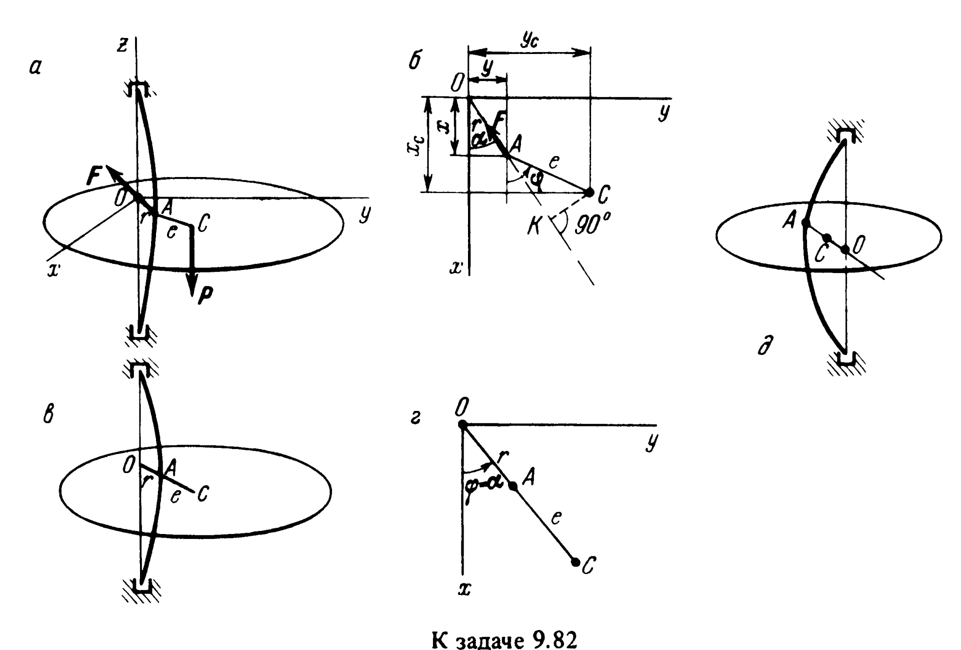
Задача 9.82. Определить закон движения турбинного диска массой M, эксцентрично насаженного в середине вертикального упругого вала (рис.).

Сила упругости вала пропорциональна его прогибу. Коэффициент упругости равен c, e — эксцентриситет турбинного диска. В начальный момент диску была сообщена угловая скорость ω. Силами сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. При вращении турбинного диска вал изгибается. Будем считать, что диск посажен в середине вала без перекоса; тогда его движение будет происходить в горизонтальной плоскости, и поэтому следует применить дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Проведем вертикальную ось z через опоры упругого вала, т.е. совместим ее с геометрической осью вращения диска. Выберем начало координат

в точке пересечения оси z с горизонтальной плоскостью диска. Оси x и y расположены в плоскости диска. Пусть, далее, $A(x, y)$ – точка пересечения изогнутой оси вала с плоскостью диска, $C(x_C, y_C)$ – центр инерции диска, $OA = r$ – прогиб вала, $AC = e$ – эксцентриситет (рис. *а*).



К задаче 9.82

Обозначим: α – угол между осью x и направлением OA, φ – угол между осью x и прямой, проходящей через точку A крепления диска к оси и его центр масс C (рис. *б*).

На турбинный диск действуют две внешние силы; $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ – сила тяжести диска и сила упругости вала $\boldsymbol{F}$, приложенная в точке A и направленная от A к O, причем $F = cr$.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения диска:

$$M\ddot{x}_C = -F\cos\alpha, \quad M\ddot{y}_C = -F\sin\alpha, \quad I_C\ddot{\varphi} = -F\cdot|KC|, \tag{1}$$

причем

$$F = cr, \quad r\cos\alpha = x, \quad r\sin\alpha = y, \quad |KC| = |AC|\sin\psi = e\sin(\varphi-\alpha), \tag{2}$$

где $\psi = \angle CAK = \varphi - \alpha$.

Воспользовавшись формулами (2), запишем систему уравнений (1) в виде

$$M\ddot{x}_C = -cx, \quad M\ddot{y}_C = -cy, \quad I_C\ddot{\varphi} = -cre\sin(\varphi-\alpha). \tag{3}$$

Как следует из рис. *б*, имеет место следующая зависимость между коорди-

натами точек C и A:

$$x_C = x + e\cos\varphi, \quad y_C = y + e\sin\varphi.$$

Следовательно,

$$\ddot{x}_C = \ddot{x} - e\ddot{\varphi}\sin\varphi - e\dot{\varphi}^2\cos\varphi, \quad \ddot{y}_C = \ddot{y} + e\ddot{\varphi}\cos\varphi - e\dot{\varphi}^2\sin\varphi.$$

Подставив эти значения $\ddot{x}_C$ и $\ddot{y}_C$ в уравнения (3), находим

$$M\ddot{x} - Me\ddot{\varphi}\sin\varphi - Me\dot{\varphi}^2\cos\varphi = -cx,$$

$$M\ddot{y} + Me\ddot{\varphi}\cos\varphi - Me\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -cy,$$

$$I_C\ddot{\varphi} = -cre\sin(\varphi - \alpha),$$

откуда

$$\ddot{x} + \frac{c}{M}x = e\ddot{\varphi}\sin\varphi + e\dot{\varphi}^2\cos\varphi, \qquad \ddot{y} + \frac{c}{M}y = -e\ddot{\varphi}\cos\varphi + e\dot{\varphi}^2\sin\varphi,$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{ec}{I_C}r\sin(\varphi - \alpha). \tag{4}$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (4) весьма затруднительно. Поэтому мы будем решать ее приближенно. В правой части третьего уравнения стоит произведение эксцентриситета e на $\sin(\varphi - \alpha)$. Считая это произведение малым, приближенно приравняем его нулю (ниже будет показано, что совершаемая при этом ошибка невелика). Теперь третье уравнение системы (4) приближенно принимает вид $\ddot{\varphi} = 0$, откуда, учитывая начальные условия движения: при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$, находим $\dot{\varphi} = \omega$ и

$$\varphi = \omega t, \tag{5}$$

т.е. вращение диска совершается равномерно.

Использовав формулу (5), запишем первые два уравнения системы (4) в форме:

$$\ddot{x} + k^2x = h\cos\omega t, \quad \ddot{y} + k^2y = h\sin\omega t, \tag{6}$$

где $c/M = k^2$ и $e\omega^2 = h$.

Интегрирование дифференциальных уравнений (6) проводим независимо друг от друга. Общие решения этих уравнений имеют вид

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2}\cos\omega t,$$

$$y = C_3\cos kt + C_4\sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t, \tag{7}$$

где $k = \sqrt{c/M}$ и $h = e\omega^2$.

Как известно, первые два слагаемых описывают колебания, затухающие при наличии сил сопротивления, а третье слагаемое – установившиеся вынужденные колебания. Поэтому в дальнейшем первые два слагаемых отбросим.

Тогда

$$x = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t, \quad y = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t, \tag{8}$$

т.е. точка A совершает гармонические колебания круговой частотой ω и амплитудой $\dfrac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2}$. После возведения каждого из уравнений (8) в квадрат и суммирования находим

$$x^2 + y^2 = \frac{e^2\omega^4}{(k^2 - \omega^2)^2}.$$

Так как $x^2 + y^2 = r^2$, то прогиб вала будет

$$r = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2}. \tag{9}$$

Как следует из рис. *б*, координаты точки A равны $x = r\cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$. Подставив вместо x и y их значения из формул (8) и значение r из формулы (9), имеем $\alpha = \omega t$. Сопоставив этот результат с формулой (5), получим

$$\alpha = \varphi. \tag{10}$$

При выполнении условия $\alpha = \varphi$ точки O, A и C лежат на одной прямой.

При $\alpha = \varphi$ правая часть третьего уравнения системы (4) оказывается *точно* равной нулю. Поэтому ошибка, которую мы совершаем, приближенно считая правую часть третьего уравнения системы (4) равной нулю, получается за счет пренебрежения первыми двумя слагаемыми в каждом из уравнений системы (7). Учитывая затухание свободных колебаний под действием сил сопротивления движению, подобное приближение следует считать вполне допустимым. При точном решении системы дифференциальных уравнений (4) угловая скорость диска $\dot\varphi$ не оказалась бы постоянной и не равнялась бы ω.

Теперь рис. *а* и *б* принимают более простой вид, так как точки O, A и C лежат на одной прямой (см. соответственно рис. *в* и *г*).

Вычислим смещение центра масс C диска от точки O: $OC = r + e$. Подставив значение r из формулы (9), находим

$$OC = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} + e = \frac{ek^2}{k^2 - \omega^2}. \tag{11}$$

В случае вынужденных колебаний малой частоты, т.е. при $\omega < k$, на основании формул (9) и (11) получим $|OC| > r > 0$ (рис. *в* и *г*). В случае вынужденных колебаний большой частоты, т.е. при $\omega > k, r > |OC| > 0$, что соответствует изображению на рис. *д*.

По мере увеличения угловой скорости вращения ω диска расстояние OC (см. формулу (11)) по модулю уменьшается, т.е. диск, насаженный на упругий вал, ***самостоятельно центрируется*** (при $\omega \to \infty$ $|OC| \to 0$), и его центр масс C приближается к геометрической оси вращения.

Перепишем формулу (11) в виде

$$\frac{|OC|}{e} = \frac{k^2}{|k^2 - \omega^2|}.$$

Если угловая скорость вращения турбинного диска значительно больше его круговой частоты собственных колебаний, т.е. $\omega \gg k$, то $|OC|/e$ оказывается весьма малой величиной. Например, при $\omega = 6k$ получим $|OC|/e = 0{,}029$. (При этом следует иметь в виду, что при насадке турбинных дисков на вал эксцентриситет e измеряется микрометрами.)

Явление самостоятельсного центрирования диска на упругом валу было впервые обнаружено в конце XIX века Лавалем и использовано им в конструкции паровой турбины, диск которой совершал до 30 000 об/мин.

В случае $\omega = k$ имеет место явление резонанса и расстояние OC неограниченно возрастает. Конечно, в действительности OC так не растет ввиду наличия сил сопротивления движению. Однако величина OC становится значительной, что угрожает надежности работы конструкции. Резонансная угловая скорость вращения турбинного диска, при которой прогиб вала достигает больших значений называется ***критической угловой скоростью*** гибкого вала, а соответствующее число оборотов вала в минуту – ***критическим числом оборотов***. Так как при резонансе $\omega_{кр} = k$, а $k = \sqrt{c/M}$, то

$$\omega_{кр} = \sqrt{c/M}.$$

Следовательно,

$$n_{кр} = \frac{30}{\pi}\,\omega_{кр} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{c}{M}}.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 39.1–39.7, 39.9, 39.11, 39.13–39.22.

§ 7. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

1. **Работа силы**. *Работой постоянной силы на прямолинейном перемещении* называется скалярное произведение векторов силы и перемещения, т.е. работа равна произведению модуля силы на модуль перемещения и на косинус угла между ними:

$$A = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = F \Delta r \cos(\widehat{\boldsymbol{F}, \Delta \boldsymbol{r}})$$

(M_1 и M_2 – соответственно начальное и конечное положения точки M, $\Delta \boldsymbol{r}$ – вектор перемещения точки (рис. 9.11) при переходе из M_1 в M_2).

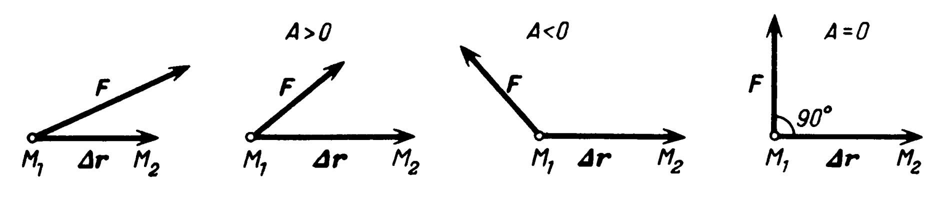


Рис. 9.11

Единица измерения работы в системе СИ – джоуль (Дж). 1 Дж = = 1Н · м.

Элементарная работа переменной силы равна скалярному произведению векторов силы и элементарного перемещения $\delta A = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.

Элементарное перемещение $d\boldsymbol{r}$ направляется по касательной к траектории в данной точке (рис. 9.12). Элементарная работа обозначается δA, а не dA, так как только в частных случаях элементарная работа силы является полным дифференциалом некоторой функции координат (см. ниже случай потенциального поля).

Выражение элементарной работы переменной силы через проекции силы на оси декартовых координат имеет вид

$$\delta A = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz;$$

где

$$\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k} \quad \text{и} \quad d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}.$$

Работа переменной силы на конечном перемещении по произвольной траектории равна криволинейному интегралу, взятому вдоль дуги кривой от M_1 до M_2, от элементарной работы:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F \cdot dr \cos(\widehat{\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}}). \qquad (1^*)$$

Интеграл называется криволинейным, так как осуществляется суммиро-

вание вдоль криволинейной траектории, в разных точках которой касательные элементарные перемещения dr различны по направлению

Выражение работы переменной силы на конечном перемещении по криволинейной траектории через проекции силы на оси декартовых координат имеет вид

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (2^*)$$

Как следует из формулы (2*), непосредственное вычисление интеграла и, следовательно, работы возможно лишь в тех случаях, когда сила постоянна либо зависит от положения точки приложения силы (т.е. ее координат x, y, z). Если же сила зависит от скорости или ускорения точки, либо от времени, то непосредственно вычислить работу силы нельзя (при этом имеется в виду, что закон движения точки приложения силы неизвестен).

Вычисление работы сил при движении материальной точки в потенциальном силовом поле дано в п. 6 настоящего параграфа.

При приложении системы сил к точкам материальной системы работа равна сумме элементарных работ всех сил, т.е.

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} (F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k)$$

и

$$A = \sum_{k=1}^{n} \int_{(M_{1k})}^{(M_{2k})} (F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k),$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекция главного вектора сил, действующих на k-ю точку системы.

Теорема о работе равнодействующей силы: работа равнодействующей сил приложенных к точке, на конечном перемещении равна сумме работ сил системы на том же перемещении

$$A(R) = \sum_{k=1}^{n} A(F_k), \quad \text{где } R = \sum_{k=1}^{n} F_k,$$

Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, вычисляется по следующим формулам:

а) *при поступательном движении*: $\delta A = V \cdot dr$, где V – главный вектор системы сил, dr – элементарное перемещение любой из точек твердого тела;

б) *при вращении вокруг неподвижной оси*: $\delta A = m_z d\varphi$, где m_z – главный момент системы сил относительно оси вращения z, $d\varphi$ – элементарное угловое перемещение твердого тела;

в) *при плоском движении:* $\delta A = V \cdot dr_O + m_{zO} d\varphi$, где V – главный вектор системы сил, dr_O – элементарное перемещение полюса O, m_{zO} – главный момент системы сил относительно оси z, проходящей через полюс O перпендикулярно плоскости движения, $d\varphi$ – элементарное угловое перемещение вокруг этой оси. (Полюс O выбирается произвольно.)

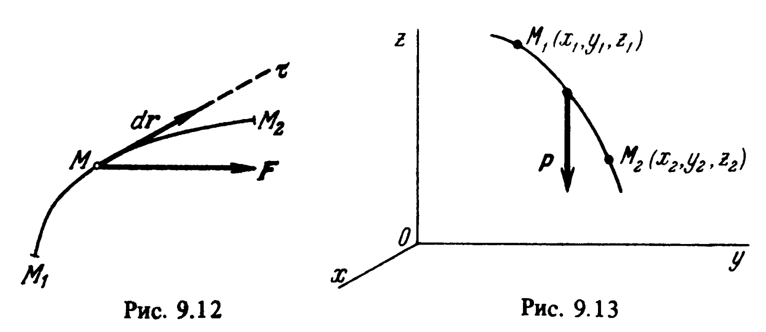


Рис. 9.12 Рис. 9.13

Элементарная работа внешних сил, приложенных к неизменяемой системе, вычисляется по приведенным выше формулам.

Элементарная работа внутренних сил неизменяемой системы материальных точек (например, абсолютно твердого тела) *равна нулю:* $\sum_{k=1}^{n} \delta A(F_k^i) = 0$. Подчеркнем, что работа внутренних сил в общем случае, в частности в упругом теле (изменяемой системе), не равна нулю.

В ряде случаев для вычисления работы сил удобнее использовать готовые формулы. Некоторые из них приводятся ниже.

Работа силы тяжести материальной точки равна произведению силы тяжести на разность высот начального и конечного положений точки (Δh), т.е. $A = P \cdot \Delta h$ (рис. 9.13). Если материальная точка приближается к земной поверхности, то $A(P) > 0$. Если материальная точка отдаляется от земной поверхности, то $A(P) < 0$. Если высоты начального и конечного положений материальной точки равны (в частности, при движении точки по замкнутому контуру), то $A(P) = 0$.

Следовательно, работа силы тяжести материальной точки зависит от высоты ее начального и конечного положений и не зависит от формы кривой, по которой перемещается материальная точка (см. ниже п. 5).

В случае системы материальных точек работа сил тяжести равна произведению силы тяжести всей системы на разность высот конечного и начального положений центра масс системы:

$$A = -P(z_{2C} - z_{1C}),$$

где $P = \sum_{k=1}^{n} P_k$, а ось z направлена вертикально вверх.

Работа силы упругости определяется формулой (рис. 9.14)

$$A = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2), \qquad (3^*)$$

где x_1 и x_2 – начальное и конечное удлинения пружины, а c – ее коэффициент жесткости.

Работа силы упругости отрицательна, если точка движется в сторону возрастания модуля силы; работа силы упругости положительна, если точка движется в сторону убывания модуля силы.

Если к вертикальной пружине подвешен груз (рис. 8.5) и требуется вычислить работу упругой силы $P = c\Delta_{ст}$ при перемещении груза из положения статического равновесия, принятого за начало координат, то работа упругой силы пружины определяется формулой

$$A = -\frac{c}{2}\left[(\Delta_{ст} + x)^2 - \Delta_{ст}^2\right].$$

Здесь $\Delta_{ст} + x$ – конечное удлинение пружины, $\Delta_{ст}$ – начальное удлинение пружины.

Работа упругих сил при кручении определяется аналогично. Момент упругих сил при угле кручения φ равен

$$m_z = -k\varphi,$$

где коэффициент k зависит от геометрических размеров тела и его упругих свойств.

Работа сил упругости равна

$$A = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} k\varphi \, d\varphi = \frac{k}{2}(\varphi_1^2 - \varphi_2^2).$$

Угол φ равен углу, на который закручено сечение упругого вала по отношению к недеформированному сечению.

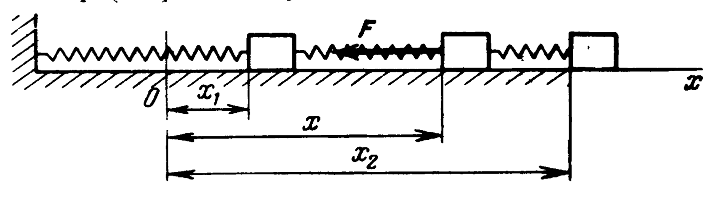


Рис. 9.14

Мощность характеризует быстроту совершения работы с течением времени и определяется формулой

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

В случае силы $\boldsymbol{P}$, приложенной к некоторой точке, мощность равна $N = \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ – скорость точки. В случае момента m, приложенного к твердому телу, вращающемуся с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, мощность будет $N = m\omega$.

Единица измерения мощности в системе СИ – ватт (Вт); 1 Вт = 1 Дж/с.

Вычисление суммы работ сил, приложенных к материальной точке либо к материальной системе, является одним из этапов решения задач, в которых применяется теорема об изменении кинетической энергии либо составляются уравнения Лагранжа второго рода (см. ниже, гл. 10, § 6).

Указание. Вычисление суммы работ сил надо выполнять в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке либо к материальной системе;

2) изобразить элементарные перемещения точек системы;

3) вычислить элементарную работу сил, т.е. сумму работ всех сил на элементарных перемещениях точек системы;

4) вычислить искомую сумму работ сил на конечных перемещениях как сумму определенных интегралов, взятых в соответствующих пределах от элементарных работ, вычисленных в предыдущем пункте.

При наличии сил тяжести и сил упругости можно, минуя три последних пункта, выбрав систему координат, вычислить работу этих сил на конечных перемещениях по вышеприведенным формулам.

Задача 9.83. При движении математического маятника нить его в начальном положении составляла с вертикалью угол φ_1, а в конечном положении – угол φ_2 (причем $\varphi_2 > \varphi_1$) (рис.).

Вычислить сумму работ сил, приложенных к маятнику на этом угловом перемещении, если M – его масса и l – длина нити. Направление положительного отсчета угла поворота φ указано на рисунке.

Решение. К маятнику приложены две силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ – сила тяжести и реакция нити $\boldsymbol{R}$. Следовательно, искомая сумма работ сил имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = A(\boldsymbol{P}) + A(\boldsymbol{R}). \tag{1}$$

Так как реакция нити $\boldsymbol{R}$ направлена вдоль нити и во время движения маятника перпендикулярна элементарному перемещению $d\boldsymbol{r}$, направленному по касательной к траектории в данной точке, то работа реакции нити равна нулю:

$$A(\boldsymbol{R}) = 0. \tag{2}$$

Работа силы тяжести $\boldsymbol{P}$ отрицательна, так как точечная масса маятника поднимается вверх $A(\boldsymbol{P}) = -P\Delta h$. Разность высот конечного и начального

положений точечной массы маятника:

$$\Delta h = A_1 A_2 = OA_1 - OA_2 = l(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2),$$

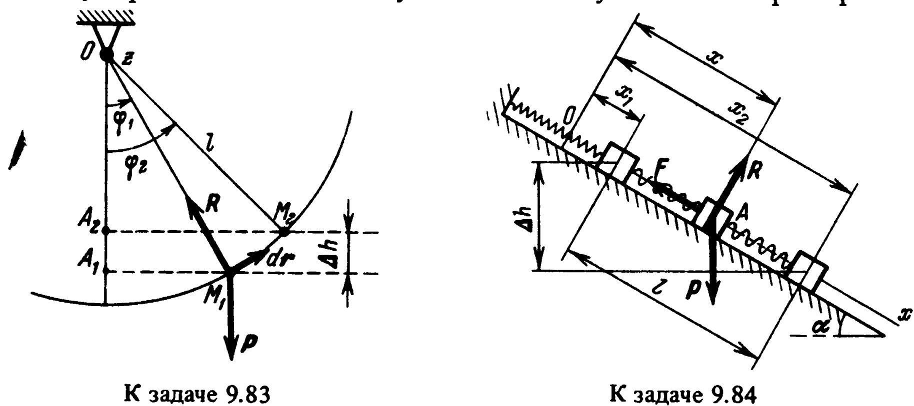
следовательно,

$$A(\mathbf{P}) = -Pl(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2). \tag{3}$$

Подставив значения $A(\mathbf{R})$ и $A(\mathbf{P})$ из формул (2) и (3) в формулу (1), находим искомую сумму работ сил:

$$\Sigma A_k = -Pl(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) = -Mgl(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Эту задачу можно было также решить, вычисляя сумму работ сил при вращении маятника вокруг оси z, проходящей через точку привеса O перпендикулярно к плоскости рисунка. В этом случае элементарная работа сил



К задаче 9.83

К задаче 9.84

равна $\delta A = m_z d\varphi$, где m_z — главный момент относительно оси вращения z сил, приложенных к точечной массе. Учитывая, что момент реакции нити $\mathbf{R}$ относительно оси z равен нулю, а момент силы $\mathbf{P}$ относительно оси z равен $-Pl\sin\varphi$ (момент отрицателен, так как его направление противоположно направлению положительного отсчета угла поворота φ), получим $m_z = -Pl\sin\varphi$ и, следовательно, $\delta A = m_z d\varphi = -Pl\sin\varphi\, d\varphi$.

Для вычисления искомой работы следует взять определенный интеграл по φ в пределах от φ_1 до φ_2:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} m_z d\varphi = -Pl \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi d\varphi = -Pl(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Задача 9.84. Груз A удерживается в равновесии на наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, посредством пружины, ось которой параллельна линии наибольшего ската наклонной плоскости (рис.). Вследствие полученного толчка груз переместился вниз вдоль наклонной плоскости на l.

Вычислить сумму работ сил, приложенных к грузу A на этом перемещении, если коэффициент упругости (жесткости) пружины равен c. Силой трения скольжения груза A о наклонную плоскость пренебречь.

Решение. К грузу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P}$ – его сила тяжести, $\boldsymbol{F}$ – сила упругости пружины, $\boldsymbol{R}$ – нормальная реакция наклонной плоскости.

Направим параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости ось x, выбрав начало отсчета O в конце недеформированной пружины.

В положении равновесия груза пружина растянута на $\Delta_{ст}$. Записав сумму проекций всех сил, приложенных к грузу, на ось x, находим $P\sin\alpha - F_{ст} = 0$. Так как модуль силы упругости при растяжении пружины на $\Delta_{ст}$ равен $F_{ст} = c\Delta_{ст}$, то $P\sin\alpha - c\Delta_{ст} = 0$, т.е.

$$\Delta_{ст} = \frac{P\sin\alpha}{c}. \tag{1}$$

Искомая сумма работ сил имеет вид

$$\Sigma A_k = A(\boldsymbol{P}) + A(\boldsymbol{F}) + A(\boldsymbol{R}). \tag{2}$$

Работа силы тяжести положительна, так как груз A приближается к земной поверхности: $A(\boldsymbol{P}) = P\Delta h$; учитывая, что $\Delta h = l\sin\alpha$, находим

$$A(\boldsymbol{P}) = Pl\sin\alpha. \tag{3}$$

Работа силы упругости пружины определяется формулой

$$A(\boldsymbol{F}) = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2). \tag{3*}$$

Учитывая, что $x_1 = \Delta_{ст}$, а $x_2 = x_1 + l = \Delta_{ст} + l$, находим

$$A(\boldsymbol{F}) = -\frac{cl}{2}(2\Delta_{ст} + l). \tag{4}$$

Работа нормальной реакции $\boldsymbol{R}$ равна нулю, так как эта сила перпендикулярна перемещению груза, направленному вдоль наклонной плоскости

$$A(\boldsymbol{R}) = 0. \tag{5}$$

Подставляя выражения (3), (4) и (5) в формулу (2) и учитывая зависимость (1), находим искомую сумму работ сил, приложенных к грузу:

$$\Sigma A_k = -\frac{cl^2}{2}.$$

Задача 9.85. Колесо радиусом r катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу под действием приложенной в центре

масс C колеса постоянной силы F, параллельной рельсу, и постоянно вращающего момента m (рис.).

Вычислить сумму работ всех внешних сил, если ось колеса C переместилась на s. Трением качения пренебречь.

Решение. К колесу приложены внешние силы и моменты: $P = Mg$ – сила тяжести колеса, F – движущая сила, m – вращающий момент, R – нормальная реакция колеса, $F_{тр}$ – сила трения.

Работа реакции R и силы трения $F_{тр}$ равна нулю, ибо эти силы приложены к точке $\mathcal{P}$, элементарное перемещение которой равно нулю: $dr_{\mathcal{P}} = v_{\mathcal{P}} dt = 0$. Работа силы P равна нулю, так как элементарное перемещение dr_C точки C приложения силы P перпендикулярно этой силе. Таким образом, осталось вычислить работу движущей силы F и момента m. Имеем

$$\delta A = F\, dr_C + m\, d\varphi. \qquad (1)$$

Согласно условию задачи, колесо катится без скольжения. Поэтому

$$dr_C = r\, d\varphi.$$

Соответственно формула (1) запишется так:

$$\delta A = \left(F + \frac{m}{r}\right) dr_C. \qquad (2)$$

К задаче 9.85

Для вычисления искомой суммы работ всех внешних сил остается взять от δA определенный интеграл в пределах от 0 до s:

$$A = \int_0^s \left(F + \frac{m}{r}\right) dr_C = \left(F + \frac{m}{r}\right) s. \qquad (3)$$

В обзоре теории было отмечено, что элементарную работу сил, приложенных к твердому телу, совершающему плоскопараллельное движение, можно вычислить по формуле

$$\delta A = V^e \cdot dr_O + m^e_{z_O} d\varphi,$$

где O – полюс, причем за полюс может быть принята произвольная точка твердого тела, совершающего плоское движение. Для иллюстрации этого положения возьмем за полюс мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$. Тогда элементарную работу всех внешних сил следует вычислять по формуле

$$\delta A = V^e \cdot dr_{\mathcal{P}} + m^e_{z\mathcal{P}} d\varphi. \qquad (4)$$

Так как скорость точки $\mathcal{P}$ колеса равна нулю: $v_{\mathcal{P}} = 0$, а $v_{\mathcal{P}} = dr_{\mathcal{P}}/dt$, то $dr_{\mathcal{P}} = v_{\mathcal{P}}\,dt = 0$, и формула (4) примет вид

$$\delta A = m^e_{z\mathcal{P}}\,d\varphi. \qquad (5)$$

Главный момент внешних сил $m^e_{z\mathcal{P}}$ относительно оси z, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно неподвижной плоскости, равен

$$m^e_{z\mathcal{P}} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} + m.$$

Поэтому формулу (5) можно записать в виде

$$\delta A = (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} + m)\,d\varphi.$$

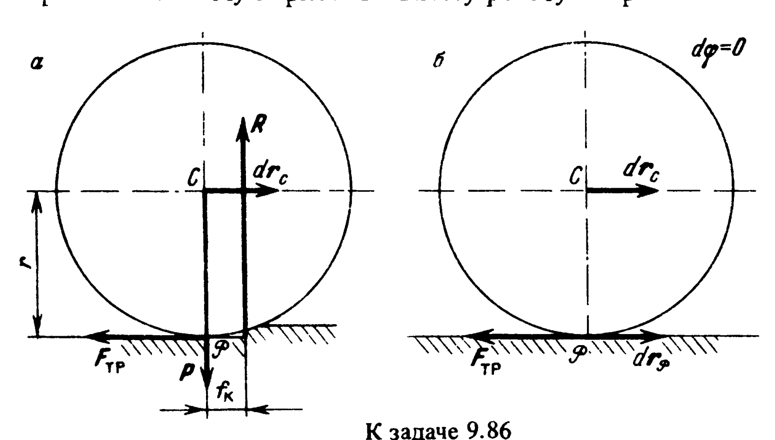
Приняв во внимание, что $dr_C = \boldsymbol{r}\,d\varphi$, находим

$$\delta A = \left(F + \frac{m}{r}\right)dr_C.$$

Это же выражение элементарной работы было получено выше (см. формулу (2)).

Сопоставление обоих вариантов вычисления δA показывает, что целесообразнее принимать за полюс точку $\mathcal{P}$ колеса, так как при этом отпадает необходимость в определении главного вектора V^e внешних сил системы.

Задача 9.86. Ведомое колесо массой M и радиусом r катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу направо.



К задаче 9.86

Вычислить работу силы трения при качении, если центр масс C колеса переместился на s; $f_к$ – коэффициент трения качения.

Решение. Сила трения приложена в точке касания колеса с рельсом и направлена вдоль рельса в сторону, противоположную движению. Нор-

мальная реакция рельса $\boldsymbol{R}$ при наличии трения качения смещается в сторону движения на расстояние, равное коэффициенту трения качения $f_к$ (рис. *а*).

Дадим центру масс C перемещение $d\boldsymbol{r}_C$. При этом колесо повернется на $d\varphi$. При качении без скольжения мгновенный центр скоростей находится в точке $\mathcal{P}$ касания колеса с рельсом. Поэтому $dr_C = r\, d\varphi$, откуда

$$d\varphi = \frac{dr_C}{t}. \tag{1}$$

Приняв за полюс точку $\mathcal{P}$, вычислим элементарную работу сил по формуле

$$\delta A = \boldsymbol{V}^e \cdot d\boldsymbol{r}_{\mathcal{P}} + m^e_{z_{\mathcal{P}}}\, d\varphi. \tag{2}$$

Так как $d\boldsymbol{r}_{\mathcal{P}} = \mathbf{v}_{\mathcal{P}}\, dt = 0$, то формула (2) примет вид

$$\delta A = m^e_{z_{\mathcal{P}}}\, d\varphi, \tag{3}$$

где $m^e_{z_{\mathcal{P}}}$ – главный момент внешних сил относительно оси $z_{\mathcal{P}}$, проходящей через точку $\mathcal{P}$ перпендикулярно плоскости движения колеса (т.е. плоскости рисунка). Имеем

$$m^e_{z_{\mathcal{P}}} = m_{z_{\mathcal{P}}}(\boldsymbol{P}) + m_{z_{\mathcal{P}}}(\boldsymbol{R}) + m_{r_{\mathcal{P}}}(\boldsymbol{F}_{тр}). \tag{4}$$

Линии действия сил $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{F}_{тр}$ пересекают ось $z_{\mathcal{P}}$. Поэтому $m_{z_{\mathcal{P}}}(\boldsymbol{P}) = m_{z_{\mathcal{P}}}(\boldsymbol{F}_{тр}) = 0$. Далее, $m_{z_{\mathcal{P}}}(\boldsymbol{R}) = -Rf_к = -Pf_к$. Использовав эти значения моментов в (4), запишем

$$m^e_{z_{\mathcal{P}}} = -Pf_к. \tag{5}$$

Внеся $d\varphi$ и $m^e_{z_{\mathcal{P}}}$ из формул (1) и (5) в выражение (3), имеем

$$\delta A = -\frac{f_к}{r} P\, dr_C. \tag{6}$$

Для определения искомой работы остается взять определенный интеграл от (6) в пределах от 0 до s. Получим

$$A = -\frac{f_к}{r} Ps.$$

Если бы колесо скользило по рельсу без качения, то оно совершало бы поступательное движение. При этом $d\varphi = 0$, $d\boldsymbol{r}_{\mathcal{P}} = d\boldsymbol{r}_C$ (рис. *б*) и формула (2) приняла бы вид

$$\delta A = \boldsymbol{V}^e \cdot d\boldsymbol{r}_C, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{V}^e$ – главный вектор внешних сил.

Учтя, что $R = -P$, имеем

$$V^e = P + R + F_{тр} = F_{тр}. \quad (8)$$

Внеся значение (8) в формулу (7), получим

$$\delta A = F_{тр} \cdot dr_C = -F_{тр} dr_C. \quad (9)$$

При скольжении колеса сила трения равна $F_{тр} = fR = fP$. Подставив это значение $F_{тр}$ в (9) и взяв определенный интеграл в пределах от 0 до s, находим

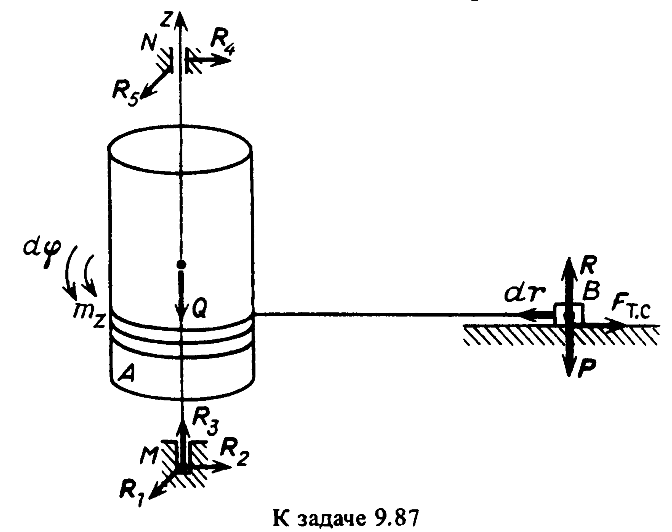
$$A = -fPs = -fMgs,$$

где f – коэффициент трения скольжения.

Задача 9.87. Кабестан, изображенный на рисунке, применяется для перемещения тяжелых грузов. К валу кабестана A при пуске в ход был приложен созданный электромотором вращающий момент

$$m_z = c\varphi + b\varphi^2, \quad (1)$$

где φ – угол поворота вала кабестана, а c и b – постоянные коэффициенты. При вращении вала кабестана массой M и радиусом ρ на его боковую



К задаче 9.87

цилиндрическую поверхность наматывается канат, который перемещает по горизонтальной плоскости груз B.

Вычислить сумму работ всех сил, приложенных к рассматриваемой системе, за два оборота вала, если m – масса груза B, а f – коэффициент трения скольжения груза о горизонтальную плоскость. Массой каната пренебрегаем. Ось z направлена вдоль оси вала.

Решение. Изобразим все силы и моменты, приложенные к системе: Mg – сила тяжести вала кабестана; $\boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_5$ – составляющие реакций опор A и B; mg – сила тяжести груза; $\boldsymbol{F}$ – сила трения скольжения груза о горизонтальную плоскость; $\boldsymbol{R}$ – сила нормальной реакции горизонтальной плоскости; m_z – вращающий момент относительно оси z.

Вал кабестана вращается вокруг неподвижной оси z; следовательно, элементарная работа вращающего момента вычисляется по формуле

$$\delta A_1 = m_z d\varphi = (c\varphi + b\varphi^2) d\varphi. \qquad (2)$$

Моменты сил Mg, $\boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_5$ относительно оси вращения z равны нулю.

Груз B совершает поступательное движение. Следовательно, элементарная работа сил имеет вид $\delta A_2 = \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{V}$ – главный вектор сил, приложенных к грузу B. Силы mg и $\boldsymbol{R}$ перпендикулярны перемещению груза $d\boldsymbol{r}$, и, следовательно, элементарная работа этих сил равна нулю. Таким образом,

$$\delta A_2 = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -fmg\, dr. \qquad (3)$$

В формулах (2) и (3) мы не учитывали работу реакций каната, так как при недеформируемом и постоянно натянутом канате суммы работ этих сил равна нулю.

Складывая (2) и (3), находим

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = (c\varphi + b\varphi^2) d\varphi - fmg\, dr. \qquad (4)$$

Учитывая связь между элементарными перемещениями dr и $d\varphi$, а именно $dr = \rho\, d\varphi$, получим выражение элементарной работы всех сил, приложенных к рассматриваемой системе:

$$\delta A = (c\varphi + b\varphi^2 - fmg\rho) d\varphi. \qquad (5)$$

Для вычисления искомой суммы работ всех сил при двух оборотах вала кабестана следует, воспользовавшись формулой (5), вычислить определенный интеграл в пределах от 0 до 4π:

$$A = \int_0^{4\pi} (c\varphi + b\varphi^2 - fmg\rho) d\varphi = \frac{4\pi}{3}(6\pi c + 16\pi^2 b - 3fmg\rho).$$

Задача 9.88. Определить мощность заряженной частицы, летящей со скоростью $v = 60\,000$ км/с под действием силы электромагнитного поля $F = 5 \cdot 10^{-12}$ Н. Направление силы совпадает с направлением скорости.

Решение. Мощность частицы вычисляем по формуле $N = \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{v}$. Выразим скорость частицы в м/с:

$$v = 6 \cdot 10^4 \text{ см/с} = 6 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 6 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

Тогда мощность равна

$$N = \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{v} = 5 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^7 = 30 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м/с} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 29.2–29.4, 29.6, 29.8, 29.10, 29.11, 29.16.

2. Кинетическая энергия материальной точки и материальной системы. *Кинетическая энергия материальной точки* равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости: $T = \frac{1}{2} mv^2$.

Кинетическая энергия в системе СИ измеряется в джоулях (Дж).

Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетических энергий всех материальных точек системы:

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2.$$

Кинетическая энергия положительна, за исключением случая, когда скорости всех точек одновременно равны нулю.

Кинетическая энергия ранее называлась живой силой. Термин "живая сила" ввел в теоретическую механику Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), немецкий математик, механик, философ, историк и изобретатель. Лейбниц независимо и параллельно с Ньютоном разработал дифференциальное и интегральное исчисление.

По теореме Кёнига кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии всей ее массы, движущейся со скоростью центра масс, и кинетической энергии системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущимся осям координат с началом в центре масс

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_r, \quad \text{где} \quad T_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_{kC}^2$$

(v_{kC} – относительная скорость k-й материальной точки по отношению к центру масс).

Кинетическая энергия твердого тела вычисляется по формулам:

а) *При поступательном движении*: $T = \frac{1}{2} Mv^2$, где M – масса твердого тела, а v – скорость любой его точки.

б) *При вращении вокруг неподвижной оси*: $T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$, где I_z – момент инерции твердого тела относительно оси вращения z, а ω – угловая скорость вращения.

в) *При плоском движении*: $T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2$, где M – масса твердого тела, v_C – модуль скорости его центра масс, I_{zC} – момент

инерции твердого тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, ω – величина мгновенной угловой скорости твердого тела.

В случае плоского движения кинетическую энергию можно также вычислять по формуле $T = \frac{1}{2} I_{\mathscr{P}} \omega^2$, где $I_{\mathscr{P}}$ – момент инерции твердого тела относительно оси $\mathscr{P}$, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения.

Поэтому при движении твердого тела момент инерции $I_{\mathscr{P}}$, вообще говоря, является переменным.

г) *При вращении вокруг неподвижной точки*: $T = \frac{1}{2} I\omega^2$, где I – момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси, ω – модуль мгновенной угловой скорости (так как мгновенная ось меняет свое положение при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, то I является величиной переменной).

Если выбрать начало подвижных координатных осей x, y, z, связанных с твердым телом, в неподвижной точке O, то

$$T = \frac{1}{2} (I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x - 2I_{xy}\omega_x\omega_y),$$

где ω_x, ω_y и ω_z – проекции мгновенной угловой скорости на соответствующие оси координат.

Если оси x, y, z являются главными осями инерции твердого тела в неподвижной точке O, то $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$, и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} (I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2).$$

д) *В общем случае движения твердого тела*: $T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I_C\omega^2$, где M – масса твердого тела, v_C – модуль скорости его центра масс, I_C – его момент инерции относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс, ω – модуль мгновенной угловой скорости.

Если выбрать начало подвижных координатных осей x, y, z в центре инерции C, то

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} (I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x - 2I_{xy}\omega_x\omega_y),$$

где ω_x, ω_y, ω_z – проекции мгновенной угловой скорости на соответствующие координатные оси.

Если оси x, y, z являются главными центральными осями инерции, то $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$ и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} (I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2).$$

Вычисление кинетической энергии материальной системы является одним из этапов решения задач при использовании теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы либо при составлении уравнений Лагранжа второго рода (см. ниже, гл. 10, § 6), либо при вычислении потери кинетической энергии при ударе (см. ниже, гл. 12).

При вычислении кинетической энергии материальной системы следует суммировать кинетические энергии всех масс, входящих в систему, вычисляя кинетическую энергию каждой из масс по формуле, соответствующей движению данной массы (поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение и т.д.). Следует помнить, что кинетическая энергия является величиной положительной независимо от направлений движений масс, входящих в систему.

Задача 9.89. Вычислить кинетическую энергию колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, если M – масса колеса и v_C – скорость его центра масс. Колесо считать сплошным однородным диском (рис.).

Решение. Так как колесо совершает плоское движение, то его кинетическую энергию можно вычислить двумя способами по формулам:

а) $T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC}\omega^2$,

б) $T = \frac{1}{2} I_{z\mathcal{P}}\omega^2$,

где $I_{z\mathcal{P}}$ – момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$ перпендикулярно плоскости движения.

При беглой оценке степени сложности подсчета можно отдать предпочтение варианту б). Однако, как показывают последующие вычисления, объем вычислений по обоим вариантам примерно одинаков.

Вариант а):

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC}\omega^2.$$

Момент инерции диска относительно оси z, проходящей через центр тяжести C перпендикулярно его плоскости, равен $I_{zC} = \frac{Mr^2}{2}$, где радиус

колеса обозначен r. Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{Mr^2}{2} \omega^2 .$$

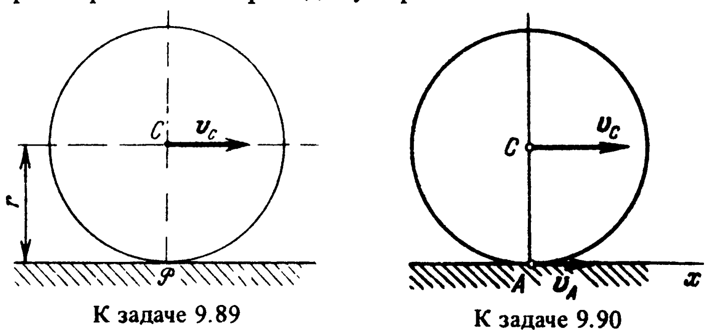
При качении колеса без скольжения мгновенный центр скоростей расположен в точке касания $\mathcal{P}$ колеса и рельса, поэтому $v_C = r\omega$ и формула кинетической энергии принимает вид

$$T = \frac{3}{4} M v_C^2.$$

Вариант б) :

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{P}} \omega^2 .$$

$I_{\mathcal{P}}$ – момент инерции колеса относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$ перпендикулярно плоскости колеса. Так как



К задаче 9.89

К задаче 9.90

оси z_C и $\mathcal{P}$ параллельны, то, применив теорему Штейнера, получим

$$I_{\mathcal{P}} = I_{zC} + Mr^2 = \frac{Mr^2}{2} + Mr^2 = \frac{3}{2} Mr^2 .$$

Теперь находим

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{P}} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} Mr^2 \omega^2 .$$

Учитывая, что $r\omega = v_C$, окончательно имеем

$$T = \frac{3}{4} M v_C^2.$$

Задача 9.90. Решить предыдущую задачу в предположении, что колесо катится со скольжением, причем скорость в точке A касания колеса с рельсом равна половине скорости его центра масс C.

Решение. Для вычисления кинетической энергии колеса по формуле

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC}\omega^2 \qquad (1)$$

необходимо предварительно определить угловую скорость ω колеса. Для этого, приняв за полюс точку A, запишем скорость точки C: $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA}$. В проекции на ось x, направленную вдоль рельса направо (рис.), имеем $v_{Cx} = v_{Ax} + v_{CAx}$, т.е.

$$v_C = \frac{v_C}{2} + r\omega, \qquad (2)$$

где r – радиус колеса. Из уравнения (2) находим

$$\omega = \frac{v_C}{2r}.$$

Подставив это значение ω в формулу (1) и учтя, что $I_{zC} = Mr^2/2$, получим искомое значение кинетической энергии колеса:

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\frac{v_C^2}{4r^2} = \frac{9}{16} Mv_C^2.$$

Задача 9.91. Груз A массой M_1, опускаясь по наклонной плоскости вниз со скоростью v, приводит во вращение барабан B массой M_2 посредством намотанного на него троса. Барабан считать однородным круглым цилиндром. Массой троса пренебречь (рис.).

Вычислить кинетическую энергию системы, выразив ее через скорость груза A.

Решение. Система состоит из двух масс: груза A и барабана B. Следовательно, кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий груза $T^{(1)}$ и барабана $T^{(2)}$:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия груза, движущегося поступательно, вычисляется по формуле

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} M_1 v^2. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси z, перпендикулярной к плоскости рисунка, находится по формуле

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} I_z\omega^2, \qquad (3)$$

где I_z — момент инерции барабана относительно оси вращения z, а ω — угловая скорость вращения барабана. Барабан считаем сплошным однородным круглым цилиндром, поэтому

$$I_z = M_2 \frac{r^2}{2},$$

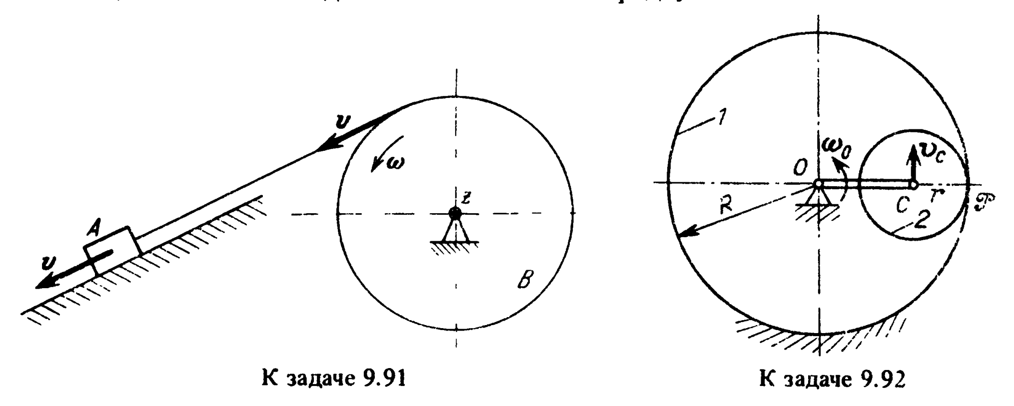
где радиус барабана обозначен r. Подставив это значение I_z в формулу (3), имеем $T^{(2)} = \frac{1}{4} M_2 r^2 \omega^2$. Учитывая, что скорость точки на ободе барабана равна скорости груза, получим $v = r\omega$ и, следовательно,

$$T^{(2)} = \frac{1}{4} M_2 v^2. \qquad (4)$$

После подстановки значений $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ из формул (2) и (4) в (1) находим искомую кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{2M_1 + M_2}{4} v^2.$$

Задача 9.92. Вычислить кинетическую энергию механизма, изображенного на рисунке. Колесо *2* массой m и радиусом r находится во внутреннем зацеплении с неподвижным колесом *1* радиусом $R = 3r$. Колесо *2*



К задаче 9.91 К задаче 9.92

приводится в движение посредством кривошипа OC массой m_1, вращающегося вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, с постоянной угловой скоростью ω_0.

Колесо *2* считать однородным круглым диском, а кривошип OC — тонким однородным стержнем.

Кинетическую энергию выразить через угловую скорость ω_0 кривошипа OC.

Решение. Рассматриваемая система состоит из трех масс – колеса *1*, колеса *2* и кривошипа OC. Поэтому кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий этих масс:

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (1)$$

где T_1 – кинетическая энергия колеса *1*, T_2 – кинетическая энергия колеса *2*, T_3 – кинетическая энергия кривошипа OC.

Колесо *1* неподвижно, поэтому

$$T_1 = 0. \qquad (2)$$

Колесо *2* совершает плоское движение. Его кинетическая энергия равна

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2. \qquad (3)$$

Длина кривошипа равна

$$OC = O\mathcal{P} - C\mathcal{P} = R - r = 2r. \qquad (4)$$

Следовательно, скорость точки C как принадлежащей кривошипу равна

$$v_C = OC \cdot \omega_0 = 2r\omega_0. \qquad (5)$$

Скорость точки C как принадлежащей колесу *2* равна произведению мгновенного радиуса $C\mathcal{P} = r$ на мгновенную угловую скорость ω_2:

$$v_C = r\omega_2. \qquad (6)$$

Приравнивая правые части равенства (5) и (6), находим

$$\omega_2 = \frac{2r\omega_0}{r} = 2\omega_0. \qquad (7)$$

Момент инерции колеса *2*, являющегося однородным круглым диском, относительно оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через центр C, равен

$$I_C = \frac{mr^2}{2}. \qquad (8)$$

Подставляя найденные значения (5), (7), (8) в формулу (3), находим

$$T_2 = \frac{1}{2} m \cdot 4r^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2} 4\omega_0^2 = 3mr^2\omega_0^2. \qquad (9)$$

Кривошип OC вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка. Следовательно, его кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T_3 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2. \qquad (10)$$

Момент инерции однородного тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, равен

$$I_0 = \frac{m_1 l^2}{3} = \frac{m_1 (2r)^2}{3} = \frac{4}{3} m_1 r^2. \tag{11}$$

Внося это значение в формулу (10), находим

$$T_3 = \frac{2}{3} m_1 r^2 \omega_0^2. \tag{12}$$

Согласно (1), (2), (9) и (12), находим кинетическую энергию системы

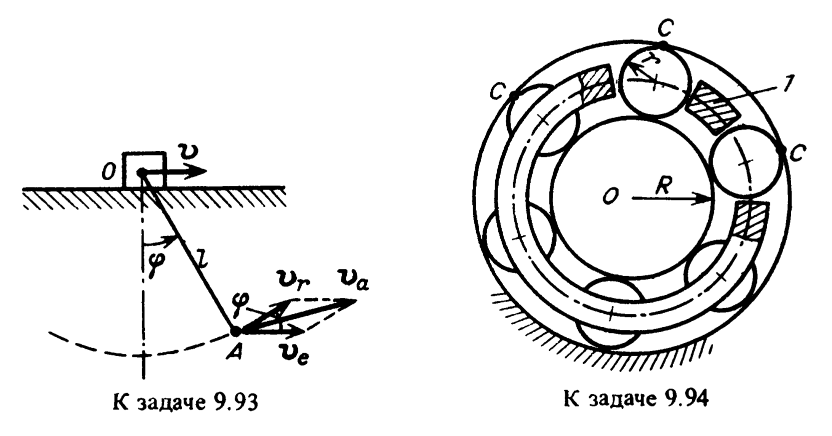
$$T = 3mr^2 \omega_0^2 + \frac{2}{3} m_1 r^2 \omega_0^2 = \frac{9m + 2m_1}{3} r^2 \omega_0^2.$$

Задача 9.93. По горизонтальной плоскости прямолинейно со скоростью $\mathbf{v}$ движется куб массой M. С кубом соединена ось подвеса O математического маятника массой m. Длина нити $OA = l$ (рис.).

Определить кинетическую энергию материальной системы, предполагая известным закон движения маятника: $\varphi = \varphi(t)$.

Вектор $\mathbf{v}$ лежит в плоскости качаний маятника. Массой нити пренебречь.

Решение. Рассматриваемая система состоит из куба и материальной точки A. Следовательно, искомая кинетическая энергия системы T



К задаче 9.93

К задаче 9.94

складывается из T_1 – кинетической энергии куба и T_2 – кинетической энергии материальной точки A:

$$T = T_1 + T_2. \tag{1}$$

Кинетическая энергия куба, движущегося поступательно, равна

$$T_1 = \frac{1}{2} Mv^2. \tag{2}$$

Кинетическая энергия точечной массы A равна

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_A^2, \qquad (3)$$

где v_A – абсолютная скорость точки A. Точка A совершает сложное движение: переносное, поступательное вместе с кубом и относительное, вращательное по отношению к кубу. Следовательно,

$$v_e = v, \quad v_r = l\dot{\varphi}. \qquad (4)$$

Здесь φ – угол поворота маятника.

Применяя теорему о сложении скоростей:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \qquad (5)$$

построим параллелограмм скоростей (рис.). Из параллелограмма скоростей, пользуясь теоремой косинусов, находим

$$v_a^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2 v_e v_r \cos\varphi. \qquad (6)$$

Внося в это уравнение значения v_e и v_r, имеем

$$v_a^2 = v^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2 l\dot{\varphi} v \cos\varphi; \qquad (7)$$

следовательно, кинетическая энергия материальной точки A равна

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{1}{2} m (v^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2 l\dot{\varphi} v \cos\varphi). \qquad (8)$$

Найденные значения T_1 и T_2 из формул (2) и (8) вносим в формулу (1). Тогда кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m l \dot{\varphi} v \cos\varphi.$$

Следует отметить, что кинетическая энергия данной системы зависит не только от скорости точек, но и от положения точек системы (в третьем слагаемом имеется множитель $\cos\varphi$).

Задача 9.94. Вал радиусом R вращается в шариковом подшипнике с постоянной угловой скоростью ω_0. Масса сепаратора *1*, который отделяет друг от друга шарики, равна m. Радиус шариков r (рис.).

Определить кинетическую энергию сепаратора, если внешнее кольцо подшипника закреплено в неподвижной станине машины. Внешний радиус сепаратора r_1, внутренний радиус r_2. Сепаратор рассматривать как полый цилиндр с толщиной стенки, равной $r_1 - r_2$.

Р е ш е н и е. Определим сначала угловую скорость сепаратора. Скорости точек вала и шарика, находящихся в соприкосновении, равны, так как в подшипниках качения при правильной эксплуатации проскальзыва-

ние тех или иных частей подшипника недопустимо (оно ведет к быстрому выходу подшипника из строя). Следовательно, скорость точки вала, соприкасающейся с точкой на поверхности шарика, равна

$$v = \omega_0 R. \tag{1}$$

Мгновенный центр скоростей шарика, совершающего плоское движение, находится в точке C соприкосновения шарика с неподвижным внешним кольцом подшипника. Следовательно, скорость центра шарика v_{O_1} и скорость точки шарика, соприкасающегося с валом, пропорциональны мгновенным радиусам:

$$\frac{v_{O_1}}{v} = \frac{r}{2r}, \tag{2}$$

откуда скорость центра шарика, совпадающая со скоростью центра сепаратора, равна

$$v_{O_1} = \frac{v}{2} = \frac{\omega_0 R}{2}. \tag{3}$$

Угловая скорость сепаратора ω_1 равна линейной скорости его центра, деленной на расстояние до центра O:

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 R}{2(R+r)}. \tag{4}$$

Кинетическая энергия сепаратора, вращающегося вокруг неподвижной оси O, равна

$$T = \frac{I_z \omega_1^2}{2}. \tag{5}$$

Момент инерции сепаратора, являющегося полым цилиндром, равен

$$I_z = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2), \tag{6}$$

где m – масса полого цилиндра-сепаратора.

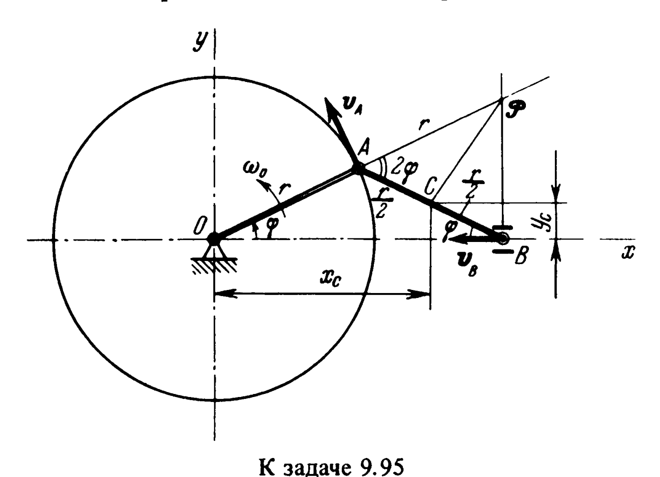
Внося это значение момента инерции и значение ω_1 из (4) в формулу (5), находим окончательно

$$T = \frac{1}{8} m(r_1^2 + r_2^2) \frac{\omega_0 R}{R+r}. \tag{7}$$

Задача 9.95. Вычислить кинетическую энергию кривошипно-ползунного механизма, у которого масса и длина кривошипа OA соответственно

равны массе и длине шатуна AB. Кривошип OA массой M_1 и длиной r вращается с угловой скоростью ω_0. Масса ползуна B равна M_2. Кривошип и шатун считать тонкими прямолинейными однородными стержнями.

Решение. Взяв начало координат на оси кривошипа O, проведем ось x вдоль направляющей ползуна B. Будем отсчитывать угол поворота φ кривошипа OA от оси x против хода часовой стрелки.



К задаче 9.95

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий: $T^{(1)}$ – кривошипа OA, $T^{(2)}$ – шатуна AB и $T^{(3)}$ – ползуна B:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}. \tag{1}$$

Кривошип OA вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, следовательно,

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2;$$

так как $I_O = M_1 \dfrac{r^2}{3}$, то

$$T^{(1)} = \frac{1}{6} M_1 r^2 \omega_0^2. \tag{2}$$

Шатун AB совершает плоское движение. Вычисляем его кинетическую энергию по формуле

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} I_{\mathcal{P}} \omega_{\text{мг}}^2, \tag{3}$$

где $I_{\mathscr{P}}$ – момент инерции шатуна относительно оси $\mathscr{P}$, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения. Мгновенный центр скоростей $\mathscr{P}$ лежит в точке пересечения перпендикуляров, восставленных к скоростям из точек A и B.

Нетрудно видеть, что $A\mathscr{P} = OA = r$. Скорость точки A как конца кривошипа дается формулой

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = r\omega_0. \tag{4}$$

Скорость точки A как точки, лежащей на шатуне AB, совершающем плоское движение, равна

$$v_A = A\mathscr{P} \cdot \omega_{\text{мг}} = r\omega_{\text{мг}}. \tag{5}$$

Сравнив формулы (4) и (5), находим мгновенную угловую скорость шатуна

$$\omega_{\text{мг}} = \omega_0. \tag{6}$$

Для вычисления момента инерции $I_{\mathscr{P}}$ применим теорему Штейнера:

$$I_{\mathscr{P}} = I_C + M_1 (C\mathscr{P})^2, \tag{7}$$

где I_C – момент инерции шатуна AB относительно оси, проходящей через центр масс C шатуна перпендикулярно шатуну:

$$I_C = \frac{M_1 r^2}{12}. \tag{8}$$

Расстояние $C\mathscr{P}$ между параллельными осями вычислим из треугольника $AC\mathscr{P}$; имеем $(C\mathscr{P})^2 = r^2 + \dfrac{r^2}{4} - 2r\dfrac{r}{2}\cos 2\varphi$, т.е.

$$(C\mathscr{P})^2 = \frac{r^2}{4}(5 - 4\cos 2\varphi). \tag{9}$$

Подставив выражения (8) и (9) в формулу (7), находим

$$I\mathscr{P} = \frac{1}{3} M_1 r^2 (4 - 3\cos 2\varphi). \tag{10}$$

Внося значения (6) и (10) в формулу (3), получаем выражение кинетической энергии шатуна AB:

$$T^{(2)} = \frac{1}{6} M_1 r^2 (4 - 3\cos 2\varphi)\omega_0^2,$$

которое после несложных преобразований можно представить в виде

$$T^{(2)} = \frac{1}{6} M_1 r^2 (1 + 6\sin^2\varphi)\omega_0^2. \tag{11}$$

Вычисление кинетической энергии шатуна AB, совершающего плоское движение, можно также произвести по формуле

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M_1 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_{\text{мг}}^2. \qquad (12)$$

Мгновенная угловая скорость шатуна $\omega_{\text{мг}}$ определяется, как и в первом варианте подсчета ($\omega_{\text{мг}} = \omega_0$).

Для вычисления скорости центра масс C шатуна AB запишем координаты точки C. Нетрудно видеть из рисунка, что $x_C = \frac{3r}{2}\cos\varphi$, $y_C = \frac{r}{2}\sin\varphi$.

Взяв производные по времени от x_C и y_C, получим проекции скорости точки C:

$$v_{Cx} = \dot{x}_C = -\frac{3}{2} r\dot{\varphi}\sin\varphi = -\frac{3}{2} r\omega_0 \sin\varphi,$$

$$v_{Cy} = \dot{y}_C = \frac{r}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{r}{2}\omega_0\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$v_C^2 = v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2 = \frac{9}{4} r^2 \omega_0^2 \sin^2\varphi + \frac{r^2}{4}\omega_0^2\cos^2\varphi = \frac{r^2}{4}\omega_0^2 + 2r^2\omega_0^2\sin^2\varphi. \qquad (13)$$

Подставив выражения (6), (8) и (13) в формулу (12), найдем

$$T^{(2)} = \frac{1}{6} M_1 r^2 (1 + 6\sin^2\varphi)\omega_0^2.$$

Объем вычислений, необходимых для подсчетов кинетической энергии шатуна в каждом из вариантов, примерно одинаков.

Переходим к вычислению кинетической энергии ползуна B. Так как ползун движется поступательно, то

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} M_2 v_B^2. \qquad (14)$$

Зная положение мгновенного центра скоростей $\mathcal{P}$ шатуна AB, легко находим скорость ползуна B:

$$v_B = v_A \frac{B\mathcal{P}}{A\mathcal{P}};$$

так как $v_A = r\omega_0$, $A\mathcal{P} = r$, а $B\mathcal{P} = 2r\,|\sin\varphi|$, то

$$v_B = 2r\omega_0\,|\sin\varphi| \tag{15}$$

(v_B можно было бы определить и иначе: записать абсциссу точки B: $x_B = 2r\cos\varphi$ и, взяв производную от x_B по времени, найти проекцию скорости точки B на ось x; $v_{Bx} = \dot{x}_B = -2r\dot{\varphi}\sin\varphi = -2r\omega_0\sin\varphi$).

Вносся значение v_B (15) в формулу (14), находим кинетическую энергию ползуна B:

$$T^{(3)} = 2M_2 r^2\omega_0^2\sin^2\varphi. \tag{16}$$

После подстановки выражений (2), (11) и (16) в формулу (1) получим искомую кинетическую энергию кривошипно-ползунного механизма:

$$T = \frac{r^2\omega_0^2}{3}[M_1 + 3(M_1 + 2M_2)\sin^2\varphi].$$

Задача 9.96. Определить кинетическую энергию твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, пользуясь выражением проекций скорости точек твердого тела на оси декартовых координат, связанные с твердым телом (формулы Эйлера).

Решение. Если начало координат O совпадает с неподвижной точкой, а оси декартовых координат x, y, z жестко связаны с твердым телом, то, как известно из кинематики, формулы Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \tag{1}$$

где x, y, z – координаты точки твердого тела, а ω_x, ω_y, ω_z - проекции угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, на соответствующие оси декартовых координат.

Кинетическая энергия твердого тела вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}\int_{(M)} v^2\,dm, \tag{2}$$

где интегрирование распространено по всей массе твердого тела. Заменяя $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ и используя формулы (1), представим кинетическую энергию в следующей форме:

$$T = \frac{1}{2}\int_{(M)} [(\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2]\,dm. \tag{3}$$

Раскрывая скобки в подынтегральной функции (3) и собирая слагаемые,

содержащие квадраты и произведения проекций угловых скоростей, находим

$$T = \frac{1}{2}\Big[\,\omega_x^2 \int\limits_{(M)} (y^2+z^2)\,dm + \omega_y^2 \int\limits_{(M)} (x^2+z^2)\,dm +$$
$$+\,\omega_z^2 \int\limits_{(M)} (x^2+y^2)\,dm - 2\omega_y\omega_z \int\limits_{(M)} yz\,dm -$$
$$-\,2\omega_z\omega_x \int\limits_{(M)} zx\,dm - 2\omega_x\omega_y \int\limits_{(M)} xy\,dm\,\Big]\,. \qquad (4)$$

Так как сумма квадратов двух координат точки определяет квадрат расстояния от этой точки до третьей оси, то

$$\int\limits_{(M)} (y^2+z^2)\,dm = \int\limits_{(M)} \rho_x^2\,dm = I_x, \qquad (5)$$

$$\int\limits_{(M)} (x^2+z^2)\,dm = \int\limits_{(M)} \rho_y^2\,dm = I_y, \qquad (6)$$

$$\int\limits_{(M)} (x^2+y^2)\,dm = \int\limits_{(M)} \rho_z^2\,dm = I_z. \qquad (7)$$

По определению интегралы от произведений двух координат на дифференциал массы представляют собой центробежные моменты:

$$\int\limits_{(M)} yz\,dm = I_{yz}, \quad \int\limits_{(M)} zx\,dm = I_{zx}, \quad \int\limits_{(M)} xy\,dm = I_{xy}. \qquad (8)$$

Внося значения моментов инерции и центробежных моментов инерции (5) – (8) в формулу (4), находим искомое выражение кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки:

$$T = \frac{1}{2} I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z\omega_z^2 - I_{yz}\omega_y\omega_z - I_{zx}\omega_z\omega_x - I_{xy}\omega_x\omega_y.$$

Задача 9.97. Определить кинетическую энергию колеса радиусом r и массой m, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости наклонно под углом α к этой плоскости. При этом центр колеса C описывает горизонтальную окружность с постоянной по модулю скоростью v (рис.). Радиус инерции колеса относительно его оси равен ρ, а относительно любого диаметра равен $\rho/\sqrt{2}$.

Решение. Продолжим ось колеса до пересечения с горизонтальной плоскостью в точке O. При постоянном наклоне колеса точка O остается неподвижной, и прямая, соединяющая точку O с точкой касания колеса K, является мгновенной осью.

Неподвижным аксоидом будет являться горизонтальная плоскость. Подвижным аксоидом является конус с вершиной в точке O и с основанием в виде колеса.

Выбираем прямую OC за оси z. Тогда кинетическая энергия колеса может быть вычислена по формуле

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2). \qquad (1)$$

Далее находим

$$\omega_z = \omega \sin\alpha, \qquad (2)$$

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \omega^2, \qquad (3)$$

и, следовательно,

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega^2 - \omega_z^2 = \omega^2 \cos^2\alpha. \qquad (4)$$

Чтобы найти мгновенную угловую скорость, воспользуемся выражением для скорости центра колеса $v = \omega b$, где b – кратчайшее расстояние от точки C до мгновенной оси OK, равное $b = r\sin\alpha$. Тогда

$$\omega = \frac{v}{b} = \frac{v}{r\sin\alpha}.$$

Согласно (2),

$$\omega_z^2 = \frac{v^2}{r^2}.$$

Из (4) находим

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \frac{v^2}{r^2} \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Далее, пользуясь значениями радиусов инерции, ищем моменты инерции

$$I_z = m\rho^2, \quad I_x = I_y = \frac{m\rho^2}{2}.$$

Внося эти значения в уравнение (1), находим окончательно

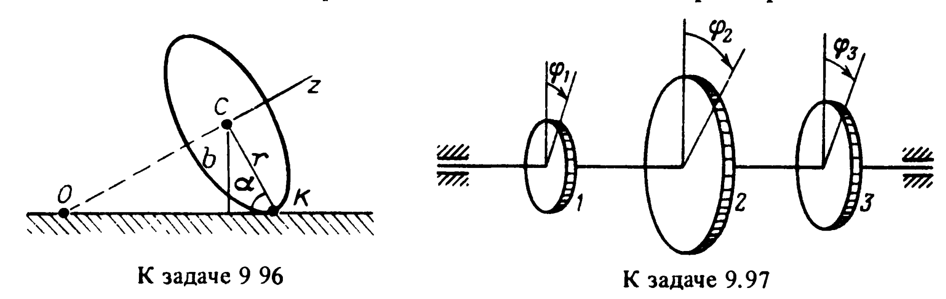
$$T = \frac{1}{2} m v^2 \left(1 + \frac{\rho^2}{2r^2} \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{\rho^2}{r^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 \left(1 + \frac{\rho^2}{2r^2} \frac{1 + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right).$$

Эта задача впервые была рассмотрена Ламбом (1849–1934).

Задача 9.98. На упругий горизонтальный вал насажены три диска *1*, *2* и *3*, моменты инерции которых относительно оси вала соответственно равны I_1, I_2 и I_3. Вследствие упругости вала и в результате его вращения диски поворачиваются на разные углы (рис.).

Зная зависимость углов поворота дисков φ_1, φ_2 и φ_3 от времени, вычислить кинетическую энергию системы. Массой вала пренебречь.



К задаче 9 96 К задаче 9.97

Решение. Кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий трех дисков, т.е.

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}.$$

Так как диски вращаются вокруг неподвижной оси, то

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2, \quad T^{(2)} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2, \quad T^{(3)} = \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2.$$

Следовательно, искомая кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2.$$

Задача 9.99. Груз массой M, подвешенный на однородной пружине массой m, совершает свободные колебания.

Вычислить кинетическую энергию системы, состоящей из груза и пружины. При подсчете кинетической энергии пружины предположить, что смещения точек пружины пропорциональны их расстояниям от точки привеса O (рис.).

Решение. Направим вдоль оси пружины ось s, взяв начало отсчета в точке O привеса пружины. Так как рассматриваемая система состоит из груза и пружины, то ее кинетическая энергия равна

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \tag{1}$$

где $T^{(1)}$ – кинетическая энергия груза, $T^{(2)}$ – кинетическая энергия пружины.

Обозначив через x смещение груза, запишем его кинетическую энергию.

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2. \tag{2}$$

Остается вычислить кинетическую энергию пружины. Введем обозначения: l – длина недеформированной пружины, γ – плотность пружины.

Выделим на расстоянии s элемент пружины длины ds. При свободных колебаниях системы все точки пружины и груз получают смещения. Обозначим через ξ – смещение элемента пружины ds, отстоящего от точки привеса O на расстоянии s. В соответствии с условием задачи, смещения точек пружины пропорциональны их расстояниям от точки привеса O, т.е. $\dfrac{\xi}{x} = \dfrac{s}{l}$, откуда $\xi = \dfrac{s}{l}x$. Взяв производные по времени, найдем $\dot{\xi} = \dfrac{s}{l}\dot{x}$.

К задаче 9.99

Кинетическая энергия элемента пружины длиной dx равна $dT^{(2)} = \dfrac{1}{2}dm\dot{\xi}^2$, где масса элемента пружины $dm = \gamma\, ds$, т.е.

$$dT^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{\gamma\dot{x}^2}{l^2}s^2\,ds. \qquad (3)$$

Кинетическую энергию всей пружины получим, взяв определенный интеграл в пределах от 0 до l:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{\gamma\dot{x}^2}{l^2}\int_0^l s^2\,ds = \frac{1}{6}\gamma l\dot{x}^2;$$

так как масса пружины $m = \gamma l$, то

$$T^{(2)} = \frac{1}{6}m\dot{x}^2. \qquad (4)$$

После подстановки значений $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ из формул (2) и (4) в (1) получим искомое выражение кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{3}m\right)\dot{x}^2.$$

Итак, при приближенном учете массы пружины следует к массе груза добавлять одну треть массы пружины (приближение Рэлея).

Выражение $M + \dfrac{1}{3}m$ называется *приведенной массой*.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 38.1–38.11.

3. **Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме.** Изменение кинетической энергии материальной точки при ее перемещении равно сумме работ, совершенных силами, приложенными к точке, на этом перемещении:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k),$$

или

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 - \frac{1}{2}Mv_1^2 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k).$$

С помощью этой теоремы следует решать задачи в тех случаях, когда в число данных и искомых величин входят: масса M (или сила тяжести P), скорости точки $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ – соответственно в начальный и конечный моменты времени, силы, приложенные к точке, и перемещение точки.

Для вычисления суммы работ сил эти силы должны быть постоянными, либо зависящими от положения точки. Если же силы зависят от скорости или ускорения точки, либо от времени, то нельзя вычислить интегралы для определения работы (при этом предполагается, что закон движения точки неизвестен).

Указание. Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме рекомендуется проводить в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке, т.е. активные силы и реакции связей;

2) вычислить сумму работ всех сил, приложенных к материальной точке, на ее перемещении;

3) вычислить кинетическую энергию материальной точки в ее начальном и конечном положениях;

4) использовав результаты вычислений двух предыдущих пунктов, применить теорему об изменении кинетической энергии материальной точки и определить искомую величину.

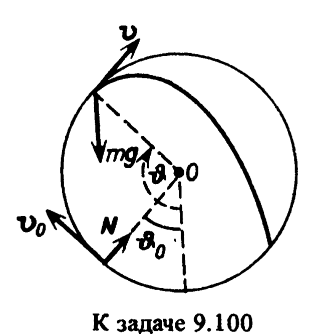
Задача 9.100. Точка массой m движется в вертикальной плоскости по внутренней поверхности цилиндра радиусом r и может сойти с поверхности только внутрь цилиндра. В начальный момент времени точка имела скорость $\mathbf{v}_0$ (рис.), а радиус, соединяющий начальное положение точки с центром круга, образовывал угол ϑ_0 с вертикалью. Пренебрегая трением, определить угол ϑ, при котором точка сойдет с внутренней поверхности круга. Угол ϑ – угол отклонения точки от положения равновесия.

Решение. На точку действуют две силы: сила тяжести mg и нормальная реакция N. При движении точки по внутренней поверхности ци-

линдра элементарная работа сил равна

$$\delta A = -mg\sin\vartheta \cdot ds. \tag{1}$$

Работа нормальной реакции равна нулю, так как она перпендикулярна перемещению, совпадающему с касательной к кругу.



К задаче 9.100

Согласно теореме об изменении кинетической энергии, для точки в дифференциальной форме имеем

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -mg\sin\vartheta \cdot ds = -mg\sin\vartheta \cdot r\,d\vartheta \tag{2}$$

так как $ds = r\,d\vartheta$.

Интегрируя (2) в пределах от v_0 до v и от ϑ_0 до ϑ_1, находим

$$v^2 - v_0^2 = 2gr(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0). \tag{3}$$

Но в момент схода точки с поверхности цилиндра реакция поверхности равна нулю и, следовательно, произведение массы на нормальное ускорение должно равняться проекции силы тяжести на нормаль:

$$m\frac{v^2}{r} = -mg\cos\vartheta.$$

Внося это значение v^2 в (3), имеем

$$\frac{v_0^2}{r} + 3g\cos\vartheta - 2g\cos\vartheta_0 = 0.$$

Это уравнение определяет угол ϑ для места схода точки. Сход невозможен, если для $\cos\vartheta$ получается значение, большее единицы.

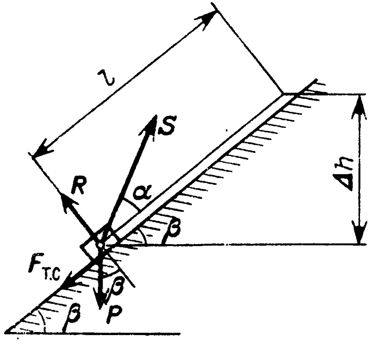
Задача 9.101. Груз весом $P = 20$ Н поднимается по наклонной плоскости при помощи веревки, расположенной под углом $\alpha = 30°$ к наклонной плоскости. Натяжение веревки равно $S = 15$ Н. Наклонная плоскость образует угол $\beta = 30°$ с горизонтом (рис.). В начальном положении груз находился в покое.

Определить перемещение l груза вдоль наклонной плоскости в момент, когда груз имеет скорость $v = 2$ м/с. Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен $f = 0{,}2$.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k). \qquad (1)$$

К грузу приложены: $\boldsymbol{P}$ – сила тяжести груза, $\boldsymbol{S}$ – реакция веревки, $\boldsymbol{R}$ – нормальная реакция наклонной плоскости, $\boldsymbol{F}_{\text{т.с}}$ – сила трения скольжения груза о наклонную плоскость. Сила трения равна произведению коэффициента трения на нормальное давление:



К задаче 9.101

$$F_{\text{т.с}} = fN, \qquad (2)$$

а сила нормального давления равна

$$N = P\cos\beta - S\sin\alpha. \qquad (3)$$

Следовательно, сила трения равна

$$F_{\text{т.с}} = f(P\cos\beta - S\sin\alpha). \qquad (4)$$

Выразим сумму работ всех сил на перемещении груза по наклонной плоскости, равном l:

$$\sum_{k=1}^{n} A(F_k) = A(\boldsymbol{P}) + A(\boldsymbol{S}) + A(\boldsymbol{R}) + A(\boldsymbol{F}_{\text{т.с}}). \qquad (5)$$

Работа силы тяжести отрицательна, так как груз поднимается вверх, и равна (рис.)

$$A(\boldsymbol{P}) = -P\Delta h = -Pl\sin\beta. \qquad (6)$$

Работа реакции веревки равна

$$A(\boldsymbol{S}) = Sl\cos\alpha. \qquad (7)$$

Работа нормальной реакции наклонной плоскости равна нулю, так как реакция $\boldsymbol{R}$ перпендикулярна к перемещению l:

$$A(\boldsymbol{R}) = 0. \qquad (8)$$

Работа силы трения скольжения отрицательна, так как угол между направлениями силы трения и перемещения равен 180°:

$$A(\boldsymbol{F}_{\text{т.с}}) = -F_{\text{т.с}}l = -f(P\cos\beta - S\sin\alpha)l. \qquad (9)$$

Подставляя найденные значения работ отдельных сил (6)–(9) в уравнение (5), находим сумму работ всех сил, приложенных к грузу, на переме-

щении l вдоль наклонной плоскости:

$$\sum_{k=1}^{r} A(F_k) = [S(\cos\alpha + f\sin\alpha) - P(\sin\beta + f\cos\beta)]l. \quad (10)$$

Переходим к вычислению изменения кинетической энергии груза на его перемещении l. В начальном положении груз находился в покое, следовательно, $T_1 = 0$. В конечном положении груз приобрел скорость v, и его кинетическая энергия равна $T_2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$. Итак,

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2. \quad (11)$$

Подставляя значения приращения кинетической энергии (11) и суммы работ всех сил на искомом перемещении l (10) в уравнение (1), находим

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 = [S(\cos\alpha + f\sin\alpha) - P(\sin\beta + f\cos\beta)]l.$$

откуда определяется перемещение груза

$$l = \frac{Pv^2}{2g[S(\cos\alpha + f\sin\alpha) - P(\sin\beta + f\cos\beta)]}.$$

После подстановки числовых данных находим $l = 5{,}1$ м.

Задача 9.102. После прыжка с трамплина лыжник приземлился в точке A, имея горизонтальную скорость v_0. Он проходит горизонтальный участок пути $AB = l$ и далее поднимается по дуге окружности BC (рис.). Радиус дуги r, центральный угол α. В точке C его скорость равна нулю.

Найти горизонтальную скорость лыжника в момент приземления v_0. Коэффициент трения лыж о снег равен f.

Решение. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии. Согласно этой теореме,

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}, \quad (1)$$

где T_2 – кинетическая энергия в конечный момент (она в данной задаче равна нулю, так как лыжник в точке C остановился); T_1 – кинетическая энергия в начальный момент; $A_{1,2}$ – работа сил на этом участке пути.

Кинетическая энергия в начальный момент равна

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_0^2,$$

где P – сила тяжести лыжника с лыжами.

Работа складывается из следующих слагаемых:

$$A_{1,2} = A^1_{1,2} + A^2_{1,2} + A^3_{1,2}.$$

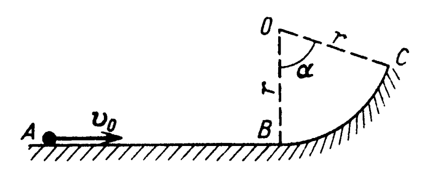
Работа силы трения на горизонтальном участке AB равна

$$A^1_{1,2} = -fPl.$$

Работа силы трения на участке BC равна

$$A^2_{1,2} = -\int_0^\alpha fP\cos\varphi \cdot r\,d\varphi.$$

Здесь $P\cos\varphi$ – нормальная реакция, $r\,d\varphi$ – элемент пути, $fP\cos\varphi$ – сила



К задаче 9.102

трения. Работа силы тяжести на участке BC равна произведению силы тяжести на вертикальное перемещение:

$$A^3_{1,2} = -Pr(1 - \cos\alpha).$$

Внося найденные значения кинетической энергии и работ в уравнение (1), находим

$$-\frac{1}{2}\frac{P}{g}v_0^2 = -fPl \quad fPr\int_0^\alpha \cos\varphi \cdot d\varphi - Pr(1 - \cos\alpha),$$

откуда

$$v_0^2 = 2g\,[r(1 - \cos\alpha) + f(l + r\sin\alpha)].$$

Задача 9.103. Коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью равен f. Известно, что $f < \operatorname{tg}\alpha$. Груз массой m начинает двигаться вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью v_0. Найти, с какой скоростью он вернется в исходную точку.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки к участку s, пройденному грузом вверх по наклонной плоскости до остановки:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = A_1 + A_2, \qquad (1)$$

где A_1 – работа силы тяжести, A_2 – работа силы трения:

$$A_1 = -mgs\sin\alpha, \quad A_2 = -fmgs\cos\alpha.$$

Внося эти значения работ в уравнение (1), находим

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -mgs(\sin\alpha + f\cos\alpha). \qquad (2)$$

Определим из (2) путь, пройденный грузом вдоль наклонной плоскости вверх:

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}. \qquad (3)$$

Движение груза вниз отличается тем, что сила тяжести на этом участке совершает положительную работу. Запишем теорему об изменении кинетической энергии для движения вниз:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgs\sin\alpha - fmgs\cos\alpha.$$

Отсюда вычисляем конечную скорость

$$v_1 = \sqrt{2g(\sin\alpha - f\cos\alpha)s}. \qquad (4)$$

Поскольку нас интересует скорость возврата в исходную точку, подставляем в (4) значение пути (3):

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}} = v_0\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha - f}{\operatorname{tg}\alpha + f}}.$$

Задача 9.104. Три неподвижные точки с равными массами m_1 расположены на одинаковых расстояниях b от точки A. Две точки лежат на вертикали, а одна – на горизонтали (рис.). Эти три точки притягивают точку массой m. Под действием сил притяжения эта точка движется из состояния покоя к точке A. Силы притяжения прямо пропорциональны массам и расстояниям от движущейся точки до каждой из неподвижных точек. Сила притяжения единичных масс на единичном расстоянии равна k.

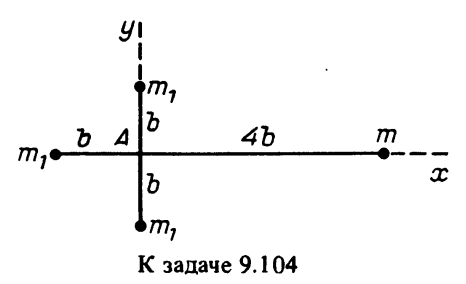
С какой скоростью точка m придет в точку A, если начальное расстояние $Am = 4b$?

Решение. Сила притяжения, действующая на точку m со стороны точки m_1, лежащей на горизонтальной прямой, равна

$$F_1 = -kmm_1(b + x), \qquad (1)$$

где буквой x обозначено переменное расстояние Am.

Силы притяжения, действующие на точку m со стороны двух точек массой m_1, лежащих на вертикали, разложим на составляющие по осям x и y. Ввиду симметрии обе составляющие сил притяжения по оси y уравновешиваются, так как они равны по модулю и направлены по одной прямой



К задаче 9.104

в противоположные стороны. Таким образом, две силы притяжения, действующие на точку m со стороны двух точек m_1, лежащих на оси y, приводятся к одной горизонтальной силе

$$F_2 = -2kmm_1x. \qquad (2)$$

Применим к точке m теорему об изменении кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}. \qquad (3)$$

Здесь

$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2, \quad T_1 = 0. \qquad (4)$$

Внося в уравнение (3) все значения (1), (2), (4), получаем

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_{4b}^{0} kmm_1(b+x)(-dx) + 2\int_{4b}^{0} kmm_1x(-dx),$$

откуда

$$\frac{1}{2}mv^2 = -kmm_1bx\Big|_{4b}^{0} - kmm_1\frac{x^2}{2}\Big|_{4b}^{0} - 2kmm_1\frac{x^2}{2}\Big|_{4b}^{0},$$

или

$$\frac{1}{2}mv^2 = 4kmm_1b^2 + \frac{16}{2}kmm_1b^2 + 16kmm_1b^2.$$

Итак, окончательно находим

$$v^2 = 56km_1b^2.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 30.1, 30.2, 30.4, 30.5, 30.14, 30.16–30.18, 30.20, 30.21.

4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме. Изменение кинетической энергии материальной системы при ее перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил системы на этом перемещении:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(F_k^i). \tag{4*}$$

Это – единственная из четырех общих теорем динамики, в формулировку которой входят не только внешние, но и внутренние силы. Необходимость учитывать работу внутренних сил несколько усложняет решение задачи. Если, однако, требуется определить внутреннюю силу, то решение задачи с помощью общих теорем динамики возможно только при применении теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы.

Покажем на примере, что в случае изменяемой материальной системы сумма работ внутренних сил не равна нулю. Для этого рассмотрим две материальные точки M_1 и M_2, связанные пружиной (рис. 9.15). Пружина может деформироваться вдоль своей оси, т.е. сжиматься или растягиваться. Допустим, что под действием внешних сил точки M_1 и M_2 получили элементарные перемещения dr_1 и dr_2, при наличии которых пружина растягивается. Тогда внутренние силы упругости F_1^i и F_2^i будут направлены друг к другу, причем $F_2^i = -F_1^i$. Если учесть, что соответствующие силы и элементарные перемещения образуют углы, равные 180°, то получим сумму элементарных работ в виде

$$\Sigma \delta A(F_k^i) = F_1^i \cdot dr_1 + F_2^i \cdot dr_2 = -F_1^i dr_1 - F_2^i dr_2,$$

т.е. элементарная работа двух данных внутренних сил (а внутренние силы существуют попарно) отрицательна, а не равна нулю.



Рис. 9.15

В случае абсолютно твердого тела сумма работ внутренних сил равна нулю.

Сумма работ внутренних сил абсолютно гибкой и нерастяжимой нити также равна нулю. В этих случаях теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек принимает вид

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e). \tag{5*}$$

Теорему об изменении кинетической энергии материальной системы следует применять в тех случаях, когда в число данных и искомых величин входят инерционные характеристики системы (массы и моменты инерции), скорости (линейные и угловые), силы и моменты сил, перемещения (линейные и угловые).

Если законы движения точек приложения сил неизвестны, то для вычисления работы силы должны быть постоянными либо зависящими от положений точек приложения сил.

Указание. Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме рекомендуется проводить в такой последовательности:

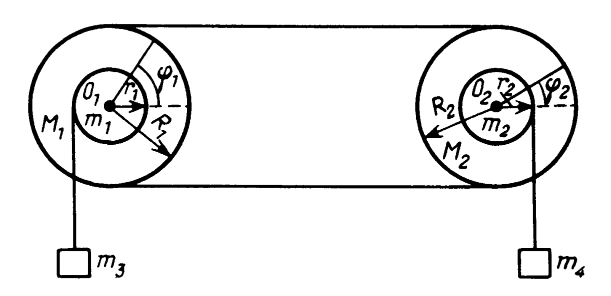
1) изобразить на рисунке все внешние и внутренние силы системы (в случае абсолютно твердого тела – только внешние силы);

2) вычислить сумму работ всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек системы (в случае абсолютно твердого тела – только сумму работ внешних сил);

3) вычислить кинетическую энергию системы материальных точек в начальном и конечном положениях системы;

4) воспользовавшись результатами вычислений пунктов 2) и 3), записать теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек [(4*), стр. 357 или в случае абсолютно твердого тела – по формуле (5*)] и определить искомую величину.

Задача 9.105. Сплошные однородные, скрепленные между собой шкивы массами m_1 и M_1 (радиусами соответственно r_1 и R_1) могут вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O_1. На малый шкив намотана



К задаче 9.105

нить, к концу которой прикреплен груз массой m_3. На шкив радиусом R_1 надет нерастяжимый ремень, соединяющий его со сплошным однородным шкивом массой M_2 и радиусом R_2. На той же горизонтальной оси насажен скрепленный с этим шкивом сплошной однородный шкив массой m_2 и радиусом r_2 с намотанной на нем нитью, к концу которой подвешен груз массой m_4 (рис.).

Определить ускорение груза m_4. Массами нитей и ремня и трением в осях пренебречь.

Решение. Будем исходить из принципа сохранения энергии для системы в дифференциальной форме:

$$\frac{dT}{dt} = N. \tag{1}$$

Здесь T – кинетическая энергия системы, а N – мощность всех активных сил.

Поскольку задача, очевидно, одномерная, выберем основную координату, за которую примем перемещение x груза m_4 от его начального положения. Ось x будем считать направленной вниз. Перемещение груза m_3 обозначим через x_3. Поскольку при перемещении груза m_4 вниз груз m_3 перемещается вверх, ось x для груза m_3 направим вверх, с тем чтобы положительному значению x соответствовало положительное значение x_3. Перемещение точек соединительного ремня обозначим через $x_1 = x_2$. Они все одинаковы по модулю (рассматриваются не векторные перемещения, а перемещения вдоль ремня). Углы поворота обоих систем шкивов обозначим соответственно через φ_1 и φ_2. Имеем

$$x_1 = R_1\varphi_1, \tag{2}$$

$$x_2 = R_2\varphi_2. \tag{3}$$

Углы отсчитываются также от начальных положений. С другой стороны,

$$x = r_2\varphi_2, \tag{4}$$

так как шкивы радиусами r_2 и R_2 скреплены и угол их поворота один и тот же. Аналогично

$$x_3 = r_1\varphi_1. \tag{5}$$

Из (3) и (4) имеем

$$x_1 = x_2 = \frac{R_2}{r_2}\,x, \tag{6}$$

а тогда получим из (1)

$$\varphi_1 = \frac{R_2}{R_1}\,\frac{x}{r_2} \tag{7}$$

и из (5)

$$x_3 = \frac{R_2}{R_1}\,\frac{r_1}{r_2}\,x. \tag{8}$$

Исходя из соотношений (2) – (8), находим следующие кинематические соотношения. Поскольку скорость v_4 груза m_4 равна $\dot{x}$, то угловая скорость второй системы шкивов, как следует из (4), равна

$$\omega_2 = \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}}{r_2}. \qquad (9)$$

Угловая скорость первой системы шкивов, как следует из (7), равна

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \frac{R_2}{R_1}\frac{\dot{x}}{r_2}, \qquad (10)$$

и скорость груза m_3, согласно (8),

$$\dot{x}_3 = \frac{R_2}{R_1}\frac{r_1}{r_2}\dot{x}. \qquad (11)$$

Получив выражения для скоростей, можно найти и кинетическую энергию системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \qquad (12)$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 – соответственно кинетические энергии первой и второй систем шкивов и грузов m_3 и m_4. Имеем

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2, \qquad (13)$$

где I_1 – момент инерции первой системы шкивов. Но

$$I_1 = I_{11} + I_{12}, \qquad (14)$$

где

$$I_{11} = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 \qquad (15)$$

– момент инерции большого шкива, рассматриваемого как сплошной диск, и аналогично

$$I_{12} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \qquad (16)$$

– момент инерции малого шкива.

Подставляя (15), (16) в (14), а (14) и (10) в (13), имеем

$$T_1 = \frac{1}{4}(m_1 r_1^2 + M_1 R_1^2)\frac{R_2^2}{R_1^2}\frac{\dot{x}^2}{r_2^2}. \qquad (17)$$

Для второй системы шкивов таким же образом находим

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \tag{18}$$

где

$$I_2 = I_{21} + I_{22}, \quad I_{21} = \frac{1}{2} M_2 R_2^2, \quad I_{22} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2. \tag{19}$$

Используя (19) и (9), из (18) получим

$$T_2 = \frac{1}{4} (m_2 r_2^2 + M_2 R_2^2) \frac{\dot{x}^2}{r_2^2}. \tag{20}$$

Кинетическая энергия груза m_3 равна

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2.$$

Подставляя значение $\dot{x}_3$ из (11), имеем

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{r_1^2}{r_2^2} \dot{x}^2. \tag{21}$$

Наконец, для груза m_4 получим

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 = \frac{1}{2} m_4 \dot{x}^2. \tag{22}$$

Суммируя (17), (20)–(22), находим, согласно (12), кинетическую энергию системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{1}{4} (m_1 r_1^2 + M_1 R_1^2) \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{1}{r_2^2} \dot{x}^2 +$$

$$+ \frac{1}{4} (m_2 r_2^2 + M_2 R_2^2) \frac{\dot{x}^2}{r_1^2} + \frac{1}{2} m_3 \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{r_1^2}{r_2^2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(m_1 r_1^2 + M_1 R_1^2) R_2^2 + (m_2 r_2^2 + M_2 R_2^2) R_1^2 + 2 m_3 R_2^2 r_1^2 + 2 m_1 R_1^2 r_2^2}{R_1^2 r_2^2} \dot{x}^2. \tag{23}$$

Определим теперь мощность активных сил. Очевидно, активных сил только две – силы тяжести грузов m_3 и m_4. Имеем

$$N = N_3 + N_4. \tag{24}$$

Но

$$N_3 = \boldsymbol{F}_3 \cdot \mathrm{v}_3 = -m_3 g \dot{x}_3 = -m_3 g \frac{R_2}{R_1} \frac{r_1}{r_2} \dot{x} \tag{25}$$

(знак минус здесь потому, что сила тяжести груза m_3 и его скорость направлены в противоположные стороны) и

$$N_4 = \boldsymbol{F}_4 \cdot \mathrm{v}_4 = m_4 g \dot{x}. \tag{26}$$

Подставляя (25) и (26) в (24), получаем

$$N = g\left(m_4 - m_3 \frac{R_2 r_1}{R_1 r_2}\right) \dot{x} = g \frac{m_4 R_1 r_2 - m_3 R_2 r_1}{R_1 r_2} \dot{x}. \tag{27}$$

Для определения ускорения груза m_4, т.е. $a_4 = \ddot{x}$ (поскольку груз m_4 движется по оси x), достаточно продифференцировать (23) и подставить вместе с (27) в уравнение (1). Имеем

$$\frac{dT}{dt} = \\ = \frac{1}{2} \frac{(m_1 r_1^2 + M_1 R_1^2) R_2^2 + (m_2 r_2^2 + M_2 R_2^2) R_1^2 + 2m_3 R_2^2 r_1^2 + 2m_4 R_1^2 r_2^2}{R_1^2 r_2^2} \dot{x} \ddot{x}.$$

Подставляя в (1) и сокращая на $\dot{x}$, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{(m_1 r_1^2 + M_1 R_1^2) R_2^2 + (m_2 r_2^2 + M_2 R_2^2) R_1^2 + 2m_3 R_2^2 r_1^2 + 2m_4 R_1^2 r_2^2}{R_1^2 r_2^2} \ddot{x} = \\ = g \frac{m_4 R_1 r_2 - m_3 R_2 r_1}{R_1 r_2}.$$

Отсюда

$$\ddot{x} = \frac{2gR_1 r_2 (m_4 R_1 r_2 - m_3 R_2 r_1)}{(m_1 r_1^2 + M_1 R_1^2) R_2^2 + (m_2 r_2^2 + M_2 R_2^2) R_1^2 + 2m_3 R_2^2 r_1^2 + 2m_4 R_1^2 r_2^2},$$

что и дает искомое ускорение.

Отметим, что если

$$m_4 R_1 r_2 - m_3 R_2 r_1 > 0, \tag{28}$$

то ускорение направлено вниз, если же эта разность меньше нуля, то оно направлено вверх. Если это выражение равно нулю и начальная скорость тоже равна нулю, то система находится в положении равновесия.

Неравенство (28) можно переписать также в виде

$$m_4 > m_3 \frac{R_2}{R_1} \frac{r_1}{r_2} .$$

Отсюда видно, что для того, чтобы масса m_4 начала двигаться вниз из состояния покоя, недостаточно, чтобы она была больше массы m_3: это зависит еще и от соотношения радиусов.

Задача 9.106. Цилиндрическое тело силой тяжести $\boldsymbol{P}$ радиусом r вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью n об/мин (см. рис. к задаче 9.61). Затем тело опускают, пока оно не коснется нижней поверхностью неподвижной негладкой горизонтальной поверхности. Коэффициент трения скольжения f.

Определить число оборотов, которое сделает тело с момента соприкосновения тел до остановки, считая, что сила тяжести тела воспринимается неподвижной плоскостью. Массой оси пренебречь.

Р е ш е н и е. Нормальное давление, оказываемое телом на единицу горизонтальной площади, равно

$$p = \frac{P}{\pi r^2} .$$

Выделим площадь кольца радиусом ρ. Эта площадь равна $\Delta s = 2\pi\rho\, d\rho$. Элементарная сила трения, приложенная к этому кольцу, равна произведению нормального давления на коэффициент трения:

$$fp\Delta s = 2\pi\rho\, d\rho \cdot f \frac{P}{\pi r^2} .$$

Работа элементарной силы трения до остановки равна произведению силы на путь. Путь равен произведению длины окружности на число оборотов:

$$-fp\,\Delta s \cdot 2\rho\pi b = (-fp \cdot 2\rho\pi\, d\rho)\, 2\rho\pi b,$$

где b – число оборотов, которое сделает тело от момента соприкосновения до остановки.

Работа трения на всей площади до остановки равна

$$A = -4\pi^2 fpb \int_0^r \rho^2\, d\rho = -\frac{4}{3}\pi^2 fpbr^3 .$$

Согласно теореме об изменении кинетической энергии,

$$T_2 - T_1 = A. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия в конечный момент времени равна $T_2 = 0$, так как тело остановилось.

Кинетическая энергия тела в начальный момент времени равна

$$T_1 = \frac{1}{2}\,\frac{Mr^2\omega^2}{2} = \frac{1}{4}\,\frac{P}{g}\,r^2\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2,$$

где $M = P/g$ – масса тела. Внося эти значения в уравнение (1), находим

$$-\frac{1}{4}\,\frac{F}{g}\,r^2\,\frac{\pi^2}{900}\,n^2 = -\frac{4}{3}\,\pi^2 fpr^3 b.$$

Отсюда искомое число оборотов, которое тело совершит от момента соприкосновения до остановки, равно

$$b = \frac{3Pn^2}{16g\cdot 900\,fpr} = \frac{1}{4800}\,\frac{\pi rn^2}{gf}.$$

Задача 9.107. Три свободные материальные точки взаимно притягиваются согласно закону всемирного притяжения.

Определить закон движения центра масс этой системы. Найти интеграл энергии системы.

Р е ш е н и е. Обозначим радиусы, соединяющие точки, через r_{12}, r_{23}, r_{31}, а их массы – через m_1, m_2, m_3. Тогда сил взаимодействия между этими тремя точками

$$-\frac{fm_1m_2}{r_{12}^2},\quad -\frac{fm_2m_3}{r_{23}^2},\quad -\frac{fm_3m_1}{r_{31}^2}.$$

Все эти силы являются внутренними по отношению к системе, состоящей из трех точек. Следовательно, никакие внешние силы на систему не действуют. Согласно теореме о движении центра масс,

$$Ma_C = 0,$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$, a_C – ускорение центра масс. Сокращая на массу M и интегрируя, находим, что скорость центра масс сохраняет свой модуль и направление неизменными

$$v_C = \text{const}.$$

Центр масс движется прямолинейно и равномерно.

Переходим к определению интеграла энергии системы.

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + m_3v_3^2\right).$$

Сумма элементарных работ сил взаимодействия, равная

$$\delta A = -\frac{fm_1m_2}{r_{12}^2}dr_{12} - \frac{fm_2m_3}{r_{23}^2}dr_{23} - \frac{fm_3m_1}{r_{31}^2}dr_{31},$$

есть полный дифференциал функции

$$\frac{fm_1m_2}{r_{12}} + \frac{fm_2m_3}{r_{23}} + \frac{fm_3m_1}{r_{31}}.$$

Тогда, согласно теореме об изменении кинетической энергии, интеграл энергии равен

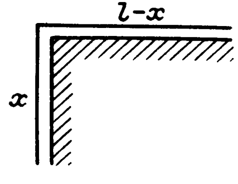
$$\frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + m_3v_3^2) = \frac{fm_1m_2}{r_{12}} + \frac{fm_2m_3}{r_{23}} + \frac{fm_3m_1}{r_{31}} + C,$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

Эту задачу рассматривали немецкий ученый Генрих Брунс (1848–1919), французские математики Анри Пуанкаре (1854–1912) и Поль Пенлеве (1863–1933).

Задача 9.108. Цепь лежит частью на негладком горизонтальном столе. Коэффициент трения цепи о стол равен f. Другая часть цепи свободно висит (рис.). Цепь начинает двигаться вниз из положения равновесия, когда сила трения и сила тяжести свешивающейся части цепи еще уравновешиваются.

Положив начальную скорость равной нулю, определить скорость цепи в момент, когда верхний конец цепи дойдет до края стола.



К задаче 9.108

Р е ш е н и е. Обозначим всю длину цепи буквой l, а длину свешивающейся части x. Найдем прежде всего значение x_1 в положении равновесия, когда уравновешиваются сила тяжести свешивающейся части и сила трения:

$$x_1q = (l - x_1)qf. \tag{1}$$

Здесь q – сила тяжести единицы длины цепи. Решая уравнение (1), находим

$$x_1 = \frac{lf}{1+f}. \tag{2}$$

Применим далее теорему об изменении кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}. \tag{3}$$

Здесь $T_1 = 0$, цепь находилась вначале в покое. Во втором положении кинетическая энергия равна

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{ql}{g}v_2^2, \tag{4}$$

где v_2 – искомая скорость цепи.

Работа переменной силы тяжести и работа переменной силы трения определяются формулами

$$A_{1,2} = \int_{x_1}^{l} qx\,dx - \int_{x_1}^{l} fq(l-x)\,dx. \tag{5}$$

Внося значения кинетической энергии (4) и работы (5) в теорему об изменении кинетической энергии (3), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{ql}{g}v_2^2 = \frac{qx^2}{2}\Bigg|_{x_1}^{l} - fqlx\Bigg|_{x_1}^{l} + fq\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_1}^{l} =$$

$$= \frac{q}{2}(l^2 - x_1^2) - fql(l - x_1) + fq\left(\frac{l^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right). \tag{6}$$

После несложных преобразований правой части (6) находим

$$\frac{1}{2}q\frac{l}{g}v_2^2 = \frac{q}{2}\frac{l^2}{1+f}, \tag{7}$$

откуда

$$v_2^2 = \frac{gl}{1+f}.$$

Задача 9.109. Какой путь s прошла по горизонтальной прямой дороге до остановки автомашина, если в момент выключения мотора она двигалась со скоростью $\mathbf{v}_0$? Масса кузова автомашины с шофером и пассажирами равна M. Масса каждого из четырех колес m. Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости симметрии, равен ρ. Радиус колеса r. Коэффициент трения качения колес о шоссе $f_к$. Колеса автомашины катятся без скольжения. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

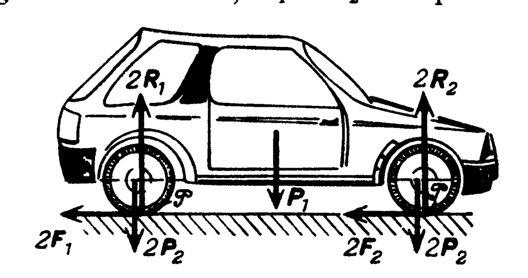
Р е ш е н и е. При движении автомашины направо (рис.) направление положительного отсчета угла поворота колес φ выбираем по ходу часовой стрелки. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы

материальных точек:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(F_k^i), \qquad (1)$$

где F_k^e – внешние силы, F_k^i – внутренние силы, приложенные к системе.

Изображаем внешние силы, приложенные к автомашине (рис.): $P_1 = Mg$ и $P_2 = mg$ – силы тяжести; R_1 и R_2 – нормальные силы реакций,



К задаче 9.109

смещенные относительно центров масс колес в сторону движения на величину коэффициента трения качения $f_к$; F_1 и F_2 – силы трения колес о шоссе, направленные в сторону, противоположную движению (после выключения мотора все колеса автомашины оказываются ведомыми).

Внутренние силы не изображаем, считая автомобиль абсолютно твердым телом и пренебрегая силами внутреннего трения. Следовательно, сумма работ всех внутренних сил равна нулю. Тогда уравнение (1) примет вид

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e). \qquad (2)$$

Сумма работ всех внешних сил системы на искомом перемещении s равна

$$\sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) = A(Mg) + 4A(mg) + 2A(F_1) + 2A(F_2) + 4A(m_{тр}), \qquad (3)$$

где $m_{тр}$ – момент сил трения качения каждого колеса. Коэффициент 4 соответствуют числу колес автомашины.

Рассмотрим каждое слагаемое правой части в отдельности. Так как по условию автомобиль движется по горизонтальной дороге, то разность высот Δh при перемещениях точек приложения сил тяжести равна нулю:

$$A(Mg) = 4A(mg) = 0. \qquad (4)$$

При качении колес без скольжения их мгновенные центры скоростей

$\mathscr{P}$ находятся в точках касания. Силы трения всегда приложены к колесам в точках, совпадающих с мгновенными центрами скоростей $\mathscr{P}$, и перемещаются вместе с ними. Мощность этих сил трения, вычисляемая по формуле

$$N = F_1 v_{\mathscr{P}} = F_2 v_{\mathscr{P}} = 0, \qquad (5)$$

равна нулю, так как $v_{\mathscr{P}} = 0$. Следовательно, работа сил трения на конечном перемещении, равная интегралу от мощности по времени, тоже равна нулю:

$$2A(F_1) = 2A(F_2) = 0. \qquad (6)$$

Учитывая, что радиусы колес и коэффициенты трения качения для всех четырех колес одинаковы, приводим вычисление суммы работ пар трения качения к одному колесу, считая нормальное давление равным $Mg + 4mg$.

Так как коэффициент трения качения $f_к$ является плечом пары трения качения, то момент пары трения качения равен

$$m_{тр} = (Mg + 4mg) f_к. \qquad (7)$$

Элементарная работа пары трения равна

$$4\delta A(m_{тр}) = -m_{тр}\, d\varphi = -(Mg + 4mg) f_к\, d\varphi. \qquad (8)$$

Работа отрицательна, так как направление момента пары трения качения противоположно направлению угла поворота колес φ. В формуле (8) $d\varphi$ – элементарное угловое перемещение колеса вокруг мгновенного центра скоростей $\mathscr{P}$.

Учтем, что $d\varphi$ связано с элементарным перемещением ds центра масс колеса C зависимостью

$$ds = r\, d\varphi, \quad \text{или} \quad d\varphi = \frac{ds}{r}. \qquad (9)$$

Подставляя это значение $d\varphi$ в формулу (8), находим

$$4\delta A(m_{тр}) = -(Mg + 4mg)\frac{f_к}{r}\, ds. \qquad (10)$$

Для вычисления суммарной работы пары трения качения на конечном перемещении центра масс колеса C необходимо вычислить от выражения (10) определенный интеграл в пределах от 0 до s. После вычислений находим

$$4A(m_{тр}) = -(Mg + 4mg)\frac{f_к}{r}\, s. \qquad (11)$$

Учитывая, что работа всех остальных сил согласно (4)–(6) равна нулю,

находим сумму работ всех внешних сил, приложенных к автомашине на ее перемещении, равном s:

$$\sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) = -(Mg + 4mg)\frac{f_к}{r}s. \tag{12}$$

Переходим к вычислению кинетической энергии автомашины в ее начальном и конечном положениях. Так как в конечном положении, т.е. в момент остановки, скорости всех точек равны нулю, то

$$T_2 = 0. \tag{13}$$

Запишем кинетическую энергию T_1 автомашины, состоящей из пяти масс – кузова с шофером и пассажирами и четырех колес:

$$T_1 = T_{11} + T_{12}. \tag{14}$$

Кузов с шофером и пассажирами совершает поступательное движение; следовательно,

$$T_{11} = \frac{1}{2}Mv^2. \tag{15}$$

Колеса совершают плоское движение, поэтому их кинетическая энергия равна

$$T_{12} = 4\left(\frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2\right), \tag{16}$$

где $v_C = v$, $I_C = m\rho^2$, $\omega = v/r$. Подставляя эти значения в (16), получаем

$$T_{12} = 4\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\frac{v^2}{r^2}\right) = 2mv^2\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right). \tag{17}$$

Внося значения (15) и (17) в равенство (14), находим кинетическую энергию автомашины в ее начальном положении:

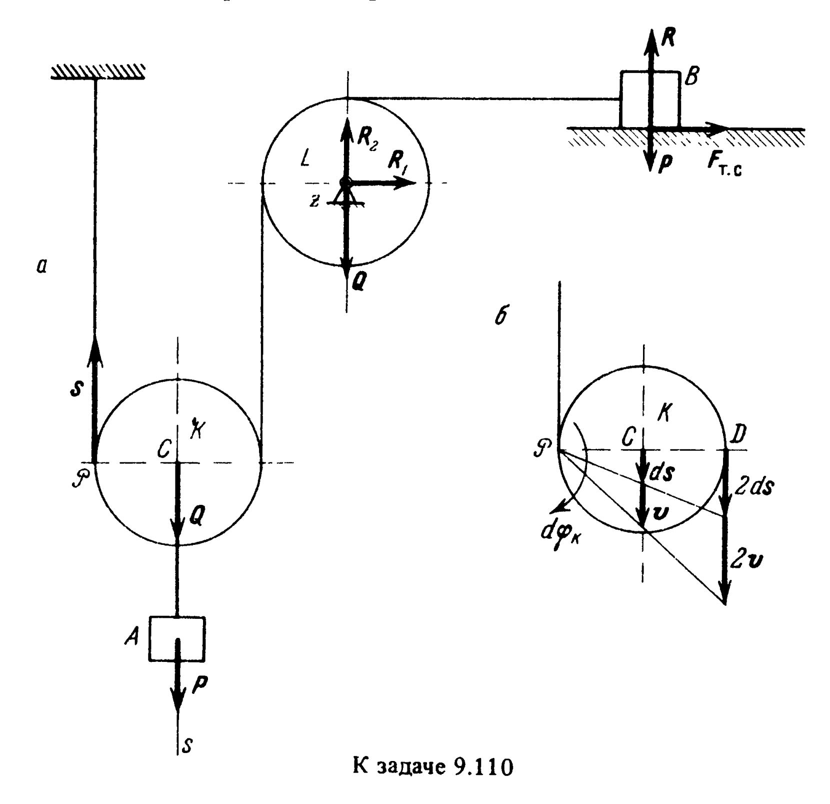
$$T_1 = \frac{v^2}{2}\left[M + 4m\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)\right]. \tag{18}$$

Подставляя значения T_1, T_2 и $\sum_{k=1}^{n} A(F_k^e)$ из формул (18), (13) и (12) в уравнение (2) и решая это уравнение относительно s, находим

$$s = \frac{rv^2[M + 4m(1 + \rho^2/r^2)]}{2gf_к(M + 4m)}.$$

Задача 9.110. Грузы A и B приводятся в движение посредством двух блоков: подвижного K и неподвижного L (рис. *а*). В результате толчка, сообщенного грузу A, он начал опускаться со скоростью v_0.

На какое расстояние должен опуститься груз A для того, чтобы его скорость увеличилась в два раза? Грузы A и B одинаковой массы M_1. Блоки K и L считать однородными круглыми дисками одинаковой массы M_2.



К задаче 9.110

Коэффициент трения скольжения груза B о горизонтальную плоскость равен f. Массой нити пренебречь.

Р е ш е н и е. Направим ось s через центр масс C подвижного блока K по вертикали вниз. Соответственно с направлением движения считаем положительным направление угла поворота блока K по ходу часовой стрелки, а блока L – против хода часовой стрелки. Радиусы блоков обозначим r.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(F_k^i). \tag{1}$$

Так как нить, охватывающая блоки K и L и приводящая в движение груз B, не растягивается и при движении системы находится в натянутом состоянии, то сумма работ внутренних сил системы равна нулю. Поэтому уравнение (1) принимает вид

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e). \tag{2}$$

Изобразим внешние силы системы: силы тяжести грузов A и B ($P = P_A = P_B = M_1 g$) и блоков K и L ($Q = Q_K = Q_L = M_2 g$), R – нормальную реакцию горизонтальной плоскости, $F_{т.с}$ – силу трения скольжения груза B о горизонтальную плоскость, R_1 и R_2 – составляющие реакции оси блока L, S – реакцию нити.

Дадим элементарное перемещение ds центру масс C блока K по вертикали вниз. При этом блок K получит угловое перемещение по ходу часовой стрелки. Учитывая, что блок K, осуществляющий плоское движение, имеет мгновенный центр скоростей $\mathscr{P}$ в точке касания обода блока с левой ветвью нити, находим перемещение точки обода D, равное $2ds$ (рис. *б*). Следовательно, элементарное перемещение груза B направлено по горизонтали налево и равно $2ds$, а угловое перемещение блока L направлено против хода часовой стрелки.

Вычислим элементарную работу всех внешних сил системы:

$$\delta A = \sum \delta A(F_k^e) = \delta A(P_A) + \delta A(Q_K) + \delta A(Q_L) + \delta_A(P_B) + \delta A(R) +$$

$$+ \delta A(S) + \delta A(R_1) + \delta A(R_2) + \delta A(F_{т.с}). \tag{3}$$

Находим:

$$\delta A(P_A) = M_1 g\, ds, \tag{4}$$

$$\delta A(Q_K) = M_2 g\, ds, \tag{5}$$

$$\delta A(Q_L) = 0 \tag{6}$$

(точка приложения силы Q_L неподвижна),

$$\delta A(P_B) = 0 \tag{7}$$

(груз B перемещается по горизонтали),

$$\delta A(S) = 0 \tag{8}$$

(реакция нити S всегда приложена в мгновенном центре скоростей $\mathscr{P}$),

$$\delta A(R) = 0 \tag{9}$$

(нормальная реакция R перпендикулярна элементарному перемещению груза B),

$$\delta A(R_1) = \delta A(R_2) = 0 \tag{10}$$

(точка приложения сил R_1 и R_2 неподвижна),

$$\delta A(F_{т.с}) = -F_{т.с} dr_B.$$

Так как перемещение груза dr_B, направленное налево, равно $2ds$, а $F_{т.с} = fM_1 g$, то

$$\delta A(F_{т.с}) = -2fM_1 g\, ds. \tag{11}$$

После подстановки выражений (4) – (11) в формулу (3) находим

$$\delta A = \Sigma\, \delta A(F_k^e) = g[M_2 + M_1(1 - 2f)]\, ds. \tag{12}$$

Для вычисления суммы работ на искомом перемещении груза A, равном s, следует, воспользовавшись формулой (12), взять определенный интеграл в пределах от 0 до s. Тогда будем иметь

$$\Sigma A(F_k^e) = [M_2 + M_1(1 - 2f)]gs. \tag{13}$$

Переходим к вычислению кинетической энергии системы, в состав которой входят массы двух грузов и двух блоков. Запишем

$$T = T_A + T_B + T_K + T_L. \tag{14}$$

Обозначим через v скорость груза A. Тогда $v_C = v$. Учитывая, что мгновенный центр скоростей блока K находится в точке $\mathcal{P}$, получим $v_D = 2v$ (рис. *б*). Так как нить нерастяжима, то скорость груза B равна скорости точки D, т.е. $v_B = 2v$. Мгновенная угловая скорость блока K: $\omega_K = v_C/r = v/r$, угловая скорость блока L: $\omega_L = v_B/r = 2v/r$ (скорость точки на ободе блока L равна скорости груза B).

Грузы A и B движутся поступательно, поэтому

$$T_A = \frac{1}{2} M_1 v^2, \tag{15}$$

$$T_B = \frac{1}{2} M_1 v_B^2 = 2M_1 v^2. \tag{16}$$

Блок K совершает плоское движение, т.е.

$$T_K = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_K^2,$$

где $I_C = M_2 r^2/2$, $\omega_K = v/r$. Поэтому

$$T_K = \frac{3}{4} M_2 v^2. \tag{17}$$

Блок L вращается вокруг неподвижной оси, т.е.

$$T_L = \frac{1}{2} I_z \omega_L^2,$$

где $I_z = M_2 r^2/2$, $\omega_L = 2v/r$. Следовательно,

$$T_L = M_2 v^2. \tag{18}$$

Подставив выражения (15)–(18) в формулу (14), находим кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{v^2}{4}(10M_1 + 7M_2). \tag{19}$$

Согласно условию задачи скорость груза A в начальном положении системы равнялась v_0, т.е.

$$T_1 = \frac{v_0^2}{4}(10M_1 + 7M_2). \tag{20}$$

В конечном положении системы скорость груза A удвоилась, следовательно,

$$T_2 = v_0^2(10M_1 + 7M_2). \tag{21}$$

Подставляя формулы (13), (20) и (21) в уравнение (2), решив это уравнение относительно s, определим искомое перемещение груза A:

$$s = \frac{3v_0^2(10M_1 + 7M_2)}{4[M_2 + M_1(1 - 2f)]}.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 38.13–38.15, 38.18–38.20, 38.24–38.30, 38.33, 38.35–38.46.

5. Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме. Эта теорема

$$dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k$$

часто применяется для составления дифференциальных уравнений движения, а также в задачах, где в число данных и неизвестных входят не скорости (здесь используется интегральная форма теоремы), а ускорения точек системы. Это способ применим к системам с одной степенью свободы.

Указание. Задачи рекомендуется решать в такой последовательности:

1) вычислить кинетическую энергию, выразив ее в зависимости от скорости $\dot{s}$ одной из точек системы или от угловой скорости $\dot{\varphi}$ одного из твердых тел системы, т.е. $T = \frac{1}{2}a\dot{s}^2$ или $T = \frac{1}{2}b\dot{\varphi}^2$, где a – приведенная масса, а b – приведенный момент инерции;

2) вычислить дифференциал кинетической энергии $dT = a\dot{s}\,d\dot{s}$ или $dT = b\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}$ и, использовав зависимость $\dot{s}\,d\dot{s} = \frac{ds}{dt}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds$ или $\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}\,d\dot{\varphi} = \ddot{\varphi}\,d\varphi$, записать его в виде $dT = a\ddot{s}\,ds$ или $dT = b\ddot{\varphi}\,d\varphi$;

3) изобразить на рисунке все внешние и внутренние силы (в случае неизменяемой материальной системы – только внешние силы);

4) вычислить элементарную работу всех сил, выразив ее с помощью элементарного перемещения ds или $d\varphi$, т.е. $\delta A = \alpha\,ds$ или $\delta A = \beta\,d\varphi$;

5) использовать результаты, полученные в пунктах 2) и 4), в уравнении $dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k$ и после сокращения на ds или $d\varphi$ получить дифференциальное уравнение $a\ddot{s} = \alpha$ или $b\ddot{\varphi} = \beta$;

6) определить искомую величину.

Задача 9.111. Применив теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, вывести дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Решение. Обычно в курсах теоретической механики дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси выводится с помощью теоремы об изменении главного момента количеств движения. Вместе с тем можно, минуя эту теорему, получить искомое уравнение с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k. \tag{1}$$

В данном случае кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2, \tag{2}$$

где I_z – момент инерции твердого тела относительно его оси вращения z, а $\dot{\varphi} = \omega$, где ω – угловая скорость твердого тела.

Как известно (см. обзор теории), элементарная работа внешних сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z, вычисляется по формуле

$$\delta A = m_z^e d\varphi = \left[\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e)\right] d\varphi, \tag{3}$$

где $d\varphi$ – элементарное угловое перемещение твердого тела (напомним, что сумма работ внутренних сил в твердом теле равна нулю).

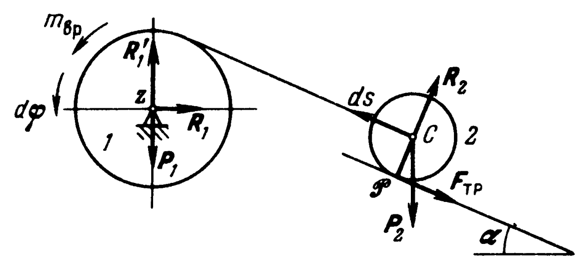
Внося формулы (2) и (3) в уравнение (1), найдем

$$I_z \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = \left[\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e)\right] d\varphi. \tag{4}$$

Заметив, что $\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}\, d\dot{\varphi} = \ddot{\varphi}\, d\varphi$, после сокращения уравнения (4) на $d\varphi$ получим искомое дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e).$$

Задача 9.112. Вращающий момент $m_{\text{вр}}$ приводит в движение барабан *1* массой M_1 и радиусом r_1 вокруг неподвижной оси z, перпендикулярной к плоскости рисунка. На боковую поверхность барабана наматывается нить,



К задаче 9.112

которая приводит в движение каток *2* массой M_2. Каток катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту.

Применив теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, определить угловое ускорение барабана. Каток и барабан считать однородными круглыми цилиндрами. Трением качения и массой нити пренебречь.

Р е ш е н и е. Для применения теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$$dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k \qquad (1)$$

вычислим кинетическую энергию T данной системы, выразив ее в зависимости от угловой скорости барабана $\dot{\varphi}_1$. Имеем

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \qquad (2)$$

где $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ – соответственно кинетическая энергия барабана *1* и катка *2*.

Барабан *1* вращается вокруг неподвижной оси z, поэтому $T^{(1)} = \frac{1}{2} I_{1z} \dot{\varphi}_1^2$. Приняв во внимание, что $I_{1z} = \frac{M_1 r_1^2}{2}$, запишем:

$$T^{(1)} = \frac{M_1 r_1^2}{4} \dot{\varphi}_1^2. \tag{3}$$

Колесо *2* совершает плоское движение, поэтому $T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$. Учтя, что $v_C = r_1 |\dot{\varphi}_1|$, $\omega_2 = \frac{v_C}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} |\dot{\varphi}_1|$, $J_{2z} = \frac{M_2 r_2^2}{2}$, где радиус катка обозначен r_2, имеем

$$T^{(2)} = \frac{3}{4} M_2 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2. \tag{4}$$

Подставив значения (3) и (4) в формулу (2), получим

$$T = \frac{M_1 + 3M_2}{4} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2. \tag{5}$$

Формуле (5) можно придать вид $T = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}_1^2$, где коэффициент $a = \frac{M_1 + 3M_2}{2} r_1^2$ называется ***приведенным моментом инерции системы.***

Переходим к вычислению суммы элементарных работ $\sum_{k=1}^{n} \delta A_k$ внешних сил данной системы.

Изобразим внешние силы и моменты: $m_{вр}$ – вращающий момент, $\boldsymbol{P}_1$ – сила тяжести барабана, $\boldsymbol{P}_2$ – сила тяжести катка, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_1'$ – составляющие реакции неподвижной оси z, $\boldsymbol{R}_2$ – реакция наклонной плоскости, $\boldsymbol{F}_{тр}$ – сила трения катка о наклонную плоскость.

Дадим барабану элементарное угловое перемещение $d\varphi_1$. При этом центр масс C катка переместится на $ds = r_1 d\varphi_1$. Элементарная работа внешних сил равна $\Sigma \delta A_k = m_{вр} d\varphi_1 - P_2 ds \cdot \sin\alpha$, т.е.

$$\Sigma \delta A_k = (m_{вр} - P_2 r_1 \sin\alpha) d\varphi_1. \tag{6}$$

Напомним, что при качении без скольжения элементарная работа силы трения $\boldsymbol{F}_{тр}$ равна нулю.

Подставив T и $\Sigma \delta A_k$ из формул (5) и (6) в уравнение (1), найдем

$$\frac{M_1 + 3M_2}{2} r_1^2 \dot{\varphi}_1 d\dot{\varphi}_1 = (m_{вр} - M_2 g r_1 \sin\alpha) d\varphi_1. \tag{7}$$

Приняв во внимание, что $\dot{\varphi}_1 \cdot d\dot{\varphi}_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} d\dot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_1 d\varphi_1$, после сокращения уравнения (7) на $d\varphi_1$ получим искомое угловое ускорение барабана

$$\ddot{\varphi}_1 = 2\frac{m_{\text{вр}} - M_2 g r_1 \sin a}{(M_1 + 3M_2) r_1^2}.$$

6. Потенциальная энергия. *Силовым полем* называется область пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует сила, зависящая от координат этой точки в рассматриваемой системе отсчета и от времени.

Если действующие в силовом поле силы не зависят от времени, то такое силовое поле называется *стационарным.*

Силовое поле называется *потенциальным*, если для него существует *силовая функция* – скалярная функция координат, градиент которой равен силе, действующей на материальную точку, находящуюся в силовом поле. Силы, действующие в потенциальном силовом поле, называются *потенциальными силами.*

Потенциальная энергия точки – это величина, равная работе, которую произведет сила, действующая на материальную точку, находящуюся в потенциальном силовом поле, при перемещении этой точки из данного положения в положение, для которого значение потенциальной энергии условно считается равным нулю.

Потенциальная энергия системы материальных точек – это величина, равная работе, которую произведут силы, действующие на точки системы, находящейся в потенциальном силовом поле, при перемещении системы из заданного положения в положение, для которого потенциальная энергия системы условно считается равной нулю.

Полной механической энергией материальной точки называется величина, равная сумме кинетической и потенциальной энергий материальной точки. Аналогично определяется и *полная механическая энергия системы материальных точек* – это величина, равная сумме кинетической и потенциальной энергий всех точек механической системы.

Если движение системы материальных точек происходит под действием внутренних и внешних сил, которые являются потенциальными, то сумма кинетической и потенциальной энергий системы сохраняет постоянную величину. Это – *закон сохранения механической энергии.* С математической точки зрения закон сохранения механической энергии является одним из первых интегралов уравнений движения, так как уравнение, характеризующее закон сохранения механической энергии:

$$T + \Pi = \text{const},$$

зависит только от координат и скоростей точек системы, но не зависит от ускорений точек системы.

Механическая система, для которой существует закон сохранения полной механической энергии системы, называется *консервативной.*

Потенциальная энергия зависит от положения точки в поле:

$$\Pi = \Pi(x, y, z). \tag{4*}$$

Эквипотенциальной поверхностью (поверхностью уровня) называется геометрическое место точек поля, в которых потенциальная энергия имеет одинаковое значение:

$$\Pi(x, y, z) = C. \tag{5*}$$

Потенциальная энергия, определяется с точностью до аддитивной (слагаемой) постоянной, зависящей от выбора нулевой поверхности уровня.

Потенциальная энергия силы упругости пружины равна половине произведения коэффициента жесткости c пружины на квадрат ее деформации Δ:

$$\Pi = \frac{1}{2} c\Delta^2. \tag{6*}$$

Эта формула справедлива для тел, работающих на линейные деформации, и для упругих тел, работающих на угловые перемещения.

Потенциальная энергия системы материальных точек является функцией от координат все n точек системы, т.е.

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z, \ldots, x_k, y_k, z_k, \ldots, x_n, y_n, z_n).$$

Работа силы поля при перемещении материальной точки в потенциальном поле равна разности потенциальных энергий начального и конечного положений точки:

$$A = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Работа силы поля при перемещении материальной точки в потенциальном силовом поле по любому замкнутому пути равна нулю.

Сила, действующая в потенциальном поле, направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности в данной точке в сторону убывания потенциальной энергии.

Проекция на ось этой силы равна частной производной потенциальной энергии по соответствующей координате, взятой с обратным знаком:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Здесь $\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k}$, т.е. $\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} \Pi$.

В случае системы n материальных точек

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \quad \text{где } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если даны проекции силы F_x, F_y и F_z на оси декартовых координат и надо определить, является ли сила $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$ силой, действующей в потенциальном поле (потенциальной силой), то следует проверить, имеют ли место равенства

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}.$$

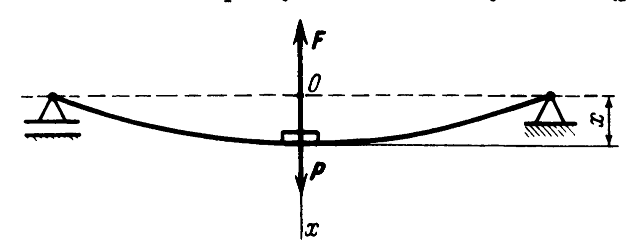
Если эти равенства тождественно удовлетворены, то сила F потенциальна. В противном случае сила не потенциальна. При этом предполагается, что функция $\Pi(x, y, z)$ определяется единственным образом в любой точке поля изменения переменных x, y, z, т.е. функция однозначная, а область является односвязной. Элементарная работа потенциальной силы равна полному дифференциалу потенциальной энергии, взятому с обратным знаком:

$$\delta A = -d\Pi.$$

Итак, в случае потенциальных сил элементарная работа силы δA может быть обозначена dA.

Вычисление потенциальной энергии системы материальных точек является одним из этапов решения задач при использовании теоремы об изменении кинетической энергии, уравнений Лагранжа второго рода и т.д.

Задача 9.113. Груз массой M, лежащий посередине упругой балки, совершает свободные колебания. Сила упругости балки пропорциональна ее прогибу и направлена по вертикали. Проекция этой силы на вертикальную ось x равна: $F_x = -c\Delta_x$, где Δ – прогиб балки в ее середине, а c – коэффициент упругости, численно равный силе, которую надо приложить в середине балки для того, чтобы прогнуть ее на единицу длины (рис.).



К задаче 9.113

Вычислить потенциальную энергию системы, пренебрегая массой балки.

Р е ш е н и е. Возьмем начало отсчета оси x в середине недеформированной балки.

Изобразим силы, приложенные к грузу: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ – сила тяжести груза, $\boldsymbol{F}$ – сила упругости балки. Обе силы потенциальны. Для вычисления по-

тенциальной энергии груза надо сложить потенциальные энергии силы тяжести $\Pi^{(1)}$ и силы упругости $\Pi^{(2)}$:

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}. \qquad (2)$$

Так как потенциальной энергией называется работа потенциальной силы при перемещении материальной точки из данного положения в нулевое, то

$$\Pi^{(1)} = -Px. \qquad (2)$$

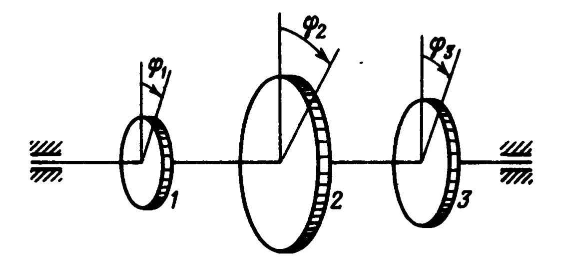
За нулевое положение точки выбираем начало отсчета координаты x в середине недеформированной балки. Потенциальная энергия силы тяжести $\boldsymbol{P}$ отрицательна при $x > 0$, так как груз для перемещения из данного положения в нулевое должен подняться вверх.

Затем, воспользовавшись формулой (6*), данной на стр. 378, находим

$$\Pi^{(2)} = \frac{cx^2}{2}. \qquad (3)$$

Потенциальная энергия упругой балки положительна.

Задача 9.114. На горизонтальный упругий вал, коэффициент упругости которого на кручение равен c, насажены три диска. Вследствие упругости



К задаче 9.114

вала во время вращения системы около оси вала диски оказываются повернутыми на разные углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Вычислить потенциальную энергию системы. Центры масс дисков лежат на оси вращения.

Р е ш е н и е. Вычислим углы закручивания вала. На участке между дисками *1* и *2* угол закручивания вала равен $\varphi_2 - \varphi_1$, а на участке между дисками *2* и *3* – соответственно $\varphi_3 - \varphi_2$.

Поэтому потенциальная энергия системы, слагающаяся из энергий отдельных участков, будет

$$\Pi = \frac{c}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{c}{2}(\varphi_3 - \varphi_2)^2.$$

7. **Закон сохранения механической энергии.** Если все силы, приложенные к системе материальных точек, потенциальны, то сумма кинетической и потенциальной энергий системы постоянна:

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2.$$

Так как в механизмах и машинах действуют силы сопротивления, которые не потенциальны, то происходит уменьшение механической энергии. Эта энергия расходуется на работу непотенциальных сил и переходит в другие виды энергии (например, в тепловую). Следовательно, закон сохранения механической энергии в этих случаях неприменим и для поддержания установившегося режима работы машины или механизма необходим приток механической энергии извне.

Задача 9.115. На рисунке изображен виброграф — прибор для измерения колебаний. Виброграф состоит из тонкого однородного стержня OA длиной $2l$ и массой M_1, к верхнему концу которого прикреплен груз A (точечная масса) массой M_2. Стержень OA может колебаться около горизонтальной оси z, перпендикулярной плоскости рисунка, под действием двух пружин: винтовой с коэффициентом упругости c_1 и спиральной с коэффициентом упругости c_2. В вертикальном положении равновесия стержня обе пружины не деформированы; $OB = 3/2\, l$.

Вычислить потенциальную энергию материальной системы.

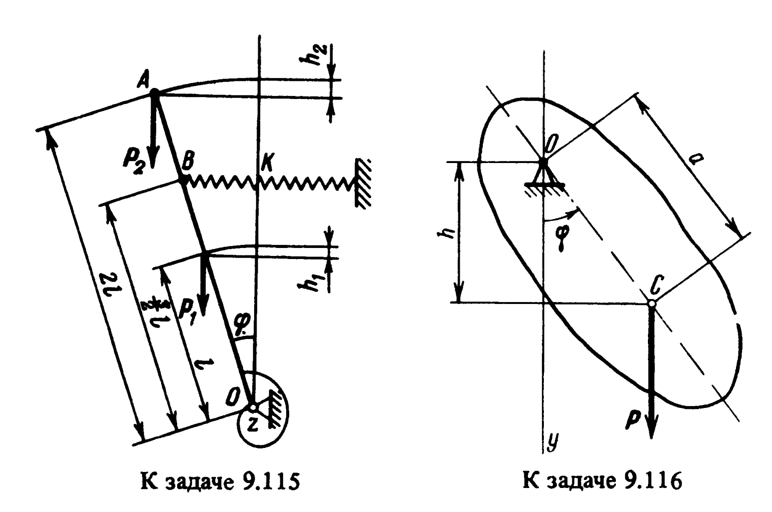
Решение. Примем в качестве нулевого верхнее вертикальное положение стержня. Потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \Pi^{(P_1)} + \Pi^{(P_2)} + \Pi^{(c_1)} + \Pi^{(c_2)}, \qquad (1)$$

где $\Pi^{(P_1)}$ и $\Pi^{(P_2)}$ — потенциальные энергии сил тяжести $P_1 = M_1 g$ и $P_2 = M_2 g$, а $\Pi^{(c_1)}$ и $\Pi^{(c_2)}$ — потенциальные энергии сил упругости пружин. Заметим, что $\Pi^{(P_1)} = -P_1 h_1$, $\Pi^{(P_2)} = -P_2 h_2$ (h_1 и h_2 изображены на рисунке), $\Pi^{(c_1)} = \dfrac{1}{2} c_1 \Delta_1^2$, $\Pi^{(c_2)} = \dfrac{1}{2} c_2 \Delta_2^2$, где Δ_1 — линейная деформация винтовой пружины, а Δ_2 — угловая деформация спиральной пружины. Приняв во внимание, что $h_1 = l(1 - \cos\varphi)$, $h_2 = 2l(1 - \cos\varphi)$, $\Delta_1 = BK = 3/2\, l \sin\varphi$, $\Delta_2 = \varphi$ (в вертикальном положении стержня пружины не деформированы), получим $\Pi^{(P_1)} = -M_1 g l(1 - \cos\varphi)$, $\Pi^{(P_2)} = -2M_2 g l(1 - \cos\varphi)$, $\Pi^{(c_1)} = \dfrac{9}{8} c_1 l^2 \sin^2\varphi$, $\Pi^{(c_2)} = \dfrac{1}{2} c_2 \varphi^2$. Удлинение пружины Δ_1 взято приближенно. Внеся эти значения в формулу (1), найдем искомое выражение потенциальной энергии:

$$\Pi = -(M_1 + 2M_2) g l + (M_1 + 2M_2) g l \cos\varphi + \frac{9}{8} c_1 l^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} c_2 \varphi^2.$$

Задача 9.116. Вычислить полную механическую энергию физического маятника массой M в зависимости от угла отклонения φ (рис.), если центр масс C маятника отстоит от оси подвеса на расстоянии a; I_C – момент



К задаче 9.115 К задаче 9.116

инерции маятника относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс C.

Р е ш е н и е. Направим ось y из точки подвеса O по вертикали вниз. Положительное направление отсчета угла φ указано на рисунке.

Механическая энергия маятника равна сумме его кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi. \qquad (1)$$

Потенциальной силой является сила тяжести маятника $P = Mg$. Следовательно, потенциальная энергия маятника определяется формулой

$$\Pi = -Ph = -Mga\cos\varphi. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия маятника, качающегося вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, равна

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2.$$

Так как по теореме Штейнера

$$I_O = I_C + Ma^2,$$

то

$$T = \frac{1}{2}(I_C + Ma^2)\dot{\varphi}^2. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в формулу (1), получим искомое выражение полной

механической энергии физического маятника

$$E = \frac{1}{2}(I_C + Ma^2)\dot{\varphi}^2 - Mga\cos\varphi. \quad (4)$$

Задача 9.117. Использовав условие и решение предыдущей задачи и применив закон сохранения полной механической энергии, определить зависимость угловой скорости $\dot{\varphi}$ маятника от его угла поворота φ.

В начальный момент маятнику, занимавшему вертикальное положение, была сообщена начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$. Силами сопротивления пренебречь.

Решение. Так как силы, приложенные к маятнику, потенциальны, то можно применить закон сохранения полной механической энергии. Использовав формулу (4) предыдущей задачи, вычислим полную механическую энергию маятника в начальный момент, когда $\varphi = 0$, а $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Имеем

$$E_0 = \frac{1}{2}(I_C + Ma^2)\dot{\varphi}_0^2 - Mga. \quad (1)$$

На основании закона сохранения полной механической энергии запишем

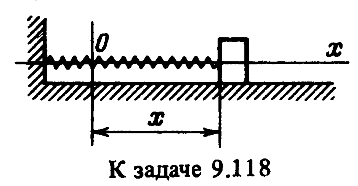
$$E = E_0. \quad (2)$$

Внеся в уравнение (2) значение E из формулы (4) предыдущей задачи, а E_0 – из формулы (2) и решив уравнение относительно $\dot{\varphi}$, получим

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 - \frac{2Mga(1 - \cos\varphi)}{I_C + Ma^2}}.$$

Этот результат можно также получить, применив теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

Задача 9.118. Груз массой m, прикрепленный к концу пружины, совершает свободные колебания по гладкой горизонтальной плоскости согласно закону $x = b\sin kt$ (рис.).



К задаче 9.118

Воспользовавшись законом сохранения механической энергии, определить коэффициент упругости c пружины. Начало отсчета по оси x взято в правом конце недеформированной пружины.

Решение. Рассмотрим два положения груза: среднее, имеющее индекс 1, и крайнее – с индексом 2. В соответствии с законом сохранения

механической энергии запишем

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2. \tag{1}$$

В среднем, т.е. в нулевом положении груза, его потенциальная энергия $\Pi_1 = 0$. В крайнем положении груза, когда он отклонен от нуля на $x = b$, где b – амплитуда колебаний, потенциальная энергия равна $\Pi_2 = ½cb^2$. Итак,

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = ½cb^2. \tag{2}$$

Для вычисления кинетической энергии груза по формуле $T = ½m\dot{x}^2$ вычислим производную $x = b\sin kt$ по времени. Имеем $\dot{x} = bk\cos kt$. Поэтому кинетическая энергия равна $T = ½mb^2k^2\cos^2 kt$. В крайнем положении груза кинетическая энергия T_2 равна нулю. В среднем, т.е. в нулевом положении, например при $t = 0$, кинетическая энергия T_1 достигает наибольшего значения, равного $½mb^2k^2$, т.е.

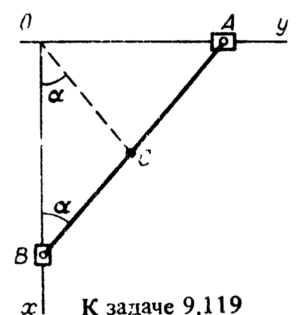
$$T_1 = ½mb^2k^2, \qquad T_2 = 0. \tag{3}$$

Подставив результаты (2) и (3) в уравнение (1) и решив его относительно c, вычислим искомый коэффициент упругости пружины: $c = mk^2$.

Задача 9.119. Однородный стержень AB длиной $2l$ и массой m скользит без трения одним концом по горизонтальной прямой y, а другим концом по вертикальной прямой x (рис.).

Найти уравнения движения стержня под действием силы тяжести. В начальный момент времени стержень был неподвижен и образовывал угол α_0 с вертикалью.

Р е ш е н и е. Положение стержня определяется углом α, образованным стержнем с вертикальной осью x. Координаты центра масс стержня, описывающего окружность радиусом $OC = l$ с центром в точке O, равны



К задаче 9.119

$$x_C = l\cos\alpha, \qquad y_C = l\sin\alpha. \tag{1}$$

Кинетическая энергия стержня определяется формулой Кёнига

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_{z_C}\omega^2}{2}. \tag{2}$$

Здесь $v_C = l\omega$, $I_{z_C} = m4l^2/12 = ml^2/3$. Следовательно, (2) примет вид

$$T = \frac{ml^2\omega^2}{2} + \frac{ml^2\omega^2}{6} = \frac{2}{3}ml^2\omega^2. \tag{3}$$

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = mgl\cos\alpha. \tag{4}$$

Подставляя найденные значения кинетической и потенциальной энергий в выражение теоремы об изменении кинетической энергии

$$T_2 - T_1 = \Pi_{1,2}, \tag{5}$$

получаем

$$\frac{2}{3} ml^2 \omega^2 = mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_0), \tag{6}$$

или

$$\frac{2}{3} l\omega^2 = g(\cos\alpha - \cos\alpha_0). \tag{7}$$

Как известно из кинематики, все точки стержня (кроме точек A, B, C) описывают эллипсы. Поэтому этот механизм называют *эллиптическим маятником.*

Аналогично уравнение для математического маятника длиной l_1:

$$l_1 \omega^2 = g(\cos\alpha - \cos\alpha_0). \tag{8}$$

Действительно, кинетическая энергия математического маятника равна

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml_1^2 \omega^2}{2},$$

а потенциальная энергия системы –

$$\Pi = mgl_1 \cos\alpha,$$

откуда и находится уравнение (8).

Сравнивая коэффициенты в уравнениях (7) и (8), находим длину эквивалентного математического маятника:

$$l_1 = \frac{4}{3} l.$$

Если взять математический маятник той же длины, что и длина эллиптического маятника

$$l_1 = 2l,$$

то эллиптический маятник совершает колебания с большей частотой, чем математический. При одинаковом начальном угле отклонения отношение периодов колебаний равно $\sqrt{2/3}$.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 29.12, 29.14, 29.15, 30.1, 30.3, 30.16, 30.20, 30.21, 38.4, 38.5, 38.10, 38.12, 38.14, 38.20, 38.47, 38.48.

Глава 10

ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

§ 1. КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ

Несвободной называется материальная система, на движение точек которой (координаты и скорости) наложены некоторые ограничения (связи).

Всякий механизм является примером несвободной материальной системы.

Связями называются физические тела, налагающие ограничения на координаты, скорости и ускорения точек материальной системы.

Уравнения, которым в силу наложенных связей должны удовлетворять координаты точек механической системы и их скорости (первые производные от координат по времени), называются *уравнениями связей.*

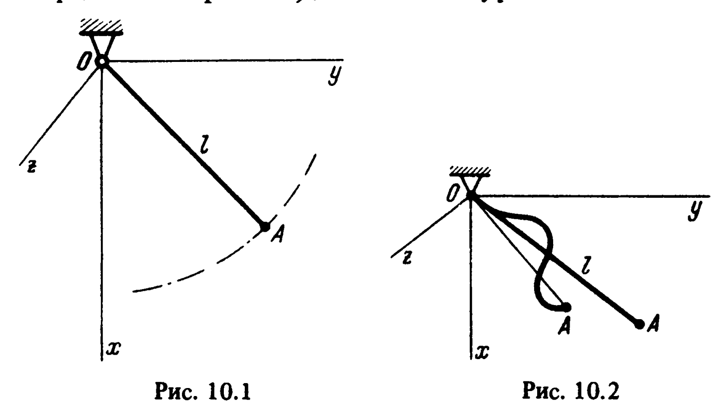


Рис. 10.1 Рис. 10.2

Связи делятся на удерживающие и неудерживающие. *Удерживающими связями* называются связи, при действии которых для любого возможного перемещения точки механической системы противоположное ему перемещение также является возможным. Примером удерживающей связи служит идеальный (невесомый, недеформируемый) стержень, по концам которого размещены две материальные точки. Эти материальные точки не могут ни приблизиться друг к другу, ни отдалиться. Если одну

из материальных точек, например точку O (рис. 10.1), закрепить, то вторая точка A может перемещаться по кривой, лежащей на сфере радиуса, равного длине l идеального стержня, т.е. координаты точки A оказываются связанными зависимостью $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - l^2 = 0$. Таким образом, удерживающая геометрическая связь выражается соотношением между координатами точек материальной системы:

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_k, y_k, z_k, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0.$$

Связи, при которых точки механической системы имеют возможные перемещения, противоположные которым не являются возможными, называются ***неудерживающими связями.*** Такую связь можно получить, если в предыдущем примере идеальный стержень OA заменить нитью. Тогда точки O и A отдалиться друг от друга не могут, но приблизиться имеют возможность, так как при этом произойдет смятие нити (рис. 10.2).

Уравнение неудерживающей связи имеет вид

$$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - l^2 \leqslant 0.$$

(Знак равенства соответствует натянутой нити.) Таким образом, неудерживающая связь выражается неравенством вида

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_k, y_k, z_k, \ldots, x_n, y_n, z_n) \leqslant 0.$$

Связи делятся также на нестационарные (зависящие от времени) и стационарные (не зависящие от времени).

Связь называется *нестационарной,* если в уравнение связи в явном виде входит время, т.е.

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_k, y_k, z_k, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

(В неявном виде время входит в большинство уравнений связей, так как координаты точек при движении системы, вообще говоря, являются функциями времени.) В случае подъемного крана, поднимающего груз A (материальную точку), связь, зависящая от времени, создается тросом (рис. 10.3). При равномерном наматывании троса на барабан со скоростью v длина свисающей части троса изменяется по закону

$$l = l_0 - vt,$$

где l_0 — длина свисающей части троса в начальный момент. Так как груз может раскачиваться, то уравнение этой связи имеет вид $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - (l_0 - vt)^2 \leqslant 0$, т.е содержит время в явном виде.

Связь называется *стационарной,* если время в явном виде в уравнение связи не входит (во всех рассмотренных выше примерах, кроме последнего, связи не зависят от времени).

Связи, уравнения которых содержат только координаты точек механической системы (и, может быть, время), называются *геометрическими.*

Связи, уравнения которых, кроме координат точек механической системы, содержат еще первые производные от этих координат по времени (и, может быть, время), называются дифференциальными.

Связи делятся также на голономные и неголономные. *Голономными связями* называются геометрические связи и та часть дифференциальных связей, которые могут быть проинтегрированы. *Неголономными связями*

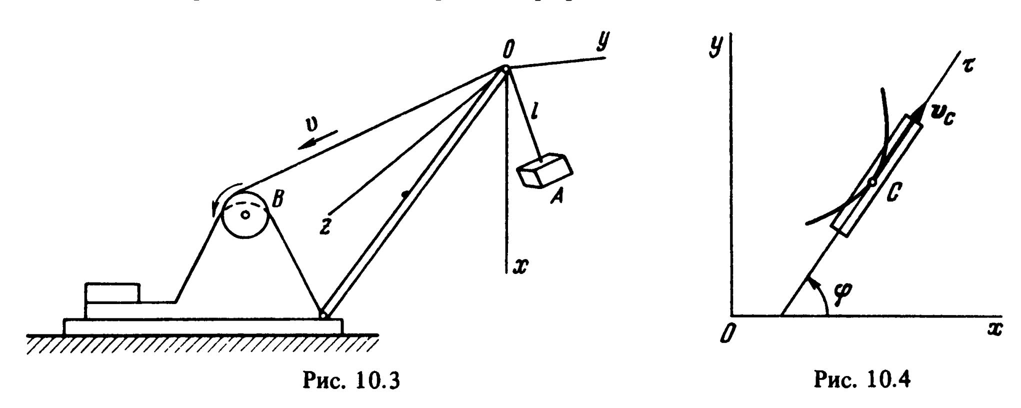


Рис. 10.3

Рис. 10.4

называются дифференциальные связи, уравнения которых не могут быть проинтегрированы. Они выражают зависимость между координатами и скоростями точек системы. Независимо от дифференциальных уравнений движения системы уравнения этих связей не могут быть проинтегрированы.

В качестве примера неголономной связи рассмотрим движение конька по поверхности льда. При отсутствии соскальзывания скорость центра масс C конька должна быть направлена вдоль его оси (рис. 10.4) по касательной к траектории точки C. Имеем $\dot{x}_C = v_{Cx} = v_C \cos\varphi$, $\dot{y}_C = v_{Cy} = v_C \sin\varphi$, где φ – угол, образованный осью x и касательной к траектории точки C. Разделив второе соотношение на первое, получим $\dot{y}_C/\dot{x}_C = \operatorname{tg}\varphi$, откуда $\dot{y}_C - \dot{x}_C \operatorname{tg}\varphi = 0$. Это уравнение неголономной связи, ибо наложены ограничения на производные по времени координат точки C. Оно является дифференциальным уравнением, которое самостоятельно не может быть проинтегрировано (напомним, что угол φ переменный).

Примером неголономной системы является шар, катящийся по шероховатой плоскости. (Скорость точки касания шара с плоскостью равна нулю.)

Числом степеней свободы материальной системы, подчиненной голономным связям, называется число независимых параметров, однозначно определяющих положения точек системы.

Так, твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, так как положение этого твердого тела вполне определяется углом поворота φ вокруг оси вращения.

Твердое тело, совершающее плоское движение, имеет три степени свободы, так как положение любого его сечения, проведенного параллельно неподвижной плоскости, определяется двумя координатами центра масс сечения x_C и y_C и углом поворота φ.

Системой с тремя степенями свободы является твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки. Его положение определяется тремя независимыми координатами, например тремя углами Эйлера φ, ψ и θ.

Системой с шестью степенями свободы является свободное твердое тело, так как его положение определяется шестью независимыми параметрами: тремя координатами центра масс x_C, y_C, z_C и тремя углами Эйлера φ, ψ и θ.

Упругое тело имеет бесчисленное множество степеней свободы.

Подавляющее большинство механизмов является системами с одной степенью свободы. Так, положение любой точки кривошипно-ползунного механизма определяется углом поворота φ кривошипа (рис. 10.5).

Диск K, вращающийся вокруг оси AB, которая в свою очередь вращается вокруг оси CD (рис. 10.6), является системой с двумя степенями свободы. Для определения положения диска K следует задать два независимых параметра: угол поворота диска вокруг оси AB и угол поворота вилки ADB вокруг оси CD.

Связи, ограничивая перемещения материальных точек системы, действуют на эти точки посредством сил, называемых *реакциями связей*.

В динамике несвободной материальной системы, как правило, силы удобно разделять на активные силы и реакции связей.

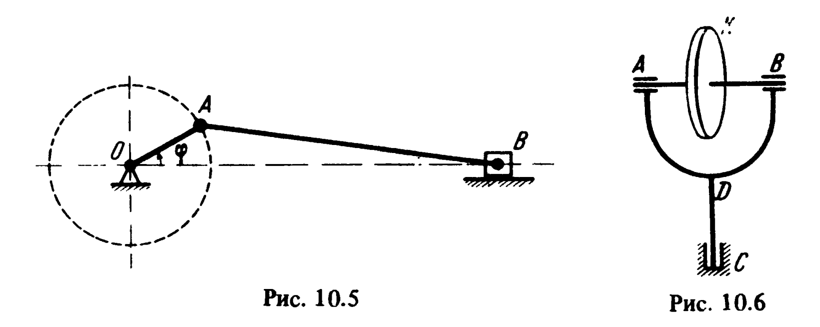


Рис. 10.5

Рис. 10.6

Следует иметь в виду, что к активным относятся все силы, не являющиеся реакциями связей. Таким образом, активной может быть какая-либо неизвестная – искомая сила, не входящая в число реакций связей.

Закон освобождаемости от связей (принцип освобождаемости от связей). В задачах динамики несвободной материальной системы пользуются

законом освобождаемости от связей, который нами уже применялся. Отбрасывая мысленно связи, наложенные на систему, компенсируют их реакциями связей. При этом несвободная материальная система рассматривается как система свободная, движущаяся под действием активных сил и реакций связей.

При движении системы реакции связей являются, вообще говоря, переменными. Они зависят от положений точек, их скоростей, ускорений и времени. Это значительно усложняет решение вторых задач, в которых движения точек системы определяются в зависимости от приложенных сил, т.е., в частности, от реакций связей. В подобных задачах приходится из системы дифференциальных уравнений движения исключать реакции связей. После нахождения движения точек системы и, следовательно, их скоростей и ускорений, можно найти реакции связей.

Задача 10.1. Связь описывается дифференциальным уравнением $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$.

Является ли связь неголономной?

Решение. В уравнение связи входят не только координаты точек, но и их производные по времени. Поэтому некоторым читателям может показаться, что связь является неголономной. Однако подобное суждение ошибочно.

Запишем данное дифференциальное уравнение в виде $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$. Проинтегрировав его, найдем $x^2 + y^2 + z^2 = C$ – уравнение голономной связи. Напомним, что связь является неголономной, если она содержит производные координат точек системы и может быть проинтегрирована лишь в совокупности с дифференциальными уравнениями движения материальной системы. В данном же случае дифференциальное уравнение связи было проинтегрировано в отрыве от дифференциальных уравнений движения системы и потому описывает голономную связь.

Заметим, что можно продифференцировать уравнение любой голономной связи $f(x, y, z) = 0$, при этом в уравнении появятся производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, но связь, однако, не перестанет быть голономной.

§ 2. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

1. Силы инерции. Приведение сил инерции к простейшему виду. *Принцип Даламбера* (Жан Лерон Даламбер, 1717–1783, французский математик, механик и философ) позволяет свести решение задач динамики к решению уравнений статики. Поэтому принцип Даламбера часто называют *методом кинетостатики.*

Силой инерции материальной точки называется векторная величина, численно равная произведению массы точки на модуль ее ускорения и

направленная в сторону, противоположную ускорению точки (рис. 10.7):

$$J = -ma.$$

Здесь J – сила инерции, m – масса точки, a – ускорение точки.

На рис. 10.7 к материальной точке A приложены: F – равнодействующая активных сил, R – равнодействующая реакций связей.

В качестве примера рассмотрим равномерное движение кольца A по проволоке B (рис. 10.8). Траектория кольца A определена проволокой,

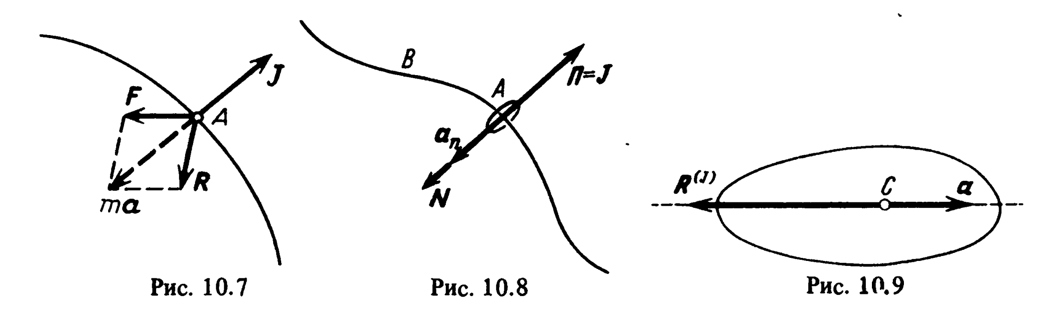


Рис. 10.7 Рис. 10.8 Рис. 10.9

являющейся связью. Кольцо A приобретает центростремительное (нормальное) ускорение под действием силы N, приложенной к нему со стороны проволоки, являющейся связью. На основании закона равенства действия и противодействия к соответствующей точке проволоки приложено противодействие $\vec{П}$, именуемое силой инерции J (рис. 10.8).

Если дана система материальных точек или твердое тело, движущееся с ускорением, то к каждой точке системы или к каждой точке твердого тела прикладывается сила инерции. При этом возникает задача сложения сил инерции, приложенных к системе материальных точек или к твердому телу.

Как известно из статики, систему сил можно привести к силе, векторно равной главному вектору, и к паре сил с моментом, векторно равным главному моменту.

Приведение сил инерции дает следующие результаты:

а) *при поступательном движении твердого тела* силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной к центру масс C твердого тела. Равнодействующая $R^{(J)}$ равна по модулю произведению массы твердого тела на ускорение любой его точки и направлена противоположно этому ускорению:

$$R^{(J)} = -Ma$$

(рис. 10.9).

б) *При вращении плоской фигуры вокруг перпендикулярной к ней неподвижной оси,* силы инерции приводятся к равнодействующей

(рис. 10.10), приложенной в центре качаний соответствующего физического маятника, ось подвеса которого совмещена с неподвижной осью данного твердого тела (центр качаний K отстоит от оси подвеса на расстоянии, равном приведенной длине физического маятника: $l_{\text{пр}} = \dfrac{I_z}{Mb}$, где I_z – момент инерции твердого тела относительно оси подвеса, M – масса твердого тела, b – расстояние от оси подвеса до центра масс). Равнодействующая сил инерции $R^{(J)}$ равна по модулю произведению массы

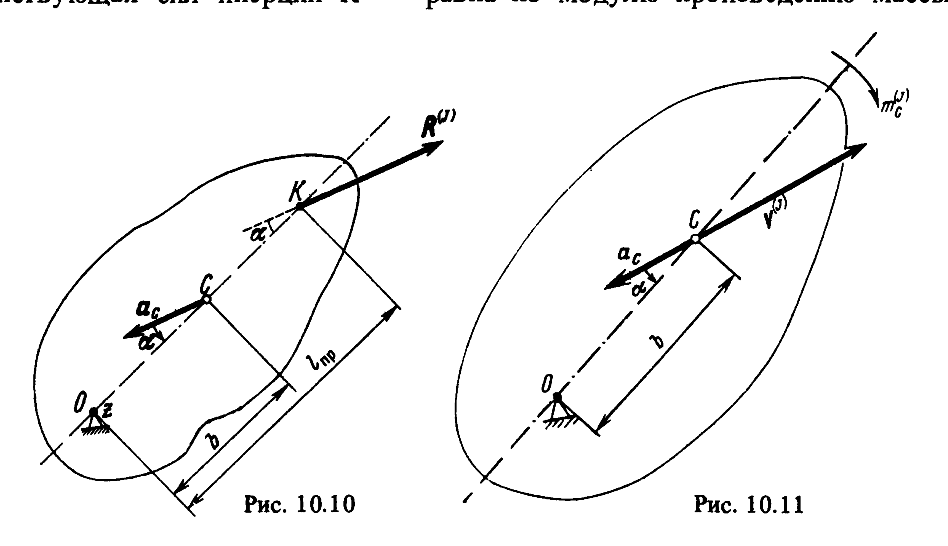


Рис. 10.10 Рис. 10.11

твердого тела на ускорение его центра масс и направлена в сторону, противоположную этому ускорению

$$R^{(J)} = -Ma_C,$$

так как $a_C = b\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}$, то $R^{(J)} = Mb\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}$; направление $R^{(J)}$ определяется углом α, находимым из уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\epsilon_z}{\omega^2}.$$

Если за центр приведения выбрать центр масс C твердого тела, то силы инерции приводятся к силе, векторно равной главному вектору $V^{(J)}$, и к паре сил с моментом, равным главному моменту $m_C^{(J)}$ (рис. 10.11).

Главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ равен по модулю произведению массы твердого тела на ускорение его центра масс и направлен в сторону, противоположную этому ускорению:

$$V^{(J)} = -Ma_C,$$

причем

$$V^{(J)} = Mb\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\epsilon_z}{\omega^2}.$$

Главный момент сил инерции $m_C^{(J)}$ относительно оси, проходящей через центр масс C параллельно оси вращения, равен по модулю произведению момента инерции твердого тела относительно оси C на модуль углового ускорения твердого тела $\vec{\epsilon}$. Знак главного момента сил инерции противоположен знаку проекции углового ускорения: $m_C^{(J)} = -I_C\epsilon_z$ (ϵ_z – проекция углового ускорения ϵ на ось вращения z).

Если за центр приведения выбрать точку O, лежащую на неподвижной оси, то силы инерции приводятся к силе, равной главному вектору $V^{(J)}$, и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_O^{(J)}$. По-прежнему $V^{(J)} = -Ma_C$, а в выражение главного момента сил инерции вместо I_C входит I_O, т.е. $m_O^{(J)} = -I_O\epsilon_z$, где $I_O = I_C + Mb^2$.

В случае, когда центр масс C лежит на оси вращения плоской фигуры, главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ обращается в нуль, и, следовательно, система сил инерции приводится к паре сил с моментом $m_O^{(J)} = -I_0\epsilon_z$.

в) *При движении плоской фигуры* силы инерции приводятся к силе, равной главному вектору $V^{(J)}$, приложенной в центре приведения (рис. 10.12), и к паре сил, момент которой равен главному моменту относительно оси, проходящей через центр приведения перпендикулярно неподвижной плоскости. Так, если за центр приведения сил инерции выбрать центр масс C плоской фигуры, то

$$V^{(J)} = -Ma_C, \quad m_C^{(J)} = -I_C\epsilon_z.$$

Приведение сил инерции к силе, равной главному вектору, и паре сил, момент которой равен главному моменту, является одним из важных этапов решения задач динамики несвободной материальной системы в случае

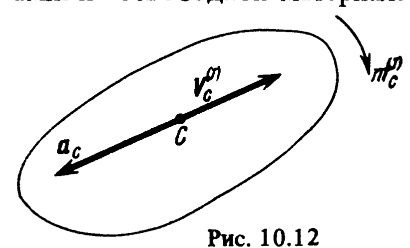


Рис. 10.12

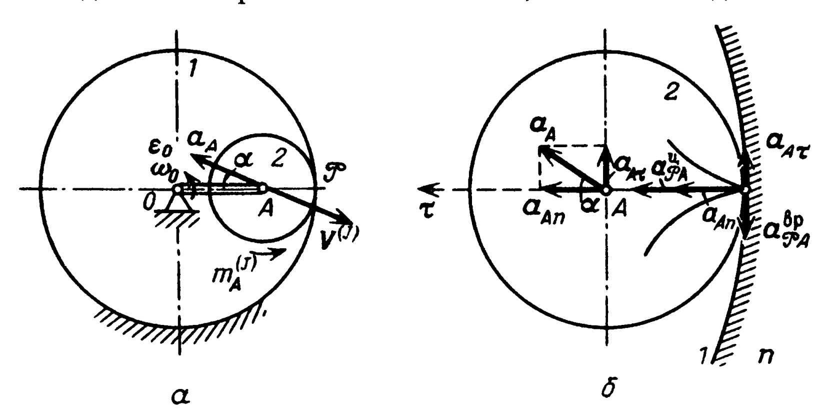
применения метода кинетостатики либо общего уравнения динамики (см. § 5), а также при определении динамических давлений на оси вращающегося твердого тела (см. ниже § 3).

Отметим, что с силами инерции связаны *формальные* методы решения задач. Все упомянутые далее задачи могут быть решены без применения

метода кинетостатики. В этой книге излагаются методы решения задач с использованием сил инерции лишь потому, что эти методы, в силу сложившихся исторических традиций, еще довольно распространены в инженерной практике. В динамике нет таких задач, которые не могли бы быть решены без применения метода кинетостатики. В дальнейшем неоднократно дается сравнение методов решения задач с использованием и без использования сил инерции. Главный вектор и главный момент сил инерции следует определять по приведенным выше формулам, в соответствии с видом движения твердого тела (поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение). Если с помощью готовых формул нельзя определить главный вектор и главный момент, то в случае непрерывного распределения масс надо найти силы инерции для выделенного элемента и затем распространить суммирование по всему твердому телу, вычислив определенный интеграл в соответствующих пределах.

В следующем параграфе будут рассмотрены методы приведения сил инерции материальных точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Задача 10.2. Определить главный вектор и главный момент сил инерции зубчатого колеса *2*, находящегося во внутреннем зацеплении с неподвижным зубчатым колесом *1*. Колесо *2* массой *M* и радиусом *r* приводится в движение кривошипом $OA = 2r$, имеющим в данный момент



К задаче 10.2

угловую скорость ω_0 и угловое ускорение ϵ_0. Колесо *2* – сплошной однородный диск (рис.).

Р е ш е н и е. Колесо *2* совершает плоское движение. При этом главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ направлен противоположно ускорению $\boldsymbol{a}_A$ и равен по модулю $V^{(J)} = Ma_A$. Так как $a_A = OA \cdot \sqrt{\epsilon_0^2 + \omega_0^4}$, а $OA = 2r$, то (рис. *а*)

$$V^{(J)} = 2Mr\sqrt{\epsilon_0^2 + \omega_0^4}. \tag{1}$$

Главный момент сил инерции колеса *2* имеет знак, противоположный знаку проекции углового ускорения, и равен произведению момента инерции на угловое ускорение:

$$m_A^{(J)} = -I_A \epsilon_2 . \quad (2)$$

Для определения углового ускорения ϵ_2 колеса *2* воспользуемся его мгновенным центром скоростей $\mathcal{P}$, который, как известно, имеет только касательное ускорение. Траекторией точки колеса является гипоциклоида, касательная τ к которой в точке $\mathcal{P}$ направлена вдоль прямой $\mathcal{P}AO$ (см. рис. *б*, где колесо *2* показано в увеличенном масштабе). Направим ось $\vec{\tau}$ вдоль кривошипа OA и ось n – перпендикулярно оси $\vec{\tau}$. Так как $\boldsymbol{a}_{\mathcal{P}}$ совпадает с направлением оси $\vec{\tau}$, то проекция $\boldsymbol{a}_{\mathcal{P}}$ на ось n равна нулю:

$$a_{\mathcal{P}n} = 0. \quad (3)$$

Определяем теперь ускорение $\boldsymbol{a}_{\mathcal{P}}$, приняв за полюс точку A:

$$\boldsymbol{a}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{a}_{A\tau} + \boldsymbol{a}_{An} + \boldsymbol{a}^{\text{ц}}_{\mathcal{P}A} + \boldsymbol{a}^{\text{вр}}_{\mathcal{P}A} . \quad (4)$$

Проектируя это векторное равенство (рис. *б*) на ось n и используя равенство (3), находим

$$a_{A\tau} + a^{\text{вр}}_{\mathcal{P}A} = 0. \quad (5)$$

Так как

$$a^{\text{вр}}_{\mathcal{P}A} = |A\mathcal{P}| \cdot \epsilon_2 = r\epsilon_2 , \quad (6)$$

а

$$a_{A\tau} = -|OA| \cdot \epsilon_0 = -2r\epsilon_0 , \quad (7)$$

то, подставляя (6) и (7) в формулу (5), имеем

$$\epsilon_2 = -2\epsilon_0 . \quad (8)$$

Момент инерции колеса *2* относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через точку A, равен

$$I_A = \frac{Mr^2}{2} . \quad (9)$$

Подставляя ϵ_2 из формулы (8) и I_A из формулы (9) в формулу (2), находим

$$m_A^{(J)} = Mr^2 \epsilon_0 .$$

2. Метод кинетостатики. *Методом кинетостатики* называется формальный прием, дающий возможность записать уравнения движения в виде уравнений равновесия.

Применяя метод кинетостатики к движущейся материальной точке, следует записать условие равновесия активных сил и реакций связей, приложенных к материальной точке, а также сил инерции:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{J} = 0,$$

где $\boldsymbol{F}$ – равнодействующая активных сил, приложенных к материальной точке, $\boldsymbol{R}$ – равнодействующая реакций связей, наложенных на материальную точку, $\boldsymbol{J}$ – сила инерции материальной точки, равна по модулю произведению массы точки на модуль ее ускорения и направленная противоположно ускорению: $\boldsymbol{J} = -m\boldsymbol{a}$.

При этом следует помнить, что сила инерции к данной материальной точке не приложена. Добавление к силам $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$ силы инерции $\boldsymbol{J}$, не приложенной к данной точке, приводит к тому, что уравнения движения принимают вид уравнений равновесия.

При движении материальной точки по кривой силу инерции можно разложить на две составляющие, соответствующие касательному и нормальному ускорениям точки: касательную силу инерции $\boldsymbol{J}_\tau$ и нормальную силу инерции $\boldsymbol{J}_n$ (рис. 10.13), причем

$$\boldsymbol{J}_\tau = -m\boldsymbol{a}_\tau, \quad \boldsymbol{J}_n = -m\boldsymbol{a}_n, \quad \boldsymbol{J} = -m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{J}_\tau + \boldsymbol{J}_n.$$

По модулю

$$J = m\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Если изучаемым объектом является твердое тело, то, применяя метод кинетостатики, надо составить уравнения равновесия системы сил, включив в них активные силы, реакции связей и силы инерции.

Методом кинетостатики можно пользоваться при решении первых задач динамики несвободной материальной системы, т.е. при решении задач, в которых по заданному движению определяются неизвестные силы. Однако все эти задачи (как правило, несколько менее громоздко) могут быть решены обычным путем – посредством применения основного уравнения динамики к каждой из материальных точек системы, т.е.

$$m_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{R}_k, \quad \text{где } k = 1, 2, \ldots, n.$$

При решении же вторых задач, т.е. таких, в которых по заданным силам определяется движение, применение метода кинетостатики нецелесообразно.

Метод кинетостатики представляет собой общий метод сведения решения задач динамики к задаче статики путем добавления к активным силам и реакциям связей сил инерции.

В основе метода лежит принцип Даламбера, опубликованный им в "Трактате по динамике" (Париж, 1743). Полностью метод кинетостатики был развит в последующие сто с лишним лет. Так, понятие о силах инерции было введено в первой половине XIX в.

Методом кинетостатики можно пользоваться в случаях, когда в число заданных и неизвестных величин входят: массы материальных точек, моменты инерции твердых тел, скорости и ускорения точек, угловые скорости и угловые ускорения твердых тел, силы и моменты сил.

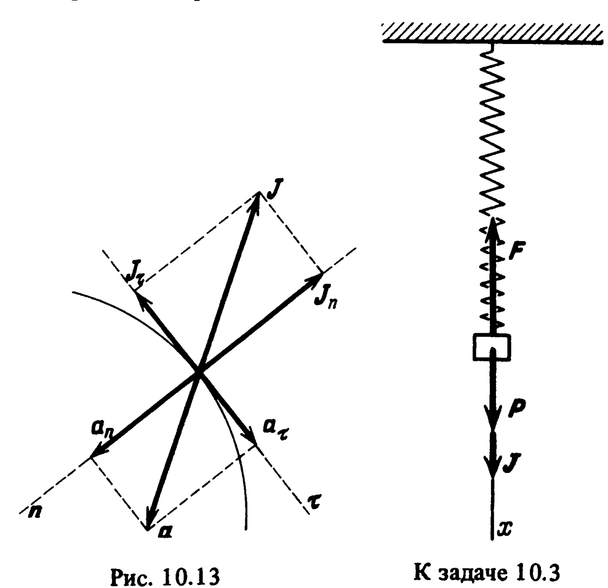


Рис. 10.13 К задаче 10.3

Указание. Решение задач с помощью метода кинетостатики рекомендуется выполнять в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке активные силы, приложенные к каждой из материальных точек;

2) применив закон освобождаемости от связей, изобразить реакции связей, наложенных на каждую из материальных точек системы;

3) добавить к активным силам и реакциям связей силы инерции материальных точек системы;

4) выбрать систему координат;

5) составить уравнения равновесия для каждой из материальных точек системы;

6) решив составленную систему уравнений, определить искомые величины.

Задача 10.3. Груз массой M совершает колебания на пружине, подвешенной верхним концом к потолку, по закону $x = b \sin \omega t$.

Определить силу упругости пружины. Массой пружины пренебречь. Начало оси x, направленной по вертикали вниз, находится в положении равновесия груза (рис.).

Решение. К грузу приложены две силы: сила тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ и сила упругости пружины, проекция которой на ось x равна F_x.

Для решения задачи методом кинетостатики прикладываем к грузу еще силу инерции $\boldsymbol{J} = -M\boldsymbol{a}$.

Зная закон движения груза $x = b \sin \omega t$, определяем проекцию его ускорения на ось x:

$$a_x = \ddot{x} = -b\omega^2 \sin \omega t.$$

Следовательно, проекция на ось x силы инерции $\boldsymbol{J}$ имеет вид

$$J_x = -Ma_x = Mb\omega^2 \sin \omega t.$$

Запишем уравнение кинетостатики груза в проекции на ось x. Мы можем уравнению движения формально придать вид уравнения равновесия, потому что силу инерции $\boldsymbol{J}$ приложили к грузу, в то время как в действительности она на груз не действует:

$$Mg + J_x + F_x = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$F_x = -(Mg + J_x).$$

Учитывая, что $J_x = Mb\omega^2 \sin \omega t$, получим

$$F_x = -(Mg + Mb\omega^2 \sin \omega t).$$

Нетрудно определить максимальное и минимальное значения силы $\boldsymbol{F}$:

$$F_{max} = Mg + Mb\omega^2, \quad F_{min} = Mg - Mb\omega^2.$$

Итак,

$$Mg - Mb\omega^2 \leqslant F \leqslant Mg + Mb\omega^2.$$

Не прибегая к методу кинетостатики, эту первую задачу можно было решить с помощью дифференциального уравнения движения груза в проекции на ось x:

$$M\ddot{x} = Mg + F_x.$$

Из последнего уравнения при учете соотношения $\ddot{x} = -b\omega^2 \sin \omega t$ легко находится

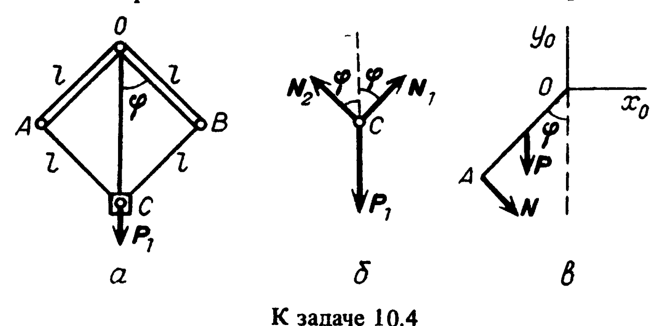
$$F_x = -(Mg + Mb\omega^2 \sin \omega t).$$

Таким образом, применение в этой задаче метода кинетостатики несколько более громоздко (приходится дополнительно определить и изобразить силу инерции).

Задача 10.4. Два стержня равной длиной l и силой тяжести P соединены шарнирно в точке O. Их концы A и B соединены при помощи невесомой нити длиной $2l$ с грузом P_1, который может перемещаться вдоль вертикальной оси.

Определить зависимость между угловой скоростью вращения системы ω вокруг вертикальной оси и углом отклонения стержней от вертикали φ (рис. *а*).

Р е ш е н и е. Рассмотрим равновесие сил, приложенных в точке C (рис. *б*). К точке C приложены силы: сила тяжести P_1, натяжения нитей



К задаче 10.4

N_1 и N_2. Проектируя все три силы на горизонтальную ось, приравниваем их сумму нулю:

$$N_1 \sin\varphi - N_2 \sin\varphi = 0,$$

откуда $N_1 = N_2 = N$. Сумма проекций сил, приложенных к. точке C, на вертикальную ось равна

$$2N\cos\varphi - P_1 = 0,$$

откуда

$$N = \frac{P_1}{2\cos\varphi}.$$

Переходим к рассмотрению движения стержня OA (рис. *в*). На этот стержень действуют силы: сила тяжести P, натяжение нити N, составляющие реакции шарнира x_0, y_0. Согласно методу кинетостатики, добавим к этим активным силам и реакциям связей силы инерции. Для этого возьмем на растоянии z от точки O элемент массой γdz стержня OA, где γ — масса единицы длины стержня. Сила инерции этого элемента равна

$$dJ = dm \cdot z\sin\varphi \cdot \omega^2 = \gamma\, dz \cdot z\sin\varphi \cdot \omega^2.$$

Сумма моментов всех активных сил, сил реакций и сил инерции, приложенных к стержню OA, относительно точки O равна

$$P\frac{l}{2}\sin\varphi + N\sin\varphi \cdot 2l\cos\varphi - \int_0^l \gamma z \cdot dz \cdot \sin\varphi \cdot \omega^2 x \cos\varphi = 0. \quad (1)$$

При вычислении момента силы реакции N относительно центра O переносим силу N в точку C и раскладываем ее на вертикальную ($N\cos\varphi$)

и горизонтальную ($N \sin \varphi$) составляющие. Момент вертикальной составляющей относительно точки O равен нулю, так как ее линия действия пересекает точку O. Момент горизонтальной составляющей равен $N \sin \varphi \cdot 2l \cos \varphi$. Из (1) находим

$$P \frac{l}{2} \sin \varphi + P_1 l \sin \varphi - \gamma \sin \varphi \cos \varphi \cdot \omega^2 \frac{l^3}{3} = 0.$$

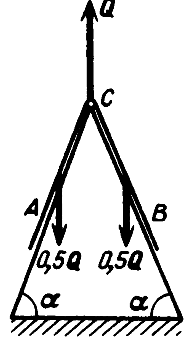
Масса стержня OA равна $P/g = \gamma l$. Следовательно,

$$\frac{P}{2} + P_1 - \frac{P}{g} \omega^2 \cos \varphi \cdot \frac{l}{3} = 0,$$

откуда

$$\omega^2 \cos \varphi = \left(1 + 2 \frac{P_1}{p}\right) \frac{3}{2} \frac{g}{l}.$$

Задача 10.5. Тяжелая гибкая цепь длиной l лежит на двух наклонных гладких плоскостях, образующих одинаковые углы α с горизонтом. Цепь ABC перекинута через небольшой блок (рис.). Вначале цепь находится в равновесии. Затем ей сообщают ничтожно малую скорость, благодаря которой она начинает скользить по плоскостям вправо.



К задаче 10.5

Определить скорость, которую приобретет цепь в тот момент, когда конец A будет проходить через блок C. Сила тяжести цепи равна Q.

Р е ш е н и е. Рассмотрим произвольное положение цепи. Пусть расстояние AC в этот момент равно x. Тогда натяжение цепи слева от блока равно

$$S = qx \sin \alpha + \frac{qx}{g} a. \tag{1}$$

Здесь q — сила тяжести единицы длины цепи, qx — сила тяжести левой части цепи, $\frac{qx}{g} a$ — сила инерции, направленная в сторону, противоположную ускорению цепи a. Аналогично находится натяжение цепи справа от блока. Оно равно

$$S_1 = q(l - x) \sin \alpha - \frac{q(l-x)}{g} a. \tag{2}$$

Приравнивая натяжение цепи справа и слева от блока, имеем

$$qx \sin \alpha + \frac{qx}{g} a = q(l - x) \sin \alpha - \frac{q(l-x)}{g} a, \tag{3}$$

или после приведения подобных членов

$$\frac{l}{g}a = l\sin\alpha - 2x\sin\alpha, \qquad (4)$$

откуда

$$a = g\sin\alpha - \frac{2g\sin\alpha}{l}x = g\sin\alpha\,\frac{l-2x}{l}. \qquad (5)$$

Замечая далее, что $a = dv/dt$, и умножая обе части на dx, находим

$$v\,dv = -a\,dx,$$

так как скорость v возрастает при уменьшении x.

Из (5) получаем

$$v\,dv = -g\sin\alpha\,dx + \frac{2g\sin\alpha}{l}x\,dx.$$

Интегрируя в пределах

$$\int_0^v v\,dv = -g\sin\alpha\int_{l/2}^x dx - \frac{2g\sin\alpha}{l}\int_{l/2}^x x\,dx,$$

находим

$$\frac{v^2}{2} = g\sin\alpha\cdot\left(\frac{l}{2}-x\right) - \frac{2g\sin\alpha}{l}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right).$$

Полагая $x = 0$, получаем искомый ответ:

$$v_1^2 = \frac{1}{2}gl\sin\alpha.$$

Эта задача была впервые решена французским ученым Пуассоном (1781–1840).

Задача 10.6. Две наклонные плоскости образуют углы α и β с горизонтом. К концам гибкой нерастяжимой нити прикреплены два тела массой m и m_1. Коэффициент трения тел о плоскость равен f. Пренебрегая массой нити, определить ускорение тел (рис. *а*).

Решение. Рассмотрим силы, действующие на левое тело (рис. *б*). На тело действуют: сила тяжести $m\boldsymbol{g}$, нормальная реакция плоскости $\boldsymbol{N}$, сила трения $\boldsymbol{F}$, натяжение нити $\boldsymbol{T}$. Согласно методу кинетостатики добавляем к действующим на тело силам силу инерции $\boldsymbol{J} = -m\boldsymbol{a}$. При этом полагаем, что ускорение левого тела направлено по наклонной плоскости вверх, а ускорение правого тела – вниз.

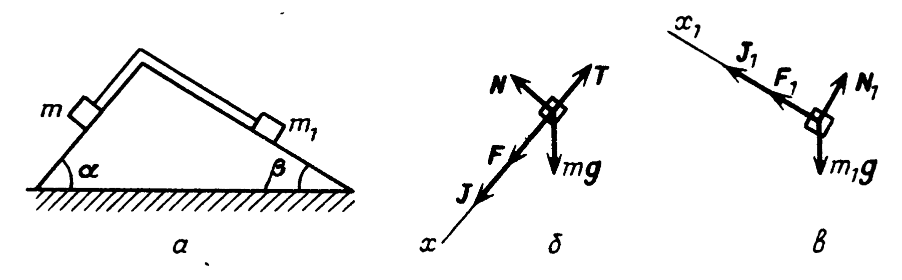
Проектируя все силы, действующие на левое тело, на ось x, лежащую в левой наклонной плоскости, находим

$$T - F - J - mg\sin\alpha = 0,$$

или

$$T = mg\sin\alpha + ma + F. \qquad (1)$$

Сила трения равна произведению коэффициента трения на силу нормального давления, а эта сила определяется из равенства нулю проекций



К задаче 10.6

сил на перпендикуляр к наклонной плоскости:

$$N - mg\cos\alpha = 0, \quad F = fN = f\,mg\cos\alpha.$$

Внося значение силы трения в уравнение (1), имеем

$$T = mg\sin\alpha + ma + f\,mg\cos\alpha. \qquad (2)$$

Переходим к рассмотрению равновесия сил, приложенных к правому телу (рис. *в*). Проектируя все силы на направление наклонной плоскости, находим

$$m_1 g\sin\beta - F_1 - J_1 - T = 0,$$

откуда

$$T = m_1 g\sin\beta - F_1 - m_1 a. \qquad (3)$$

Аналогично находим силу нормального давления и силу трения:

$$N_1 - m_1 g\cos\beta = 0, \quad F_1 = fN_1 = fm_1 g\cos\beta.$$

Внося это значение силы трения в уравнение (3), имеем

$$T = m_1 g\sin\beta - fm_1 g\cos\beta - m_1 a. \qquad (4)$$

Натяжение нити в (2) и (4) одинаковое. Следовательно, равны правые части этих уравнений:

$$mg\sin\alpha + ma + f\,mg\cos\alpha = m_1 g\sin\beta - fm_1 g\cos\beta - m_1 a.$$

Отсюда определяем искомое ускорение тел

$$a = \frac{g}{m_1 + m_2}\,[m_1(\sin\beta - f\cos\beta) - m(\sin\alpha + f\cos\alpha)].$$

Задача 10.7. Два прямолинейных стержня, жестко соединенных между собой под прямым углом, несут на концах два шара силой тяжести $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$. Стержни шарнирно закреплены в точке O и вращаются вокруг вертикальной оси с постоянной по модулю угловой скоростью ω (рис. *а*).

Определить угол φ, если $l_2 = 2l_1$, $P_1 = 2P_2$. Массой стержней пренебречь. Определить также реакции шарнира O.

Р е ш е н и е. Применим к решению задачи метод кинетостатики. Так как вращение вокруг вертикальной оси происходит с постоянной по модулю угловой скоростью, то для составления уравнений равновесия следует приложить к шарам нормальные силы инерции:

$$J_1 = m_1\omega^2 l_1 \sin\varphi, \quad J_2 = m_2\omega^2 l_2 \sin(90^\circ - \varphi). \qquad (1)$$

Тогда система сил, приложенных к рассматриваемому твердому телу, будет составлять (рис. *б*): из двух сил тяжести $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$, двух сил инерции $\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2$ и двух составляющих реакции в шарнире O (X_O и Y_O).

Составляем три уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = J_2 - J_1 + X_O = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{yi} = Y_O - P_1 - P_2 = 0, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_O(P_i) = J_2 l_2 \cos(90^\circ - \varphi) - J_1 l_1 \cos\varphi -$$

$$- P_2 l_2 \sin(90^\circ - \varphi) + P_1 l_1 \sin\varphi = 0. \qquad (4)$$

а *б*

К задаче 10.7

Из уравнения (2), внося значения сил инерции (1), находим

$$X_O = J_1 - J_2 = m_1 \omega^2 l_1 \sin\varphi - m_2 \omega^2 l_2 \sin(90^\circ - \varphi) =$$

$$= \frac{P_1}{g} \omega^2 l_1 \sin\varphi - \frac{P_1}{2g} \omega^2 2l_1 \cos\varphi = \frac{P_1}{g} \omega^2 l_1 (\sin\varphi - \cos\varphi).$$

Из уравнения (3) получаем

$$V_O = P_1 + P_2 = 3P_2.$$

Из уравнения (4) находим равенство, определяющее угол φ:

$$\frac{P_2}{g} \omega^2 l_2 \cos\varphi \cdot l_2 \sin\varphi - P_2 l_2 \cos\varphi - \frac{P_1}{g} \omega^2 l_1 \sin\varphi \cdot l_1 \cos\varphi +$$

$$+ P_1 l_1 \sin\varphi = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения $P_1 = 2P_2$ и $l_2 = 2l_1$, находим после несложных преобразований

$$\frac{P_2}{g} \omega^2 l_2^2 \cos\varphi \sin\varphi - P_2 l_2 \cos\varphi - \frac{2P_2}{g} \omega^2 \frac{l_2^2}{4} \sin\varphi \cos\varphi +$$

$$+ 2P_2 \frac{l_2}{2} \sin\varphi = 0,$$

или окончательно после очевидных сокращений

$$\frac{\omega^2}{g} \frac{l_2}{2} = \frac{1}{\sin\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Задача 10.8. Однородный стержень AB шарнирно закреплен в точке O. При этом $OA = b$, $OB = d$. Стержень вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Масса стержня m (рис. *а*).

Определить, на какой угол φ стержень отклонится от вертикальной оси.

Решение. Масса единицы длины стержня равна

$$\gamma = \frac{m}{b+d}. \qquad (1)$$

Выделим на расстоянии x от шарнира O элемент стержня длиной dx (рис. *б*). Нормальная сила инерции этого элемента равна произведению массы $\gamma\, dx$ элемента на нормальное ускорение $x \sin\varphi \cdot \omega^2$:

$$J_{ni} = \gamma\, dx \cdot x \sin\varphi \cdot \omega^2.$$

Момент этой силы инерции относительно шарнира O равен

$$J_{ni} x \cos\varphi = \gamma \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi \cdot x^2\, dx.$$

Составим сумму моментов всех сил инерции и силы тяжести относительно шарнира O и приравняем эту сумму нулю согласно методу кинетостатики:

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0, \qquad (2)$$

где сумма моментов сил инерции стержня OA равна

$$M_1 = -\int_0^b \gamma\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi \cdot x^2\,dx = -\gamma\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^b = -\frac{\gamma\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi \cdot b^3}{3},$$

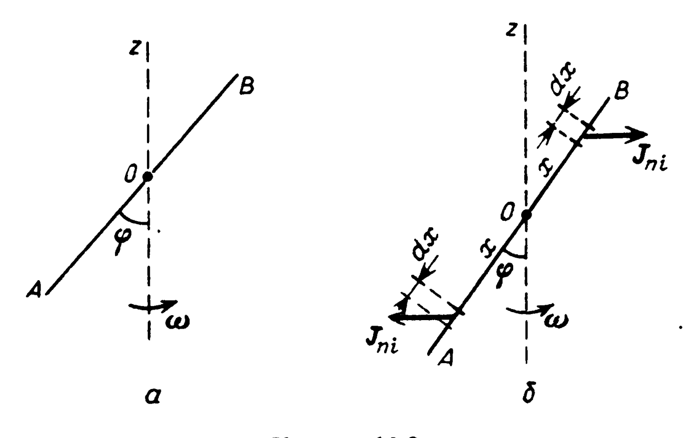
сумма моментов сил инерции стержня OB равна

$$M_2 = -\int_0^d \gamma\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi \cdot x^2\,dx = -\gamma\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^d = -\frac{\gamma\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi \cdot d^3}{3},$$

а момент силы тяжести относительно шарнира O равен с учетом (1)

$$M_3 = mg\left(b - \frac{b+d}{2}\right)\sin\varphi = \gamma(b+d)\,\frac{b-d}{2}\,g\sin\varphi = \frac{\gamma g}{2}\sin\varphi\cdot(b^2 - d^2).$$

Внося значения всех трех моментов сил и сил инерции в уравнение (2),



К задаче 10.8

находим

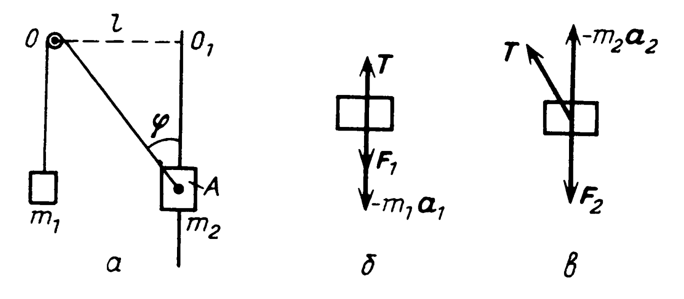
$$-\frac{\gamma\omega^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{3}(b^3+d^3)+\frac{\gamma g}{2}\sin\varphi \cdot (b^2-d^2)=0, \qquad (3)$$

откуда

$$\cos\varphi=\frac{3}{2}\,\frac{g}{\omega^2}\,\frac{(b^2-d^2)}{(b^3+d^3)}\,. \qquad (4)$$

При получении этого ответа мы сократили в уравнении (3) в обоих слагаемых $\sin\varphi$. Однако это можно делать, только если $\sin\varphi \neq 0$. Если же $\sin\varphi = 0$, то это определяет второе решение уравнения (3). Однако это решение $\varphi = 0$ является неустойчивым. Это значит, что при сколь угодно малом отклонении угла φ от нулевого значения стержень займет устойчивое положение, определяемое формулой (4).

Задача 10.9. К концам нити, перекинутой через небольшой блок, подвешены два груза массой m_1 и m_2. Груз m_1 висит свободно, груз m_2 скользит по гладкой вертикальной стойке вниз. В начальный момент груз m_2 находился на одной горизонтали с блоком в покое. Расстояние от блока



К задаче 10.9

до стойки равно l. Переменный угол между стойкой и нитью обозначен φ (рис. *а*).

Определить скорость груза m_2 как функцию пройденного им пути.

Р е ш е н и е. Обозначим длину пути, пройденного грузом m_2, через x, натяжение нити $\boldsymbol{T}$, скорости грузом v_1 и v_2, ускорения грузов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Согласно методу кинетостатики, запишем уравнения для каждого груза:

$$F_1+m_1a_1-T=0, \qquad (1)$$

$$F_2-m_2a_2-T\cos\varphi=0, \qquad (2)$$

где $F_1=m_1g$, $F_2=m_2g$ – силы тяжести грузов. Ускорение груза m_2 направлено вниз, груза m_1 – вверх, а соответствующие им силы инерции – в противоположном ускорениям направлениях (рис. *б* и *в*). Исключая

из уравнений (1) и (2) натяжение нити T, получаем

$$(F_1 + m_1 a_1)\cos\varphi = F_2 - m_2 a_2. \qquad (3)$$

Дадим грузу m_2 бесконечно малое перемещение dx вниз. При этом груз m_1 поднимается на величину ds. Зависимость между этими перемещениями имеет вид

$$ds = dx \cdot \cos\varphi. \qquad (4)$$

Действительно, дифференцируя равенство $x^2 + l^2 = s^2$, где $s = OA$, находим $2x\,dx = 2s\,ds$, откуда $\frac{x}{s}\,dx = ds$. Но $x/s = \cos\varphi$; следовательно, справедливо равенство (4). Разделив обе части уравнения (4) на dt, получим

$$v_1 = v_2\cos\varphi = v_2\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}. \qquad (5)$$

Вычисляем производную по времени от обеих частей этого уравнения:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt}\,\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} + v_2^2\,\frac{l^2}{\sqrt{(l^2 + x^2)^3}}. \qquad (6)$$

Используя обычные обозначения

$$\frac{dv_1}{dt} = a_1, \quad \frac{dv_2}{dt} = a_2, \qquad (7)$$

запишем уравнение (6) так:

$$a_1 = a_2\,\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} + v_2^2\,\frac{l^2}{\sqrt{(l^2 + x^2)^3}}. \qquad (8)$$

Вносим найденное значение a_1 в уравнение (3):

$$a_2\left(\frac{m_1 x\cos\varphi}{\sqrt{l^2 + x^2}} + m_2\right) = F_2 - F_1\cos\varphi - \frac{m_1 v_2^2 l^2}{\sqrt{(l^2 + x^2)^3}}\cos\varphi; \qquad (9)$$

но $\cos\varphi = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}$, и, следовательно, уравнение (9) примет вид

$$a_2\left(m_2 + \frac{m_1 x^2}{l^2 + x^2}\right) + v_2^2\,\frac{m_1 l^2 x}{(l^2 + x^2)^2} = F_2 - F_1\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}. \qquad (10)$$

Отсюда находим

$$\frac{d}{dx}\left[v_2^2\left(m_2+\frac{m_1x^2}{l^2+x^2}\right)\right]=2\left(F_2-F_1\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}\right). \qquad (11)$$

Умножая обе части равенства (11) на dx и интегрируя, имеем

$$v_2^2\left(m_2+\frac{m_1x^2}{l^2+x^2}\right)=2F_2x-2F_1\sqrt{l^2+x^2}+C, \qquad (12)$$

где C – произвольная постоянная интегрирования. Находим ее, подставляя в уравнение (12) начальные условия: при $t=0$ $x=0$, $v_2=0$. Тогда

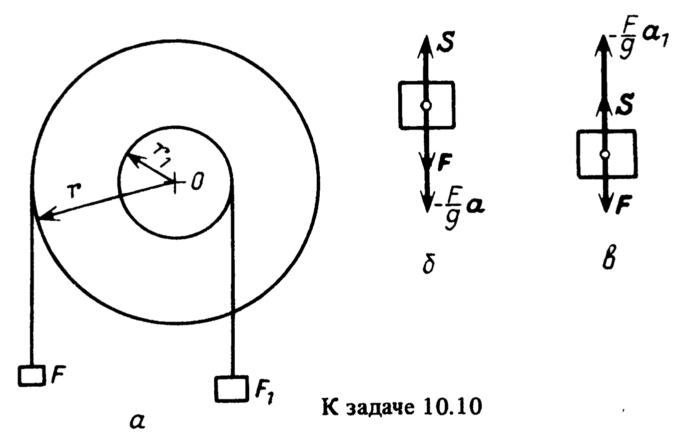
$$C=2F_1l.$$

Внося значение C в уравнение (12), находим искомую скорость падающего груза

$$v^2=2g\frac{F_2x-F_1(\sqrt{l^2+x^2}-l)}{F_2+F_1\dfrac{x^2}{l^2+x^2}}=$$

$$=2g\frac{m_2x-m_1(\sqrt{l^2+x^2}-l)}{m_2+m_1\dfrac{x^2}{l^2+x^2}}.$$

Задача 10.10. На вал радиусом r_1 и на барабан радиусом r намотаны два невесомых каната, к концам которых подвешены грузы F_1 и F



К задаче 10.10

(рис. *а*). Под действием этих грузов вал с барабаном начинают вращаться по ходу часовой стрелки как одно твердое тело вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через центр вала. Массами вала и барабана пренебречь.

Определить угловое ускорение вала с барабаном ϵ. Найти время t, в течение которого груз F_1 опустится на высоту h. Определить натяжения канатов S и S_1.

Р е ш е н и е. Рассмотрим, воспользовавшись методом кинетостатики, силы, действующие на груз F (рис. *б*). К грузу приложены: сила тяжести F, натяжение каната S и сила инерции $-\frac{F}{g}a$, направленная в сторону, противоположную ускорению. Сумма проекций всех этих сил, включая силу инерции, на вертикаль равна нулю:

$$F + \frac{F}{g} a - S = 0. \qquad (1)$$

Аналогично, рассматривая груз F_1, запишем равенство нулю всех сил в проекции на вертикаль:

$$F_1 - S_1 - \frac{F_1}{g} a_1 = 0. \qquad (2)$$

Ускорения грузов a и a_1 выразим как произведения соответствующих радиусов на угловое ускорение ϵ:

$$a = r\epsilon, \quad a_1 = r_1\epsilon. \qquad (3)$$

Внося эти значения ускорений в формулы (1) и (2), находим

$$S = F + \frac{F}{g} r\epsilon, \qquad S_1 = F_1 - \frac{F_1}{g} r_1\epsilon. \qquad (4)$$

Так как систему сил после приложения сил инерции можно рассматривать как находящуюся в равновесии, запишем равенство моментов сил относительно оси вращения:

$$Sr = S_1 r_1, \qquad (5)$$

или

$$r\left(F + \frac{F}{g} r\epsilon\right) = r_1\left(F_1 - \frac{F_1}{g} r_1\epsilon\right),$$

откуда находится угловое ускорение

$$\epsilon = g\,\frac{F_1 r_1 - Fr}{Fr^2 + F_1 r_1^2}. \qquad (6)$$

Ускорение груза F_1 равно

$$a_1 = r_1\epsilon = r_1 g\,\frac{F_1 r_1 - Fr}{Fr^2 + F_1 r_1^2}. \qquad (7)$$

Согласно (7), ускорение груза F_1 – постоянная величина.

Следовательно, путь, пройденный грузом F_1, равен $h = \frac{1}{2} a_1 t^2$, откуда

$$t^2 = \frac{2h}{a_1} = \frac{2h}{r_1 g} \frac{Fr^2 + F_1 r_1^2}{F_1 r_1 - Fr} .$$

Натяжения канатов находим из уравнений (4), подставляя в них найденное значение углового ускорения (6):

$$S = \frac{FF_1 r_1 (r_1 + r)}{Fr^2 + F_1 r_1^2}, \qquad S_1 = \frac{FF_1 r (r_1 + r)}{Fr^2 + F_1 r_1^2} .$$

Задача 10.11. Решить предыдущую задачу, учитывая массу вала и барабана.

Решение. Касательная сила инерции элемента dm массы вала и барабана равна

$$J_i = \rho \epsilon \, dm. \tag{1}$$

Ее момент относительно оси вращения z, распространенный на всю массу вала и барабана, равен

$$m_z(J_i) = \int_0^r \rho \epsilon \, dm \cdot \rho = \epsilon \int_0^r \rho^2 dm = I_z \epsilon, \tag{2}$$

где I_z – момент инерции вала и барабана относительно оси вращения z, проходящей через их центр, перпендикулярно плоскости рис. *а* предыдущей задачи. Тогда дифференциальное уравнение вращения системы, состоящей из вала и барабана, примет вид

$$I_z \epsilon = S_1 r_1 - Sr, \tag{3}$$

где S, S_1 – натяжения канатов. Сравнивая это равенство с уравнением (5) предыдущей задачи, мы видим, что оно отличается наличием члена $I_z \epsilon$. Если его перенести в левую часть со знаком минус, то, согласно методу кинетостатики, это слагаемое будет определять сумму моментов сил инерции относительно оси вращения. Уравнения (1)–(3) предыдущей задачи и в нашем случае остаются неизменными:

$$F + \frac{F}{g} a - S = 0, \tag{4}$$

$$F_1 - S_1 - \frac{F_1}{g} a_1 = 0, \tag{5}$$

$$a = r\epsilon, \quad a_1 = r_1 \epsilon. \tag{6}$$

Внося значения ускорений (6) в уравнения (4) и (5), находим

$$S = F + \frac{F}{g} r\epsilon, \qquad S_1 = F_1 - \frac{F_1}{g} r_1 \epsilon. \tag{7}$$

Подставляя найденные значения натяжений канатов (7) в уравнение (3), получаем

$$I_z\epsilon = F_1r_1 - \frac{F_1}{g} r_1^2\epsilon - Fr - \frac{F}{g} r^2\epsilon.$$

Отсюда находится угловое ускорение вала с барабаном:

$$\epsilon = g \frac{F_1r_1 - Fr}{F_1r_1^2 + Fr^2 + I_z g} .$$

Так как угловое ускорение – постоянная величина, то уравнение движения груза F_1 будет иметь вид

$$h = \frac{1}{2} a_1 t^2, \qquad (8)$$

где $a_1 = r_1\epsilon = \text{const}$.

Из уравнения (8) находим

$$t^2 = \frac{2h}{a_1} = \frac{2h}{r_1\epsilon} = \frac{2h}{r_1} \frac{F_1r_1^2 + Fr^2 + I_z g}{g(F_1r_1 - Fr)} .$$

Натяжения канатов получим, внеся значение углового ускорения в формулы (7):

$$S = F \frac{F_1r_1(r_1 + r) + I_z g}{F_1r_1^2 + Fr^2 + I_z g}, \qquad S_1 = F_1 \frac{Fr(r_1 + r) + I_z g}{F_1r_1^2 + Fr^2 + I_z g} .$$

Задача 10.12. На блок массой m и радиусом r намотан трос, массой которого пренебрегаем. К концам троса подвешены грузы P и Q, причем $P > Q$ (рис). Блок, масса которого распределена по ободу, может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O, проходящей через его центр.

Определить ускорение грузов и силу давления на подшипники, в которых вращается ось блока.

Р е ш е н и е. Согласно методу кинетостатики, приложим к системе, состоящей из блока, оси и двух грузов, силы тяжести P, Q, mg, реакцию подшипников N и силы инерции $-\frac{P}{g}a$, $-\frac{Q}{g}a$. Буквой a обозначено ускорение грузов. Кроме того, необходимо приложить силы инерции – нормальную J_{ni} и касательную $J_{\tau i}$ – к элементу обода длиной ds.

Касательная сила инерции для элемента обода длиной ds равна

$$J_{\tau i} = a \frac{m}{2\pi r} ds.$$

Нормальные силы инерции направлены по нормали к элементу обода ds. Эти силы стремятся разорвать обод. Линии действия нормальных сил инерции пересекаются в центре O и в сумме равны нулю. Таким образом, нормальные силы инерции не оказывают никакого влияния ни на модуль ускорения грузов a, ни на силу давления на подшипники.

Составим сумму моментов всех сил и сил инерции относительно точки O. Согласно методу кинетостатики, эта сумма моментов равна нулю:

$$\left(-\frac{P}{g}a+P\right)r-\left(\frac{Q}{g}a+Q\right)r-r\int_0^{2\pi r}a\frac{m}{2\pi r}\,ds=0.$$

После сокращения на r и интегрирования в последнем члене левой части получим

$$-\frac{P}{g}a+P-\frac{Q}{g}a-Q-ma=0.$$

Отсюда определяется ускорение грузов, равное касательному ускорению точек на ободе блока:

$$a=\frac{(P-Q)g}{P+Q+mg}. \tag{1}$$

Перейдем к определению силы давления на подшипник. Касательные силы инерции образуют пару сил, которая не оказывает влияния на силу давления, испытываемую подшипником. Следовательно, сила давления N определится из равенства нулю суммы проекций сил на вертикаль, включая силы инерции грузов:

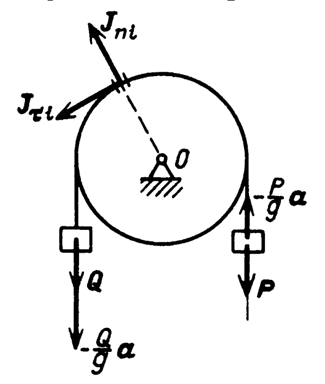
$$mg+P+Q-\frac{P}{g}a+\frac{Q}{g}a-N=0.$$

Отсюда находим

$$N=mg+P+Q-\frac{P-Q}{g}a.$$

Вносим в это уравнение значение ускорения (1):

$$N=mg+P+Q-\frac{(P-Q)^2}{P+Q+mg}. \tag{2}$$



К задаче 10.12

Отметим, что в частном случае, если пренебречь силой тяжести обода блока, положив в (2) $mg=0$,

$$N=\frac{4PQ}{P+Q}. \tag{3}$$

В этом случае, если убрать один из грузов, то никакого давления на подшипники не будет, так как при $P = 0$ или $Q = 0$ сила давления на подшипники N обращается, согласно (3), в нуль.

В настоящее время в инженерной практике происходит постепенное вытеснение метода кинетостатики общими теоремами динамики и уравнениями Лагранжа.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 41.1–41.4, 41.7, 41.8, 41.10, 41.11, 41.13, 41.14, 41.16, 41.17, 41.20–41.23.

§ 3. ДАВЛЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ОСЬ ВРАЩЕНИЯ

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси возникают динамические давления на опоры твердого тела. Пусть подвижные оси xyz связаны с твердым телом (рис. 10.14); O – произвольная точка на оси вращения, ось z направлена вдоль оси вращения. Оси x и y выбраны так, чтобы вместе с осью z образовать правую систему осей координат. M – масса твердого тела, $\vec{\omega}$ – угловая скорость твердого тела, $\vec{\epsilon}$ – угловое ускорение твердого тела, $C(x_C, y_C, z_C)$ – центр масс твердого тела, I_{xz}, I_{yz} – центробежные моменты инерции твердого тела, d, b – расстояние от опор A, B до начала координат O; N'_{Ax}, N'_{Ay}, N'_{Az}, N'_{Bx}, N'_{By}, N'_{Bz} – составляющие динамических давлений на опоры; N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Az}, N_{Bx}, N_{By}, N_{Bz} – составляющие давлений на опоры, равные суммам соответствующих статических и динамических давлений.

Эту задачу можно решить методом кинетостатики. В результате приведения сил инерции твердого тела к центру O получается сила, равная главному вектору $V^{(J)}$, и пара сил, момент которой равен главному моменту $m_O^{(J)}$ сил инерции.

Проекции главного вектора $V_x^{(J)}$, $V_y^{(J)}$, $V_z^{(J)}$ сил инерции твердого тела на подвижные оси координат x, y, z, связанные с твердым телом, имеют вид

$$V_x^{(J)} = Mx_C\omega^2 + My_C\epsilon_z, \qquad V_y^{(J)} = My_C\omega^2 - Mx_C\epsilon_z, \qquad V_z^{(J)} = 0.$$

Модуль главного вектора сил инерции равен

$$V^{(J)} = M\rho_C\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4},$$

где $\rho_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$ – эксцентриситет, т.е. расстояние от центра масс C твердого тела до оси вращения.

Главный вектор сил инерции обращается в нуль, когда $\rho_C = 0$, т.е. центр масс C твердого тела лежит на оси вращения z.

Главные моменты сил инерции твердого тела относительно подвижных осей координат x, y, z, связанных с твердым телом, записываются в форме

$$m_x^{(J)} = -I_{yz}\omega^2 + I_{xz}\epsilon_z, \quad m_y^{(J)} = I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\epsilon_z, \quad m_z^{(J)} = -I_z\epsilon_z.$$

Введем вспомогательный момент $m_O^{(J)*}$, отличающийся от главного момента сил инерции относительно центра O отсутствием составляющей главного момента сил инерции относительно оси вращения z. Модуль этого момента равен

$$m_O^{(J)*} = \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2} \cdot \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

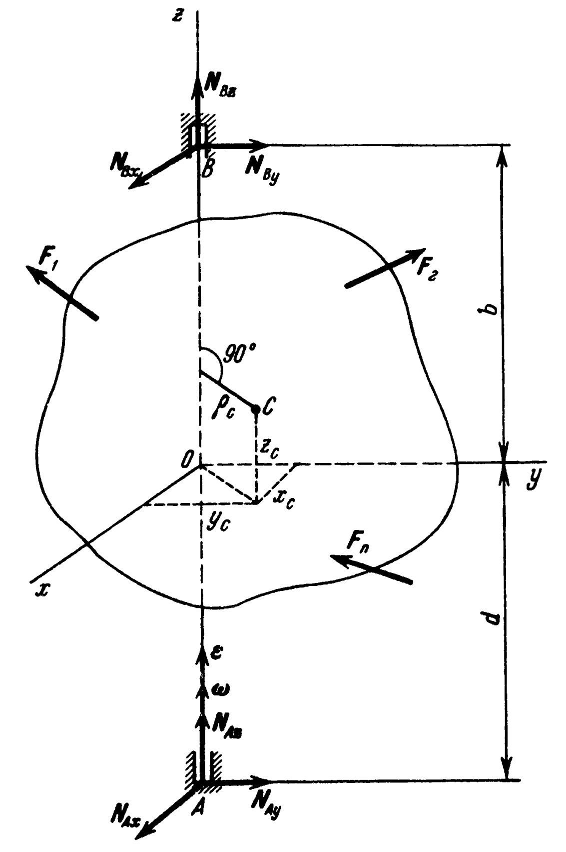


Рис. 10.14

Момент $m_O^{(J)*}$ обращается в нуль, если $I_{xz} = I_{yz} = 0$, т.е. когда ось вращения z является главной осью инерции в точке O.

Для того чтобы *силы инерции* твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, *были уравновешены* в смысле $V^{(J)} = 0$, $m_O^{(J)*} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы *ось вращения z была главной центральной осью инерции твердого тела* ($\rho_C = 0$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$).

При выполнении этих условий боковые динамические давления на опоры равны нулю: $N'_{Ax} = N'_{Ay} = N'_{Bx} = N'_{By} = 0$. (Сумма составляющих полных давлений, направленных вдоль оси вращения z, всегда равна нулю: $N'_{Az} + N'_{Bz} = 0$.) При этом полные давления на опоры равны соответствующим статическим давлениям.

Если силы инерции вращающегося твердого тела не уравновешены, то составляющие динамических боковых давлений N'_{Ax}, N'_{Ay}, N'_{Bx}, N'_{By} находятся из системы уравнений

$$N'_{Ax} + N'_{Bx} = Mx_C\omega^2 + My_C\epsilon_z,$$

$$N'_{Ay} + N'_{By} = My_C\omega^2 - Mx_C\epsilon_z,$$

$$N'_{Ay}d - N'_{By}b = -I_{yz}\omega^2 + I_{xz}\epsilon_z, \qquad (1^*)$$
$$-N'_{Ax}d + N'_{Bx}b = I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\epsilon_z.$$

Величины составляющий полных давлений $N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Az}, N_{Bx}, N_{By}, N_{Bz}$, равные сумам соответствующих статических и динамических давлений, определяются из системы уравнений

$$N_{Ax} + N_{Bx} = Mx_C\omega^2 + My_C\epsilon_z + \sum_{k=1}^{n} F_{kx},$$

$$N_{Ay} + N_{By} = My_C\omega^2 - Mx_C\epsilon_z + \sum_{k=1}^{n} F_{ky},$$

$$N_{Az} + N_{Bz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}, \qquad (2^*)$$

$$N_{Ay}d - N_{By}b = -I_{yz}\omega^2 + I_{xz}\epsilon_z + \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k),$$

$$-N_{Ax}d + N_{Bx}b = I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\epsilon_z + \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k),$$

где $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – активные силы.

Из третьего уравнения системы (2*), аналогичного соответствующему уравнению статики, может быть определена сумма величин составляющих давлений N_{Az} и N_{Bz}. Каждая из них в отдельности не может быть вычислена. Если опора B выполнена в виде цилиндрического подшипника, то $N_{Bz} = 0$ и, следовательно, $N_{Az} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$.

Задачи, в которых требуется определить боковые динамические давления на опоры, решаются с помощью системы уравнений (1*).

Задачи, в которых требуется определить полные давления на опоры, решаются посредством системы уравнений (2*).

Указание. Задачи на определение полных давлений вращающегося твердого тела на ось вращения рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать подвижные оси x, y, z, связанные с вращающимся твердым телом, направив ось z вдоль оси вращения (если центр масс C лежит на оси вращения, то удобно начало координат O совмещать с центром масс C; если центр масс C не лежит на оси вращения, то начало координат следует брать в основании перпендикуляра, опущенного из центра масс C на ось вращения z, либо в одной из опор твердого тела);

2) изобразить на рисунке систему активных сил;

3) вычислить координаты центра масс C твердого тела x_C и y_C;

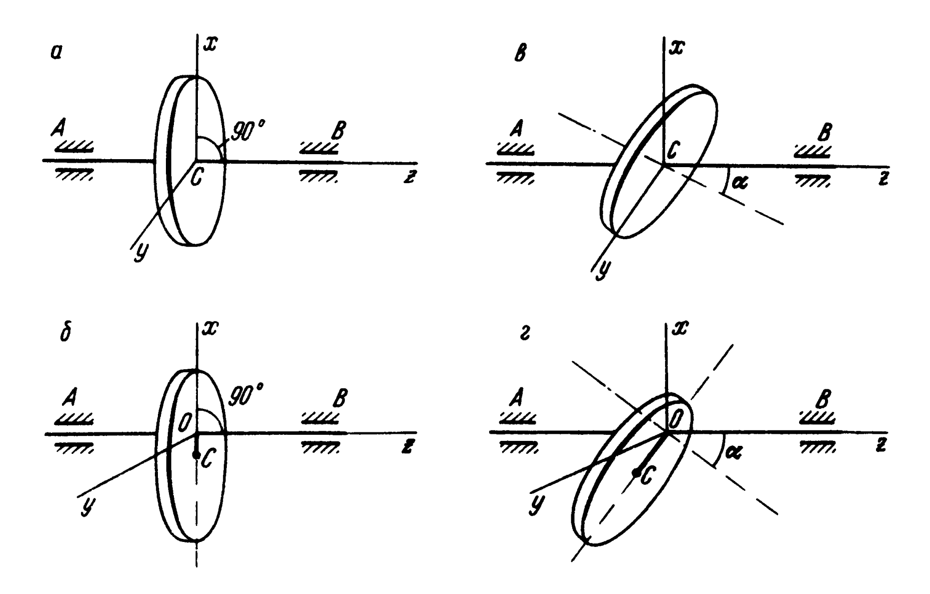
4) вычислить центробежные моменты инерции твердого тела I_{xz} и I_{yz};

5) а) если неизвестными величинами являются боковые динамические давления на опоры, то составить систему уравнений (1*); б) если неизвестными величинами являются полные давления на опоры, то составить систему уравнений (2*);

6) решив систему уравнений (1*) или (2*), определить искомые величины.

При решении задач, в которых определяются боковые динамические давления на опоры, второй пункт решения задачи следует опустить.

Задача 10.13. Однородный круглый диск вращается вокруг неподвижной оси. Как следует расположить ось вращения диска по отношению к



К задаче 10.13

его оси симметрии для того, чтобы динамические давления на опоры были равны нулю?

Р е ш е н и е. Для того чтобы отсутствовали динамические давления на опоры, главный вектор $V^{(J)}$ и вспомогательный момент сил инерции $m_O^{(J)*}$ должны быть равны нулю: $V^{(J)} = 0$, $m_O^{(J)*} = 0$. Так как

$$V^{(J)} = M\rho_C\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} \quad \text{и} \quad m_O^{(J)*} = \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2}\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4},$$

то

$$M\rho_C\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} = 0; \qquad \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2}\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} = 0.$$

Величины M, ω и ϵ не равны нулю, поэтому $\rho_C = 0$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$, т.е. ось вращения z должна быть главной центральной осью инерции диска.

Для выполнения полученных условий ось вращения диска следует совместить с его осью симметрии. Действительно, ось симметрии однородного круглого диска проходит через его центр масс, т.е. $\rho_C = 0$, и, следовательно, главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ равен нулю. Кроме того, ось симметрии диска перпендикулярна плоскости его материальной симметрии, т.е. является его главной осью инерции в точке пересечения с этой плоскостью, т.е. $I_{xz} = I_{yz} = 0$. Следовательно, вспомогательный момент сил инерции равен нулю. Итак, для того чтобы динамические давления на опоры были равны нулю, ось вращения диска должна совместиться с его осью симметрии, т.е. должна проходить через центр масс диска перпендикулярно плоскости его симметрии (рис. *а*).

Если ось вращения диска z перпендикулярна его плоскости материальной симметрии xy, но не проходит через центр масс C диска (рис. *б*), то эксцентриситет ρ_C не равен нулю. Следовательно, главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ не равен нулю. При этом возникают динамические боковые давления на опоры A и B, которые даже при малом значении эксцентриситета ρ_C, но большой угловой скорости ω во много раз превосходят соответствующие статические давления. Подобная неуравновешенность называется *статической*, так как может быть обнаружена при отсутствии вращения диска.

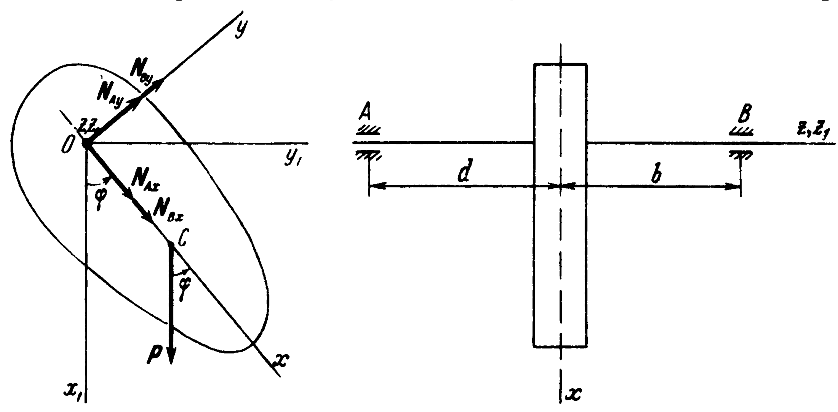
Если ось вращения диска проходит через его центр масс C, но не перпендикулярна плоскости материальной симметрии (рис. *в*), т.е. $\alpha \neq 0$, то ось z не является главной ($I_{xz} \neq 0$ и $I_{yz} \neq 0$). Следовательно, вспомогательный момент сил инерции $m_O^{(J)*}$ не равен нулю и возникают динамические боковые давления на опоры A и B, которые даже при малых углах α, но большой угловой скорости ω достигают больших значений. Такая неуравновешенность называется *моментной*. Она обнаруживается только при вращении диска.

Практически невозможно насадить диск на ось вращения так, чтобы она совместилась с его осью симметрии, т.е. чтобы ρ_C и α равнялись нулю (рис. *г*). Следовательно, главный вектор и вспомогательный момент сил инерции не равны нулю и возникают динамические боковые давления на опоры A и B, которые значительно больше соответствующих статических давлений.

Проблема устранения динамических давлений играет большую роль в современной технике, так как в конструкциях машин-двигателей и производственных машин обычно имеется деталь (либо узел деталей), которая с большой угловой скоростью вращается вокруг неподвижной оси (турбинный диск, ротор электрического мотора или генератора, шпиндель токарного или расточного станков и т.д.).

Задача 10.14. Маятник массой M, совершающий качания около горизонтальной оси, имеет плоскость симметрии, перпендикулярную этой оси (рис.).

Определить полные давления на опоры A и B, отстоящие от плоскости материальной симметрии соответственно на расстояниях d и b; l – расстояние от центра масс маятника до оси подвеса, I_z – момент инерции маятника относительно оси подвеса. В начальный момент маятник был отклонен от вертикали на угол φ_0 и отпущен без начальной скорости.



К задаче 10.14

Решение. Направления выбранных неподвижных осей x_1, y_1, z_1 и подвижных осей x, y, z, связанных с маятником, указаны на рисунке. Координаты центра масс C маятника равны

$$x_C = l, \quad y_C = 0. \tag{1}$$

Так как ось привеса z перпендикулярна к плоскости материальной симметрии маятника, то она является главной осью инерции в точке O пересечения с этой плоскостью. Следовательно,

$$I_{xz} = I_{yz} = 0. \tag{2}$$

Единственной активной силой является сила тяжести $P = Mg$ маятника. Опорами служат подшипники A и B. Поэтому составляющие давлений вдоль оси привеса z отсутствуют: $N_{Az} = N_{Bz} = 0$.

Учитывая формулы (1) и (2), составляем систему уравнений (2*) для определения величин составляющих полных давлений:

$$N_{Ax} + N_{Bx} = Ml\dot{\varphi}^2 + Mg\cos\varphi, \tag{3}$$

$$N_{Ay} + N_{By} = -Ml\ddot{\varphi} - Mg\sin\varphi, \tag{4}$$

$$N_{Ay}d - N_{By}b = 0, \tag{5}$$

$$-N_{Ax}d + N_{Bx}b = 0. \tag{6}$$

Из уравнения (5) находим

$$N_{Ay} = \frac{b}{d} N_{By}, \tag{7}$$

и из (6) имеем

$$N_{Ax} = \frac{b}{d} N_{Bx}. \tag{8}$$

После подстановки значения N_{Ax} из формулы (8) в уравнение (3) и значения N_{Ay} из формулы (7) в уравнение (4) получаем

$$N_{Bx} = \frac{d}{d+b} M(l\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi), \tag{9}$$

$$N_{By} = -\frac{d}{d+b} M(l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi). \tag{10}$$

Остается в формулы (9) и (10) подставить выражения $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ через угол поворота φ. Для этого составим дифференциальное уравнение качаний маятника:

$$I_z\ddot{\varphi} = -Mgl\sin\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} = -\frac{Mgl}{I_z}\sin\varphi. \tag{11}$$

Умножив левую и правую части уравнения (11) на $d\varphi$ и проинтегрировав его, получим:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{Mgl}{I_z}\cos\varphi + C.$$

Воспользовавшись начальными условиями движения: при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, находим, что $C = -\frac{Mgl}{I_z}\cos\varphi_0$. Итак,

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{Mgl}{I_z}(\cos\varphi - \cos\varphi_0). \tag{12}$$

Подставив значение $\dot{\varphi}^2$ из формулы (12) в формулу (9) и значение $\ddot{\varphi}$ из (11) в (10), получим величины N_{Bx} и N_{By}. Затем с помощью формул (7) и (8) находим N_{Ax} и N_{Ay}.

Окончательно

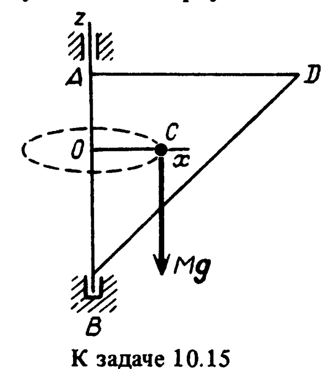
$$N_{Bx} = \frac{d}{d+b}\frac{Mg}{I_z}[(2Ml^2 + I_z)\cos\varphi - 2Ml^2\cos\varphi_0],$$

$$N_{Ax} = \frac{b}{d+b}\,\frac{Mg}{I_z}\,[(2Ml^2 + I_z)\cos\varphi - 2Ml^2\cos\varphi_0],$$

$$N_{By} = \frac{d}{d+b}\,\frac{Mg}{I_z}\,(Ml^2 - I_z)\sin\varphi,$$

$$N_{Ay} = \frac{d}{d+b}\,\frac{Mg}{I_z}\,(Ml^2 - I_z)\sin\varphi.$$

Задача 10.15. Однородная пластина в виде равнобедренного прямоугольного треугольника массой M вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$ вокруг вертикального катета $AB = l$. Вершина треугольника A вращается в цилиндрическом шарнире, а вершина B — в подпятнике (рис.).



К задаче 10.15

Определить, при какой угловой скорости горизонтальная составляющая реакции нижней опоры B равна нулю (Walton).

Решение. Возьмем систему координат $Oxyz$, жестко связанную с треугольником ABD, так, чтобы ось z совпала с осью вращения AB треугольника, ось x проходила через центр масс треугольника C.

Известно, что центр масс треугольника находится в точке пересечения медиан. Нетрудно показать, что при этом

$$x_C = \frac{l}{3} = OA. \tag{1}$$

Воспользуемся уравнениями (1*) для определения реакций опор (при этом учитываем, что угловая скорость постоянна и, следовательно, угловое ускорение равно нулю):

$$N_{Ax} + N_{Bx} = -M\,\frac{l}{3}\,\omega^2, \tag{2}$$

$$N_{Ay} + N_{By} = 0, \tag{3}$$

$$N_{Ay}\,\frac{l}{3} - N_{By}\,\frac{l}{3} = -I_{yz}\omega^2, \tag{4}$$

$$Mg\,\frac{l}{3} + N_{Ax}\,\frac{l}{3} - N_{Bx}\,\frac{2}{3}\,l = -I_{xz}\omega^2. \tag{5}$$

Но так как плоскость треугольника совпадает с плоскостью xz, то $y = 0$,

$$J_{yz} = \int yz\,dm = 0 \tag{6}$$

и, следовательно, согласно уравнениям (3) и (4),

$$N_{Ay} = N_{By} = 0. \tag{7}$$

Вычисляем далее центробежный момент инерции

$$J_{xz} = \int xz\,dm = \gamma \iint xz\,dx\,dz = \gamma \int_0^l x\,dx \int_{x-\frac{2}{3}l}^{l/3} z\,dz =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int_0^l x \left[\frac{l^2}{9} - \left(x - \frac{2}{3} l \right)^2 \right] dx =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int_0^l \left(- \frac{1}{3} l^2 x + \frac{4}{3} l x^2 - x^3 \right) dx = \frac{\gamma l^4}{2} \left(- \frac{1}{6} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \frac{\gamma l^4}{72}. \tag{8}$$

Но масса треугольника равна его площади, умноженной на плотность $M = \gamma l^2/2$, и, следовательно,

$$I_{xz} = \frac{Ml^2}{36}. \tag{9}$$

Внося это значение в уравнение (5), получаем

$$N_{Ax} - 2N_{Bx} = -\frac{Ml\omega^2}{12} - Mg. \tag{10}$$

Решаем это уравнение совместно с уравнением (2). Полагая, согласно условию, $N_{Bx} = 0$, находим из (2) и (10)

$$N_{Ax} = -M \frac{l}{3} \omega^2, \tag{11}$$

$$N_{Ax} = -\frac{Ml\omega^2}{12} - Mg. \tag{12}$$

Следовательно, равны и правые части уравнений (11) и (12):

$$M \frac{l}{3} \omega^2 = \frac{Ml\omega^2}{12} + Mg.$$

Сокращая на массу, имеем

$$\left(\frac{l}{3} - \frac{l}{12}\right)\omega^2 = g,$$

или

$$\frac{l}{4}\omega^2 = g.$$

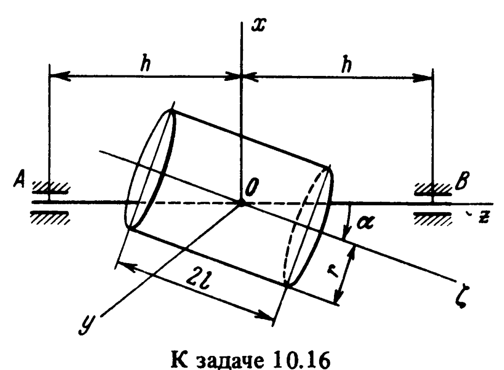
Итак, при угловой скорости вращения треугольника, равной

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{l}},$$

реакция в опоре B равна нулю. Реакцию опоры A в этом случае найдем, внося в (11) найденное значение ω:

$$N_{Ax} = -\frac{4}{3}Mg.$$

Задача 10.16. Прямой однородный круглый цилиндр массой M радиусом r и длиной $2l$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z, проходящей через его центр масс C. Ось вращения z цилиндра образует с его осью симметрии ζ угол α.



К задаче 10.16

Определить динамические боковые давления на опоры A и B, если $OA = OB = h$.

Решение. Подвижные оси x, y, z, связанные с цилиндром, изображены на рисунке. Центробежные моменты инерции цилиндра были подсчитаны в задаче 9.17:

$$I_{yz} = 0,$$

$$I_{xz} = \frac{M}{2}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\sin 2\alpha. \qquad (1)$$

Центр масс C цилиндра лежит на оси z, следовательно,

$$x_C = y_C = 0. \qquad (2)$$

Так как цилиндр вращается равномерно, то

$$\epsilon = 0. \qquad (3)$$

Воспользовавшись формулами (1)–(3), составим систему уравнений для определения составляющих динамических боковых давлений N'_{Ax}, N'_{Ay}, N'_{Bx}, N'_{By}:

$$N'_{Ax} + N'_{Bx} = 0,$$

$$N'_{Ay} + N'_{By} = 0,$$

$$N'_{Ay}h - N'_{By}h = 0,$$

$$-N'_{Ax}h + N'_{Bx}h = \frac{M}{2}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\omega^2 \sin 2\alpha.$$

Решив эту систему уравнений, получим

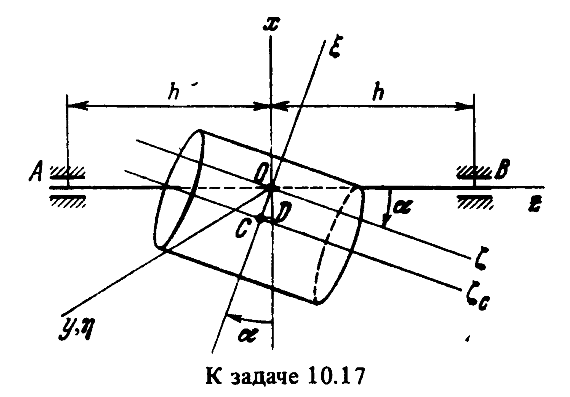
$$N'_{Ay} = N'_{By} = 0, \quad N'_{Bx} = -N'_{Ax} = \frac{M}{4h}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\omega^2 \sin 2\alpha.$$

Итак, при вращении цилиндра создаются динамические боковые давления на опоры A и B, образующие пару сил с плечом $AB = 2h$.

Боковые динамические реакции опор A и B равны по модулю соответствующим давлениям и направлены противоположно.

Задача 10.17. Решить предыдущую задачу, предполагая, что цилиндр насажен на ось z с эксцентриситетом $OC = \rho_C$.

Р е ш е н и е. Подвижные оси x, y, z расположены как и в предыдущей задаче. На рисунке введены также вспомогательные координатные оси ξ, η, ζ так, что ось η совмещается с осью y, а оси ξ и ζ оказываются повернутыми относительно осей x и z на угол α по ходу часовой стрелки.



К задаче 10.17

Центр масс C цилиндра лежит на оси ξ и отстоит от начала координат O на расстояни $OC = \rho_C$. Координаты центра масс C цилиндра:

$$x_C = OD = -|OC|\cos\alpha = -\rho_C \cos\alpha, \quad y_C = 0. \qquad (1)$$

Центробежные моменты инерции цилиндра были подсчитаны в задаче 9.17 для случая, когда начало координат помещено в центре масс ци-

линдра, а оси ζ и ξ соответственно обозначены z_1 и x_1:

$$I_{yz} = 0, \quad I_{xz} = (I_\zeta - I_\xi)\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

(см. формулу (1) задачи 9.17), где $I_\xi = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$.

Вычислим момент инерции цилиндра относительно оси ζ. Для этого проведем через центр масс C ось ζ_C, параллельную оси ζ, и применим теорему Штейнера: $I_\zeta = I_{\zeta C} + M\rho_C^2$. Так как $I_{\zeta C} = Mr^2/2$, то

$$I_\zeta = \frac{Mr^2}{2} + M\rho_C^2.$$

Следовательно,

$$I_{xz} = (I_\zeta - I_\xi)\frac{\sin 2\alpha}{2} = \left(\frac{Mr^2}{2} + M\rho_C^2 - M\frac{r^2}{4} - M\frac{l^2}{3}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2} =$$

$$= M\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Итак,

$$I_{yz} = 0, \quad I_{xz} = \frac{M}{2}\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3}\right)\sin 2\alpha. \tag{2}$$

Цилиндр вращается равномерно, поэтому

$$\epsilon = 0. \tag{3}$$

Воспользовавшись формулами (1)–(3) составим систему уравнений (1*) для определения составляющих динамических боковых давлений N'_{Ax}, N'_{Ay}, N'_{Bx}, N'_{By}:

$$N'_{Ax} + N'_{Bx} = -M\rho_C\,\omega^2\cos\alpha,$$

$$N'_{Ay} + N'_{By} = 0,$$

$$N'_{Ay}h - N'_{By}h = 0,$$

$$-N'_{Ax}h + N'_{Bx}h = \frac{M}{2}\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3}\right)\omega^2\sin 2\alpha.$$

Решив эту систему уравнений, получим

$$N'_{Ay} = N'_{By} = 0,$$

$$N'_{Ax} = -\frac{M}{2}\left[\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2h} + \rho_C \cos\alpha\right]\omega^2,$$

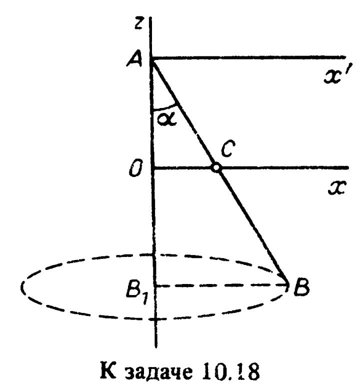
$$N'_{Bx} = \frac{M}{2}\left[\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2h} - \rho_C \cos\alpha\right]\omega^2.$$

Боковые динамические реакции опор A и B равны по модулю соответствующим давлениям и направлены противоположно им.

Задача 10.18. Однородный стержень AB массой M и длиной $2l$ шарнирно закреплен своим верхним концом A. Он вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси z, образуя постоянный угол α с вертикалью (рис.).

Найти угловую скорость вращения, реакцию в шарнире A по модулю и направлению (Griffin).

Решение. *Способ 1.* Стержень AB будем рассматривать как твердое тело, закрепленное в точках A и B_1, причем реакция в точке B_1 равна нулю. Выберем оси координат x, y, z так, чтобы ось x проходила через центр масс стержня C и ось z совпадала с осью вращения AB_1. Ось y проходит через начало координат O и образует вместе с осями x и z правую систему координат. Система координат xyz вращается вместе со стержнем вокруг оси z с постоянной скоростью ω.



К задаче 10.18

Воспользуемся уравнениями (1*) и учтем, что угловая скорость постоянна и, следовательно, угловое ускорение равно нулю:

$$N_{Ax} = -Ml\sin\alpha \cdot \omega^2, \quad (1)$$

$$N_{Ay} = 0, \quad (2)$$

$$Mg + N_{Az} = 0, \quad (3)$$

$$I_{yz}\omega^2 = l\cos\alpha N_{Ay}, \quad (4)$$

$$-I_{xz}\omega^2 = Mgl\sin\alpha + N_{Ax}l\cos\alpha. \quad (5)$$

Уравнение (4) обращается в тождество, так как

$$I_{yz} = \int yz\,dm = 0.$$

Для вычисления I_{xz} перенесем начало координат в точку A, сохраняя параллельность осей. Тогда $z = z_1 + l\cos\alpha$, $x = x_1$, где x_1, z_1 – координаты относительно новых осей, и

$$I_{xz} = \int xz\,dm = \int x_1(z_1 + l\cos\alpha)\,dm.$$

Обозначая буквой γ массу единицы длины стержня, ds элемент длины стержня, s расстояние от элемента длины до точки A, находим

$$x_1 = s\sin\alpha, \quad z_1 = -s\cos\alpha.$$

Тогда центробежный момент инерции стержня определится следующим образом:

$$I_{xz} = \gamma\int_0^{2l} s\sin\alpha(l\cos\alpha - s\cos\alpha)\,ds = \gamma\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{4l^2}{2}l - \frac{1}{3}8l^3\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\gamma l^3\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{3}Ml^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Внося это значение центробежного момента инерции в уравнение (5), получаем

$$\frac{1}{3}Ml^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\omega^2 = Mgl\sin\alpha + N_{Ax}l\cos\alpha. \qquad (6)$$

Решая (6) совместно с уравнением (1), находим

$$\frac{1}{3}l^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\omega^2 = gl\sin\alpha - l^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\omega^2,$$

$$\frac{4}{3}l^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\omega^2 = gl\sin\alpha.$$

Отсюда находятся ответы: $\sin\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$. Если же $\sin\alpha \neq 0$, то

$$\omega^2 = \frac{3}{4}\frac{g}{l\cos\alpha}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{l\cos\alpha}}. \qquad (7)$$

Вертикальное положение стержня, соответствующее решению $\alpha_1 = 0$, неустойчиво в малом. При сколь угодно малом отклонении стержня от вертикали он выйдет на второе устойчивое положение, при котором, согласно (7),

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}\frac{g}{l\omega^2}.$$

Обозначая буквой β угол наклона к вертикали силы давления на опору A, находим

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{N_{Ax}}{N_{Az}} = \frac{Ml\sin\alpha\cdot\omega^2}{Mg} = \frac{l\sin\alpha}{g}\frac{3}{4l}\frac{g}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

Способ 2. Заметим, что эта задача может быть решена методом кинетостатики. На стержень действуют сила тяжести и две составляющие реакции опоры A. Добавим к этим силам нормальные силы инерции, приложенные к элементу $m_i = \gamma\, ds$:

$$J_{ni} = m_i s\sin\alpha\cdot\omega^2 = \gamma s\, ds\cdot\sin\alpha\cdot\omega^2.$$

Тогда для плоской системы сил можно написать три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{xi} = -N_{Ax} + \int_0^{2l}\gamma\sin\alpha\cdot\omega^2 s\, ds = 0, \tag{8}$$

$$\Sigma F_{zi} = N_{Az} - Mg = 0, \tag{9}$$

$$\Sigma m_A(F_i) = -Mgl\sin\alpha + \int_0^{2l}\gamma\sin\alpha\cdot\omega^2 s^2\cos\alpha\, ds = 0. \tag{10}$$

Из уравнения (8) находим

$$N_{Ax} = \gamma\sin\alpha\cdot\omega^2\left.\frac{s^2}{2}\right|_0^{2l} = \gamma\sin\alpha\cdot\omega^2\cdot 2l^2 = M\sin\alpha\cdot\omega^2 l,$$

что совпадает с (1). Далее из (9) имеем $N_{Az} = Mg$. Из уравнения (10) получим

$$-Mgl\sin\alpha + \gamma\sin\alpha\cdot\omega^2\cos\alpha\cdot\left.\frac{s^3}{3}\right|_0^{2l} = 0,$$

или

$$Mgl\sin\alpha = \gamma\sin\alpha\cos\alpha\cdot\omega^2\frac{8l^3}{3} = \sin\alpha\cos\alpha\cdot\omega^2 M\frac{4}{3}l^2.$$

Сокращая на $Ml\sin\alpha$, получаем

$$g = \cos\alpha\cdot\omega^2\frac{4}{3}l,$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{\cos\alpha\cdot l}},$$

что совпадает с ранее полученным уравнением (7).

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 42.1, 42.2, 42.4–42.10, 42.12–42.14, 42.16–42.18.

§ 4. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Возможные перемещения. Идеальные связи. *Вариацией функции* δy называется приращение функции, обусловленное изменением вида функции, при фиксированном значении аргумента. Так, при переходе от функции $y_1 = f_1(x)$ к функции $y_2 = f_2(x)$ вариация функции δy будет:

$$\delta y = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x).$$

В отличие от вариации функции δy дифференциал функции dy является главной частью приращения функции, образуемого за счет приращения аргумента dx.

На рис. 10.15 изображен отрезок MM_1, численно равный вариации функции δy, которая соответствует фиксированному значению аргумента x. На том же рисунке показано, что отрезок, численно равный дифференциалу функции dy, соответствует приращенному значению аргумента $x + dx$.

Правила варьирования функций внешне подобны соответствующим правилам дифференцирования функций. Так, $\delta(cy) = c\delta y$, где c – постоянная, $\delta(y_1 + y_2) = \delta y_1 + \delta y_2$, $\delta(y_1 \cdot y_2) = y_1 \delta y_2 + y_2 \delta y_1$ и т.д.

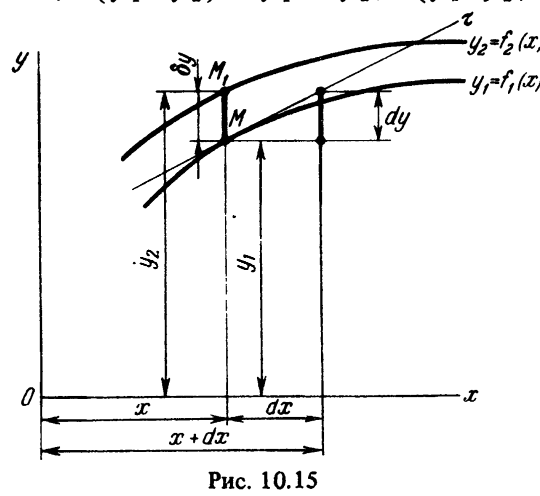


Рис. 10.15

Если рассматривать варьирование сложной функции $z = \varphi(y)$, где $y = f(x)$, то ее вариация определяется по формуле $\delta z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\delta y$. Пусть, например, $z = a \sin by$, где y – функция от x. Вариация функции z равна $\delta z = ab \cos by\, \delta y$. Таким образом, установлена связь между вариациями функций z и y.

Возможным называется перемещение точки из данного ее положения, допускаемое связями, наложенными на эту точку. Так, если материальная точка находится на неподвижной горизонтальной плоскости, то возможным является любое воображаемое перемещение точки из данного положения по плоскости.

Возможное перемещение является воображаемым перемещением в данный момент (т.е. при фиксированном значении аргумента – времени t).

В отличие от этого действительное перемещение точки происходит в определенном направлении под действием системы приложенных сил при непрерывном изменении аргумента – времени. Поэтому возможное перемещение точки является вариацией, а действительное перемещение – дифференциалом.

Если $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор точки, то $\delta \boldsymbol{r}$ – возможное перемещение точки, а $d\boldsymbol{r}$ – действительное перемещение точки. В разложении по ортам осей декартовых координат возможное перемещение имеет вид

$$\delta \boldsymbol{r} = \delta x \boldsymbol{i} + \delta y \boldsymbol{j} + \delta z \boldsymbol{k},$$

где δx, δy, δz – проекции возможного перемещения $\delta \boldsymbol{r}$ точки на соответствующие оси декартовых координат. Действительное перемещение дается формулой $d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$, где dx, dy, dz – проекции действительного перемещения $d\boldsymbol{r}$ точки на эти оси, причем $dx = \dot{x}\,dt$, $dy = \dot{y}\,dt$, $dz = \dot{z}\,dt$.

Действительное перемещение точки является одним из числа возможных перемещений этой точки (для стационарных связей).

Для нестационарных связей (связей, явно зависящих от времени) возможное перемещение точки рассматривается при мгновенно остановленных связях (т.е. при фиксированном значении момента времени). В этом случае действительное перемещение уже не является частным случаем возможного.

Рассмотрим материальную точку, которая находится на некоторой поверхности (рис. 10.16). Возможным является перемещение в касательной

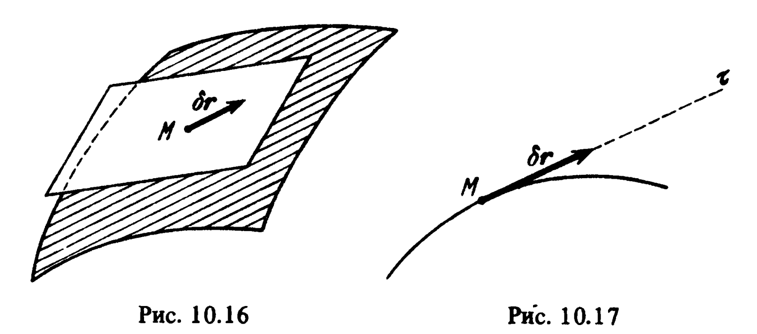


Рис. 10.16 Рис. 10.17

плоскости к поверхности в данной точке (направление возможного перемещения точки в этой плоскости, конечно, может быть любым).

Аналогично, если материальная точка находится на кривой, которая является связью, наложенной на точку (рис. 10.17), то возможное перемещение направлено по касательной к кривой в данной точке.

В примерах, показанных на рис. 10.16 и 10.17, связи являются удерживающими.

Идеальные связи. Идеальными называются связи, сумма работ реакций которых на любых возможных перемещениях точек системы равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} R_k \delta r_k = 0,$$

где R_k – равнодействующая реакций связи, действующая на k-ю точку, δr_k – возможное перемещение k-й материальной точки системы.

Примеры идеальных связей: идеально гладкие плоскости и поверхности, абсолютно жесткий стержень, абсолютно твердое тело и т.д. Для

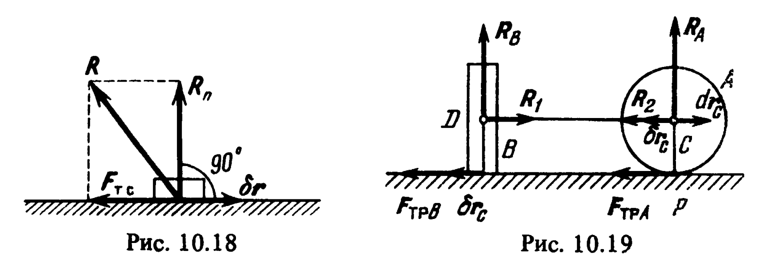


Рис. 10.18 Рис. 10.19

жесткого стержня (абсолютно твердого тела) нулю равны суммы работ реакций, с которыми одни точки стержня (тела) действуют на другие.

Негладкая плоскость не является идеальной связью. Действительно (рис. 10.18), реакция R плоскости является суммой двух ее составляющих: нормальной R_n, перпендикулярной к плоскости в данной точке, и касательной, являющейся силой трения скольжения $F_{т.с}$ точки о плоскость. Оставляя в стороне случай отрыва материальной точки от плоскости, надо возможное перемещение δr точки направить вдоль плоскости. При вычислении суммы работ составляющих реакций связей R_n и $F_{т.с}$ на возможном перемещении δr работа силы R_n оказывается равной нулю, в то время как работа силы трения скольжения $F_{т.с}$ не равна нулю. Следовательно, условие, определяющее идеальность связи, не выполняется.

Рассмотрим пример. По горизонтальной негладкой плоскости направо движется материальная система, состоящая из колеса A и груза B, соединенных жестким невесомым стержнем CD. Колесо A катится без скольжения, а груз B скользит по негладкой плоскости (рис. 10.19). Трением качения пренебречь.

Определить, являются ли идеальными связи, наложенные на эту материальную систему.

На материальную систему наложены две связи: жесткий (недеформируемый) стержень CD и негладкая горизонтальная плоскость.

Реакции стержня R_1 и R_2, приложенные к грузу и колесу, направлены вдоль стержня. На основании закона равенства действия и противодействия

имеем $R_2 = -R_1$. Реакцию негладкой плоскости, приложенную к колесу, разложим на две составляющие: нормальную реакцию R_A и силу трения $F_{\text{тр} A}$. Обе силы приложены к колесу в точке P касания колеса с плоскостью совмещенной с мгновенным центром. Так как скорость v_P равна нулю, а $v_P = \frac{dr_P}{dt}$, то

$$dr_P = v_P dt = 0. \qquad (1)$$

Разложим реакцию негладкой плоскости, приложенной к грузу B, на две составляющие: нормальную реакцию R_B и силу трения скольжения $F_{\text{тр} B}$.

Дадим возможное перемещение δr_C центру масс C колеса по горизонтали налево; при движении всей системы направо элементарное, действительное, перемещение dr_C направлено направо. Однако возможным является воображаемое перемещение, допускаемое связями. Поэтому можно направить возможное перемещение δr_C как в сторону элементарного перемещения dr_C – направо, так и противоположно – налево.

Вычислим сумму работ реакций R_1 и R_2 стержня, приложенных к грузу B и колесу A:

$$\delta A(R_1) + \delta A(R_2) = R_1 \cdot \delta r_C + R_2 \cdot \delta r_C.$$

Так как $R_2 = -R_1$, то сумма работ реакций жесткого стержня на возможных перемещениях их точек приложения равна нулю:

$$\delta A(R_1) + \delta A(R_2) = 0. \qquad (2)$$

Поэтому на основании определения жесткий стержень CD является идеальной связью.

Вычислим сумму работ реакций плоскости R_B и $F_{\text{тр} B}$, приложенных к грузу B на возможных перемещениях точек приложения этих сил. (Груз B движется поступательно, поэтому возможные перемещения всех его точек векторно равны между собой. В данном случае они равны δr_C.) Сумма работ: $\delta A(R_B) + \delta A(F_{\text{тр}}) = R_B \cdot \delta r_C + F_{\text{тр} B} \cdot \delta r_C = R_B \delta r_C \cos 90^\circ + F_{\text{тр} B} \delta r_C \cos 0^\circ = F_{\text{тр} B} \delta r_C$, т.е.

$$\delta A(R_B) + \delta A(F_{\text{тр} B}) = F_{\text{тр} B} \delta r_C \neq 0. \qquad (3)$$

Так как сумма работ (3) оказалась не равной нулю, то негладкая горизонтальная плоскость служит для скользящего по ней груза B неидеальной связью.

Дадим центру масс C колеса A элементарное (действительное) перемещение dr_C (оно по условию направлено по горизонтали направо). Это допустимо, ибо неподвижная горизонтальная плоскость является стационарной связью, а при стационарных связях действительные перемещения входят в число возможных.

Вычислим сумму работ реакций R_A и $F_{\text{тр}\,A}$, приложенных к колесу A в точке P, на элементарном перемещении точки, равном dr_P, т.е.

$$\delta A(R_A) + \delta A(F_{\text{тр}\,A}) = R_A \cdot dr_P + F_{\text{тр}\,A} \cdot dr_P.$$

Приняв во внимание формулу (1), видим, что сумма работ равна нулю:

$$\delta A(R_A) + \delta A(F_{\text{тр}\,A}) = 0. \qquad (4)$$

Следовательно, несмотря на то, что плоскость негладкая, для колеса, катящегося без скольжения, при отсутствии трения качения она является идеальной связью.

Если бы не пренебрегалось трением качения, то реакция R_A не была бы приложена к точке P и сумма работ не оказалась бы равной нулю и эта негладкая плоскость была бы неидеальной связью.

Итак, жесткий стержень и негладкая плоскость для колеса, катящегося по ней без скольжения, при отсутствии трения качения являются идеальными связями. Эта же негладкая плоскость для скользящего по ней груза представляет собой неидеальную связь.

2. Принцип возможных перемещений. Для равновесия материальной системы, подчиненной идеальным стационарным удерживающим связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ активных сил на любых возможных перемещениях точек системы равнялась нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \delta r_k = 0.$$

Аналогично в проекциях на оси декартовых координат имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (F_{kx}\,\delta x_k + F_{ky}\,\delta y_k + F_{kz}\,\delta z_k) = 0.$$

Достаточность принципа возможных перемещений справедлива при нулевых начальных скоростях.

Достоинством принципа возможных перемещений является отсутствие в его формулировке реакций идеальных связей.

Принцип возможных перемещений широко применяется в механике. С его помощью достаточно просто решать задачи о равновесии твердого тела и систем твердых тел, а также определять зависимости между модулями активных сил. Особенно эффективно применение принципа возможных перемещений при решении задач о равновесии систем твердых тел.

Исходя из принципа возможных перемещений, можно вывести уравнения равновесия твердого тела при наличии как плоской, так и пространственной системы сил.

Если не все связи, наложенные на систему, являются идеальными, например, имеются негладкие опорные плоскости и поверхности, то к активным силам следует добавлять силы трения и, следовательно, приравни-

вать нулю сумму работ не только активных сил, но и сил трения на любых возможных перемещениях точек системы. Составленное уравнение определяет зависимость между активными силами и силами трения.

Если требуется определить какую-либо реакцию идеальной связи, для которой $\boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$, то следует, применяя закон освобождаемости от связей, отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой реакцией. При составлении уравнения равновесия надо к активным силам добавить эту реакцию связи. Такой метод решения задач о равновесии систем твердых тел является чрезвычайно эффективным, так как искомая реакция связи непосредственно определяется из составленного уравнения равновесия. Применяя же обычные приемы статики, приходится составлять систему уравнений равновесия и определять искомую реакцию связи в результате решения этой системы уравнений.

Указание. Задачи на равновесие твердых тел и систем твердых тел с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется решать в следующем порядке.

1) изобразить на рисунке активные силы;

2) при наличии неидеальных связей добавить соответствующие реакции связей (например, силы трения);

3) в случае необходимости определить реакцию связи, мысленно отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой реакцией (если $\boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$).

Дальнейшие действия следует осуществлять в зависимости от того, имеет материальная система одну степень свободы или же несколько.

а) *В случае системы с одной степенью свободы*:

4) дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от заданного возможного перемещения;

5) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1), 2) и 3), на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и приравнять эту сумму нулю;

6) решив составленное уравнение равновесия, определить искомую величину.

б) *В случае системы с несколькими степенями свободы*:

4) выбрать независимые возможные перемещения точек системы в числе, равном числу степеней свободы этой системы;

5) дать возможное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом возможные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю. Выразить возможные перемещения точек приложения сил через его возможное перемещение;

6) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1), 2) и 3), на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и эту сумму приравнять нулю;

7) последовательно произведя выкладки пунктов 5) и 6) для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений равновесия в числе, равном числу независимых возможных перемещений, т.е. числу степеней свободы системы;

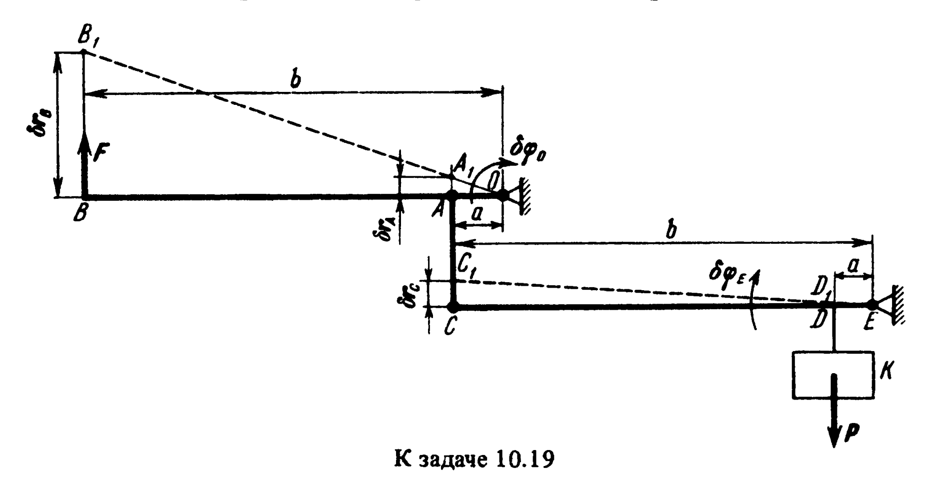
8) решив системы составленных уравнений равновесия, определить искомые величины.

Задача 10.19. На рисунке изображена система рычагов, применяемая для подъема груза K, подвешенного к нижнему рычагу в точке D. Подъем совершается посредством силы F, направленной по вертикали вверх и приложенной в точке B верхнего рычага.

Определить массу M поднимаемого груза K, если $F = 10$ кН, а $b/a = 10$.

Решение. При решении этой задачи методами статики надо, применив закон освобождаемости от связей, мысленно рассечь тягу AC, заменить ее действие на рычаги соответствующими реакциями связей и рассмотреть отдельно равновесие верхнего и нижнего рычагов. После исключения из составленных уравнений равновесия реакции тяги AC можно определить силу тяжести $P = Mg$ поднимаемого груза K.

Значительно проще можно решить эту задачу с помощью принципа возможных перемещений. Изобразим на рисунке активные силы P и F. Дадим точке B верхнего рычага возможное перемещение $\delta r_B = BB_1$, направленное по вертикали вверх. При этом верхний рычаг повернется вокруг точки O по ходу часовой стрелки и повернет в том же направлении нижний рычаг.



К задаче 10.19

Выразим возможное перемещение $\delta r_D = DD_1$ точки D нижнего рычага в зависимости от δr_B (на рисунке новые положения рычагов изображены штриховыми линиями). Воспользовавшись подобием треугольников, построенных на верхнем рычаге, можно записать $\delta r_A = \dfrac{a}{b}\delta r_B$. Так как

тяга AC является абсолютно жестким стержнем, то $\delta r_C = \delta r_A$, т.е.

$$\delta r_C = \frac{a}{b}\delta r_B. \qquad (1)$$

На основании подобия треугольников, построенных на нижнем рычаге, получим: $\delta r_D = \frac{a}{b}\delta r_C$. Подставив значение δr_C из формулы (1), находим

$$\delta r_D = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \delta r_B. \qquad (2)$$

Применим принцип возможных перемещений к системе рычагов, т.е. сумму работ активных сил F и P на возможных перемещениях δr_B и δr_D их точек приложения B и D приравняем нулю:

$$F\delta r_B - P\delta r_D = 0. \qquad (3)$$

Воспользовавшись формулой (2), после сокращения уравнения (3) на δr_B получим

$$P = \left(\frac{b}{a}\right)^2 F. \qquad (4)$$

Подстановка числовых значений дает результат: $P = 1000$ кН.

Если бы, решая эту задачу, мы дали возможное перемещение δr_B точке B не вверх, а вниз, то в уравнении (3) знаки изменились бы на обратные.

Можно было вместо возможного линейного перемещения δr_B точки B дать возможное угловое перемещение $\delta\varphi_O$ и вычислить в зависимости от него возможное угловое перемещение $\delta\varphi_E$ нижнего рычага. Для этого следует воспользоваться возможными перемещениями точек A и C абсолютно жесткого стержня AC:

$$\delta r_A = a\delta\varphi_O, \quad \delta r_C = b\delta\varphi_E.$$

Так как $\delta r_A = \delta r_C$, то $a\delta\varphi_O = b\delta\varphi_E$, т.е.

$$\delta\varphi_E = \frac{a}{b}\delta\varphi_O. \qquad (5)$$

Применив принцип возможных перемещений, находим

$$m_O(F)\delta\varphi_O + m_E(P)\delta\varphi_E = 0,$$

следовательно,

$$Fb\delta\varphi_O - Pa\delta\varphi_E = 0,$$

откуда $P = \frac{b}{a} F \frac{\delta\varphi_O}{\delta\varphi_E}$. Воспользовавшись формулой (5), получим результат, записанный в формуле (4).

Задача 10.20. Пользуясь принципом возможных перемещений, вывести уравнения равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил.

Решение. Изобразим координатные оси xy в плоскости действия сил. Обозначим активные силы: $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ (рис.).

Выбрав за полюс произвольную точку A в плоскости действия активных сил, разложим возможное перемещение твердого тела на переносное поступательное $\delta \boldsymbol{r}_A$ вместе с полюсом A и относительное вращательное $\delta\varphi$ вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости действия сил.

Применив принцип возможных перемещений, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \delta \boldsymbol{r}_k + \sum_{k=1}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k)\delta\varphi = 0. \tag{1}$$

Записав силы $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ и возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_k$ в разложениях по ортам осей координат x и y:

$$\boldsymbol{F}_k = F_{kx}\boldsymbol{i} + F_{ky}\boldsymbol{j}, \quad \delta\boldsymbol{r}_k = \delta x_k \boldsymbol{i} + \delta y_k \boldsymbol{j},$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$, получим уравнение (1) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} (F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k) + \sum_{k=1}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k)\delta\varphi = 0,$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\delta x_k + \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\delta y_k + \sum_{k=1}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k)\delta\varphi = 0.$$

Так как переносное движение поступательное, то имеем

$$\delta\boldsymbol{r}_k = \delta\boldsymbol{r}_A, \quad \delta x_k = \delta x_A, \quad \delta y_k = \delta y_A$$

и, следовательно, после подстановки, множители δx_A, δy_A и $\delta\varphi$, не зависящие от индекса суммирования, можно вынести за знаки соответствующих сумм:

$$\delta x_A \sum_{k=1}^{n} F_k + \delta y_A \sum_{k=1}^{n} F_{ky} + \delta\varphi \sum_{k=1}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0. \tag{2}$$

Учитывая, что δx_A, δy_A и $\delta\varphi$ – независимые и произвольные возможные перемещения, получим, что левая часть уравнения (2) тождественно обращается в нуль лишь при равенстве нулю коэффициентов $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}$,

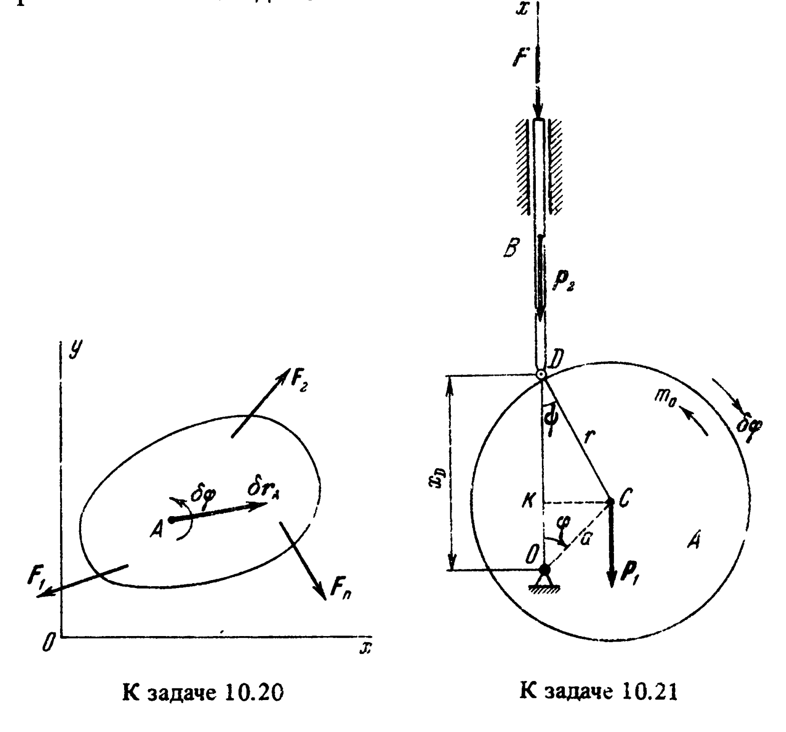
$\sum_{k=1}^{n} F_{ky}$, $\sum_{k=1}^{n} m_A(F_k)$, стоящих при этих возможных перемещениях, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = 0. \tag{3}$$

Как известно из статики, уравнения (3) являются уравнениями равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил.

Аналогично можно вывести шесть уравнений равновесия свободного твердого тела при наличии произвольной пространственной системы сил.

Полученные выше результаты убедительно подчеркивают степень общности принципа возможных перемещений, являющегося мощным средством для решения любых задач статики.



К задаче 10.20 К задаче 10.21

Задача 10.21. При вращении круглого эксцентрика A массой M_1 и радиусом r вокруг неподвижной горизонтальной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, стержень B массой M_2 совершает в вертикальных направляющих возвратно-поступательное движение. К эксцентрику приложен момент m_O, направленный против хода часовой стрелки. Механизм

находится в равновесии при наличии вертикальной силы F, действующей на стержень B.

Определить силу F в положении эксцентрика, указанном на рисунке. Эксцентриситет OC равен a.

Решение. Направим ось x по вертикали вверх, взяв начало отсчета в точке O. Угол поворота φ эксцентрика A отсчитывали от оси x в направлении по ходу часовой стрелки.

Изобразим активные силы и моменты: $P_1 = M_1 g$ – сила тяжести эксцентрика A, $P_2 = M_2 g$ – сила тяжести стержня B, F – вертикальная сила, приложенная к стержню B, момент m_O.

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ эксцентрику A в направлении возрастания угла φ, т.е. по ходу часовой стрелки. При этом точка D стержня B получит вертикальное возможное перемещение δx_D. Для определения δx_D в зависимости от $\delta\varphi$ выразим абсциссу x_D точки D в функции от угла поворота φ эксцентрика A:

$$x_D = OD = OK + KD = a\cos\varphi + r\cos\psi, \tag{1}$$

где угол CDO обозначен через ψ. Установим теперь связь между углами ψ и φ. Из треугольника OCD получим $\dfrac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \dfrac{a}{r}$, откуда $\sin\psi = \lambda\sin\varphi$, где $\lambda = a/r$. Следовательно, $\cos\psi = \sqrt{1 - \sin^2\psi} = \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi}$. Вычисляя $\cos\psi$ с точностью до слагаемых, содержащих λ в квадрате (λ – правильная дробь), находим

$$\cos\psi = (1 - \lambda^2\sin^2\varphi)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\,\frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) = 1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi.$$

Подставив полученное значение $\cos\psi$ в формулу (1), получим

$$x_D = r\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2\right) + a\cos\varphi + \frac{1}{4}r\lambda^2\cos 2\varphi. \tag{2}$$

Учитывая, что возможное перемещение точки является вариацией соответствующей координаты, вычислим вариацию функции (2):

$$\delta x_D = -a\sin\varphi\,\delta\varphi - \frac{1}{2}r\lambda^2\sin 2\varphi\,\delta\varphi,$$

т.е.

$$\delta x_D = -a\sin\varphi\,(1 + \lambda\cos\varphi)\,\delta\varphi. \tag{3}$$

Формула (3) устанавливает зависимость между возможными перемещениями δx_D и $\delta\varphi$.

Применим к рассматриваемому механизму принцип возможных перемещений, т.е. сумму работ всех активных сил на возможных перемещениях точек системы приравняем нулю:

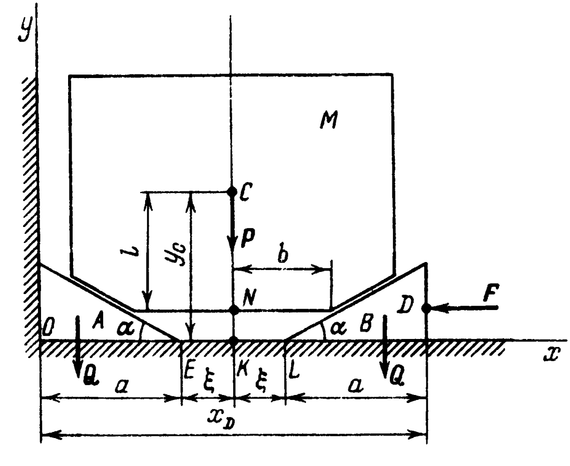
$$P_1 a \sin\varphi\, \delta\varphi - m_O\, \delta\varphi + P_{2x}\, \delta x_D + F_x\, \delta x_D = 0. \qquad (4)$$

Подставив в уравнение (4) значение δx_D из формулы (3), почленно сократив на $\delta\varphi$ и приняв во внимание, что $P_{2x} = -P_2$ и $F_x = -F_2$, определяем искомый модуль силы F:

$$F = \frac{m_O - [M_1 + M_2(1 + \lambda\cos\varphi)]ag\sin\varphi}{a(1 + \lambda\cos\varphi)\sin\varphi},$$

где $\lambda = a/r$.

Задача 10.22. На рисунке изображена система, состоящая из трех гладких призм A, B и M, находящихся в покое. Две одинаковые призмы A и B лежат на горизонтальной негладкой плоскости, образуя с ней угол α. Неподвижная призма A упирается в вертикальную стену. На призмы A и B давит призма M массой M_1. Система поддерживается в покое под действием горизонтальной силы F, приложенной к призме B массой M_2.



К задаче 10.22

Какие значения при покое материальной системы может принимать модуль силы F, если коэффициент трения скольжения призмы B о горизонтальную плоскость равен f. Оси x и y изображены на рисунке.

Решение. В связи с наличием силы трения скольжения призмы B о горизонтальную плоскость, покой системы имеет место не при фиксированном значении силы F, а при некоторой области, в которой эти значения могут меняться.

Действительно, если сила F принимает свое наименьшее возможное при покое значение F_{min}, то призма M стремится сместить призму B направо, и для того, чтобы удержать призму B в покое, сила трения $F_{тр}$ должна быть направлена по горизонтали налево. Если же сила F принимает свое наибольшее возможное при покое значение F_{max}, то призма B стремится переместиться налево и потому сила трения $F_{тр}$ должна быть направлена

направо. В обоих случаях сила трения принимает свое предельное значение. Таким образом, за счет изменения направления силы трения создается область значений F, при которых система остается в покое.

К данной системе приложены активные силы тяжести $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q}$, где $P = M_1 g$, $Q = M_2 g$. К ним надо добавить силу трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ (эта сила на рисунке не изображена), ибо связь между призмой B и горизонтальной плоскостью не является идеальной.

Если дать возможное горизонтальное перемещение δx_D точке D приложения силы F к призме B, то центр масс C призмы M получит при этом перемещение δy_C по вертикали. Для установления зависимости между ними введем параметр $\xi = EK = KL$ (через центр масс C призмы M проходит вертикальная ось симметрии данной системы). Выразим координаты x_D и y_D в зависимости от параметра ξ. Найдем

$$x_D = 2a + 2\xi, \quad y_C = CN + NK = l + (b - \xi)\operatorname{tg}\alpha \tag{1}$$

(размеры a, b и l указаны на рисунке). Проварьировав эти соотношения, найдем зависимость возможных перемещений δx_D и δy_C от $\delta\xi$:

$$\delta x_C = 2\delta\xi, \quad \delta y_C = -\delta\xi \cdot \operatorname{tg}\alpha. \tag{2}$$

Рассмотрим случай, когда сила F достигает при покое своего максимального значения $F_{\max}$. При этом, как было указано выше, сила трения $F_{\text{тр}}$, равная по модулю своему предельному значению

$$F_{\text{тр}} = f\left(Q + \frac{P}{2}\right) = fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right),$$

направлена направо, поэтому ее проекция на ось x равна

$$F_{\text{тр}\,x} = f\left(Q + \frac{P}{2}\right) = fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right). \tag{3}$$

Работа сил тяжести призм A и B равна нулю, так как призма A неподвижна, а центр масс призмы B перемещается по горизонтали. Поэтому в уравнении работ найдут отражение только три силы: $\boldsymbol{F}_{\max}$, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ и $\boldsymbol{P}$:

$$F_{x\,\max}\,\delta x_D + F_{\text{тр}\,x}\,\delta x_D + P_y\,\delta y_C = 0 \tag{4}$$

(возможные перемещения всех точек призмы B векторно равны).

Использовав в уравнении (4) зависимости (2) и (3) и заметив, что $P_y = -P = -M_1 g$ и $F_{x\,\max} = -F_{\max}$, после сокращения на $\delta\xi$ получим

$$-2F_{\max} + 2f\left(Q + \frac{P}{2}\right) + P\operatorname{tg}\alpha = 0,$$

т.е.

$$F_{max} = \frac{1}{2} M_1 g \operatorname{tg} \alpha + fg\left(M_2 + \frac{1}{2} M_1\right). \qquad (5)$$

Перейдем к рассмотрению случая, когда сила достигает при покое своего наименьшего значения F_{min}. При этом, как было показано выше, предельная сила трения $F_{тр}$ направлена налево, т.е. ее проекция на ось x равна

$$F_{тр} = -f\left(Q + \frac{P}{2}\right) = -fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right). \qquad (6)$$

По аналогии с формулой (4) запишем уравнение работ

$$F_{x\,min}\delta x_D + F_{тр}\delta x_D + P_y \delta y_C = 0. \qquad (7)$$

Внеся в уравнение (7) результаты (2) и (6), а также $P_y = -P$, $F_{x\,min} = -F_{min}$, найдем

$$F_{min} = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha - \left(Q + \frac{P}{2}\right) = \frac{M_1 g}{2} \operatorname{tg} \alpha - fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right). \qquad (8)$$

Так как при разных значениях силы F значения силы трения $F_{тр}$ могут быть меньше предельных, покой системы возможен при выполнении условий: $F_{min} \leqslant F \leqslant F_{max}$. Использовав результаты (5) и (8), найдем искомую область значений силы F, при котором система призм остается в покое:

$$\frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha - f\left(Q + \frac{P}{2}\right) \leqslant F \leqslant \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha + f\left(Q + \frac{P}{2}\right),$$

т.е.

$$\frac{M_1 g}{2} \operatorname{tg} \alpha - fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right) \leqslant F \leqslant \frac{M_1 g}{r} \operatorname{tg} \alpha + fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right).$$

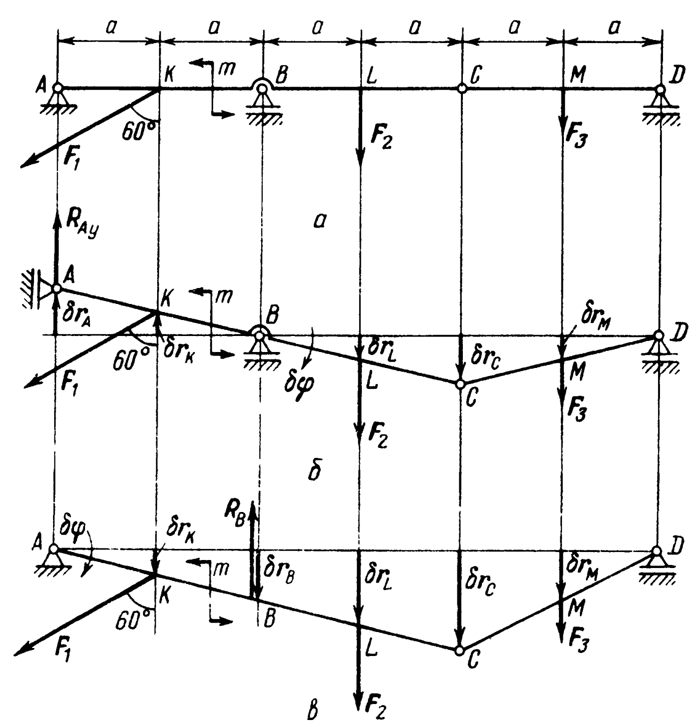
В заключение заметим, что решение этой задачи методами статики оказалось бы более длинным и громоздким, так как пришлось бы в отдельности рассмотреть равновесие каждой из призм. В систему уравнений равновесия вошли бы взаимные реакции плоскостей этих призм. Для получения искомых результатов эти реакции пришлось бы из системы уравнений исключить.

Задача 10.23. Две горизонтальные балки ABC и CD, соединенные шарниром C, находятся в покое. Шарнирные опоры B и D расположены на катках, а опора A неподвижна. К балкам приложены сосредоточенные си-

лы F_1, F_2, F_3 и пара сил с моментом m, причем: $F_1 = 8$ кН, $F_2 = 4$ кН, $F_3 = 2$ кН, $m = 40$ кН · м, где a – размер, указанный на рис. *а*. Массой балок пренебречь.

Определить реакции в шарнирах A и B.

Решение. Задача может быть решена методами статики. Для этого надо расчленить балки в соединительном шарнире C, записать уравнения равновесия для каждой из балок и затем решить систему шести уравнений с шестью алгебраическими неизвестными ($R_{Ax}, R_{Ay}, R_B, R_{Cx}, R_{Cy}, R_D$). Однако в тех случаях, когда надо определить одно неизвестное или только некоторые из них, целесообразно пользоваться принципом возможных перемещений. При этом каждое неизвестное определяется из одного уравнения независимо от прочих неизвестных. Для определения неизвестной



К задаче 10.23

реакции надо мысленно отбросить соответствующую ей опору, заменить опору искомой реакцией и затем в уравнении работ учесть не только активные силы и моменты, но и искомую реакцию.

Так, для определения вертикальной составляющей R_{Ay} мысленно заменим неподвижную опору A подвижной опорой на катках, которые могут перемещаться по вертикали (рис. *б*). Дадим точке A возможное переме-

щение δr_A по вертикали вверх. Тогда точки K, L, C и M получат возможные перемещения δr_K, δr_L, δr_C, δr_M, а балка ABC – возможное угловое перемещение $\delta\varphi$. Из подобия треугольников получим зависимость между возможными перемещениями:

$$\delta r_A = 2\delta r_K = 2\delta r_L = \delta r_C = 2\delta r_M = 2a\,\delta\varphi. \quad (1)$$

Применим принцип возможных перемещений. В уравнение работ войдут активные силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, активный момент m, а также искомая составляющая реакции $\boldsymbol{R}_{Ay}$:

$$R_{Ay}\,\delta r_A - F_1 \cos 60^\circ \cdot \delta r_K - m\,\delta\varphi + F_2\,\delta r_L + F_3\,\delta r_M = 0. \quad (2)$$

Использовав зависимости (1), запишем уравнение (2) в виде

$$R_{Ay}\delta r_A - F_1 \cos 60^\circ \frac{\delta r_A}{2} - m\frac{\delta r_A}{2a} + F_2\frac{\delta r_A}{2} + F_3\frac{\delta r_A}{2} = 0.$$

После сокращения на δr_A и подстановки числовых значений F_1, F_2, F_3 и m найдем $R_{Ay} = 1$ кН (заметим, что если бы возможное перемещение δr_A было направлено не вверх, а вниз, то все знаки в уравнении (2) изменились бы на противоположные).

Для определения горизонтальной составляющей реакции $\boldsymbol{R}_{Ax}$ мысленно заменим неподвижную опору A подвижной опорой на катках, которые могут перемещаться по горизонтали. При этом введем горизонтальную реакцию $\boldsymbol{R}_{Ax}$ и дадим точке A возможное перемещение δr_A по горизонтали. Допустим, что $\boldsymbol{R}_{Ax}$ и δr_A направлены направо. При этом система балок переместится поступательно по горизонтали и все ее точки получат возможные перемещения δr_A (предполагаем читателям представить это без рисунка). В данном случае принцип возможных перемещений получит вид

$$R_{Ax}\delta r_A - F_1 \cos 30^\circ \cdot \delta r_A = 0, \quad (3)$$

откуда следует $R_{Ax} = 4\sqrt{3}$ кН.

В залючение определим реакцию $\boldsymbol{R}_B$ шарнира B. Для этого мысленно отбросим опору B, а вместо нее введем реакцию $\boldsymbol{R}_B$ (рис. *в*). Дадим точке B возможное перемещение δr_B вниз. При этом точки K, L, C и M получат возможные перемещения δr_K, δr_L, δr_C, δr_M, а балка ABC – возможное угловое перемещение $\delta\varphi$. Из подобия треугольников имеем

$$\delta r_C = \frac{4}{3}\,\delta r_L = 2\delta r_B = 4\delta r_K = 2\delta r_M = 4a\delta\varphi. \quad (4)$$

В уравнение работ, помимо активных сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ и активного момента m, войдет искомая реакция $\boldsymbol{R}_B$:

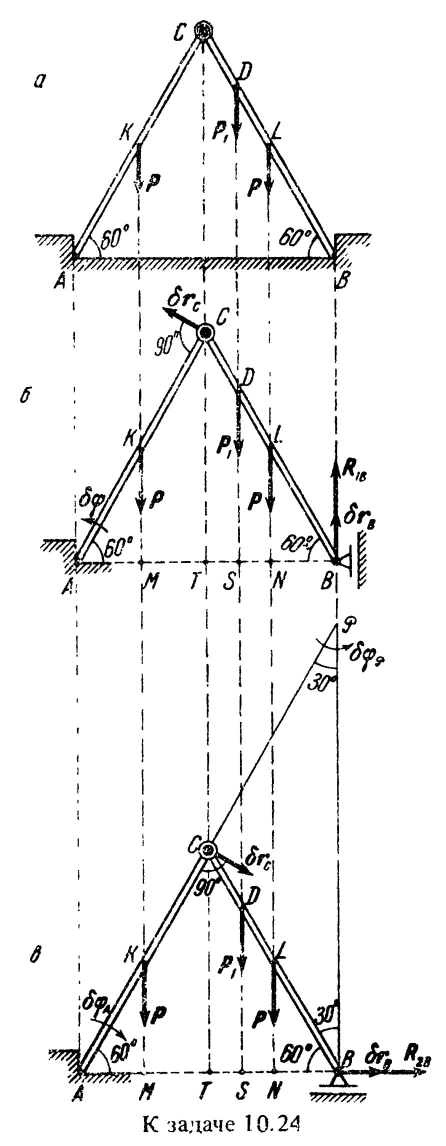
$$-R_B\delta r_B + F_1 \cos 60^\circ \cdot \delta r_K - m\delta\varphi + F_2\delta r_L + F_3\delta r_M = 0. \quad (5)$$

Использовав зависимости (4), получим уравнение (5) в виде

$$-R_B\frac{\delta r_C}{2}+F_1\cos 60^\circ\cdot\frac{\delta r_C}{4}-m\frac{\delta r_C}{4a}+F_2\frac{3}{4}\delta r_C+F_3\frac{\delta r_C}{2}=0.$$

После сокращения на δr_C и подстановки числовых значений, найдем: $R_B = 8$ кН.

Обращаем внимание читателя на то, что каждое из неизвестных: R_{Ay}, R_{Ax} и R_B было вычислено независимо: R_{Ay} было получено из уравнения (2), R_{Ax} – из (3), R_B – из (5). Поэтому применение принципа возможных перемещений особенно эффективно в случаях, когда надо определить одно или только часть неизвестных.



К задаче 10.24

Задача 10.24. На рис. *а* изображена стремянка ACB. Две одинаковые стороны AC и CB стремянки шарнирно соединены в точке C, а концы A и B упираются в выступы пола. Масса каждой стороны стремянки равна M. В точке D стоит человек массой M_1.

Определить опорную реакцию в точке B, если $AC = CB = 4CD$, а $\angle CAB = \angle CBA = 60^\circ$.

Решение. Активными силами являются: $P = Mg$ – сила тяжести каждой стороны стремянки, $P_1 = M_1 g$ – сила тяжести человека. Обозначим длину каждой стороны стремянки $2l$. Тогда $AK = KC = CL = LB = 2CD = l$.

Для определения вертикальной составляющей R_{1B} опорной реакции в точке B дадим опоре B возможность двигаться в вертикальном направлении. С этой целью, применив закон освобождаемости от связей, заменим выступ пола в точке B опорой на катках, которая может перемещаться в вертикальном направлении (рис. *б*).

Приложим в точке B соответствующую реакцию R_{1B}. Дадим возможное перемещение δr_B точке B по вертикали вверх. При этом правая половина стремянки совершит плоское движение, а ле-

вая половина повернется вокруг оси A, перпендикулярной к плоскости рисунка. Направив возможное перемещение δr_C точки C перпендикулярно к AC, найдем положение мгновенного центра вращения стороны CB в точке A (в точке A пересекаются перпендикуляры, восставленные из точек C и B к δr_C и δr_B). Итак, в точке A совмещаются: центр вращения левой стороны AC стремянки, вращающейся вокруг неподвижной оси, и мгновенный центр вращения правой стороны CB стремянки, совершающей плоское движение. Следовательно, вся стремянка получает возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ вокруг точки A в плоскости рисунка против хода часовой стрелки.

Применим принцип возможных перемещений, т.е. сумму работ активных сил и вертикальной составляющей реакции R_{1B} на возможных перемещениях их точек приложения приравняем нулю:

$$-P\,|AM|\,\delta\varphi - P_1\,|AS|\,\delta\varphi - P\,|AN|\,\delta\varphi + R_{1B}\,|AB|\,\delta\varphi = 0. \qquad (1)$$

Учитывая, что

$$AM = AK\cos 60^\circ = \frac{l}{2},$$

$$AS = AT + TS = AS\cos 60^\circ + CD\cos 60^\circ = \frac{5}{4}l,$$

$$AN = AT + TN = AC\cos 60^\circ + CL\cos 60^\circ = \frac{3}{2}\;l, \quad AB = 2l,$$

после сокращения уравнения (1) на $\delta\varphi$ находим

$$R_{1B} = \left(M + \frac{5}{8}M_1\right)g.$$

Для определения горизонтальной составляющей R_{2B} опорной реакции в точке B дадим опоре B подвижность в горизонтальном направлении. С этой целью, применив закон освобождаемости от связей, заменим выступ пола в точке B опорой на катках, которая может перемещаться в горизонтальном направлении (рис. *в*). Приложим в точке B соответствующую реакцию R_{2B}.

Дадим возможное перемещение δr_B точке B по горизонтали направо. При этом правая половина стремянки совершит плоское движение, а левая половина стремянки повернется вокруг точки A. Направив в точке C возможное перемещение δr_C перпендикулярно к AC, определим положение мгновенного центра вращения стороны CB в точке $\mathcal{P}$ пересечения перпендикуляров, восставленных из точек C и B к соответствующим возможным перемещениям δr_C и δr_B. Итак, левая половина AC стремянки поворачи-

вается вокруг A на угол $\delta\varphi_A$ по ходу часовой стрелки, а правая половина CB стремянки – вокруг $\mathcal{P}$ на угол $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$ против хода часовой стрелки.

Определим зависимость между возможными угловыми перемещениями $\delta\varphi_A$ и $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$. Для этого заметим, что шарнир C принадлежит обеим сторонам стремянки, и поэтому

$$\delta r_C = AC\delta\varphi_A, \quad \delta r_C = C\mathcal{P}\delta\varphi_{\mathcal{P}}$$

Следовательно,

$$C\mathcal{P}\delta\varphi_{\mathcal{P}} = AC\delta\varphi_A, \text{ т.е. } \delta\varphi_{\mathcal{P}} = \frac{AC}{C\mathcal{P}}\delta\varphi_A.$$

Нетрудно видеть, что так как $C\mathcal{P} = AC$ (треугольник $BC\mathcal{P}$ является равнобедренным), то

$$\delta\varphi_{\mathcal{P}} = \delta\varphi_A. \tag{2}$$

Применив принцип возможных перемещений, запишем:

$$P\,|AM|\,\delta\varphi_A + P_1\,|SB|\,\delta\varphi_{\mathcal{P}} + P\,|NB|\,\delta\varphi_{\mathcal{P}} + R_{2B}|\mathcal{P}B|\,\delta\varphi_{\mathcal{P}} = 0. \tag{3}$$

Учитывая формулу (2), представим уравнение (3) после сокращения на $\delta\varphi_A$ в виде

$$P\,|AM| + P_1\,|SB| + P\,|NB| + R_{2B}|\mathcal{P}B| = 0. \tag{4}$$

Так как

$$AM = AK\cos 60° = \frac{1}{2}, \quad SB = BD\cos 60° = \frac{3}{4}\,l,$$

$$NB = LB\cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{P}B = \mathcal{P}C\cos 30° + CB\cos 30° = l\sqrt{3},$$

то после подстановки этих значений в уравнение (4), решив его относительно R_{2B}, находим

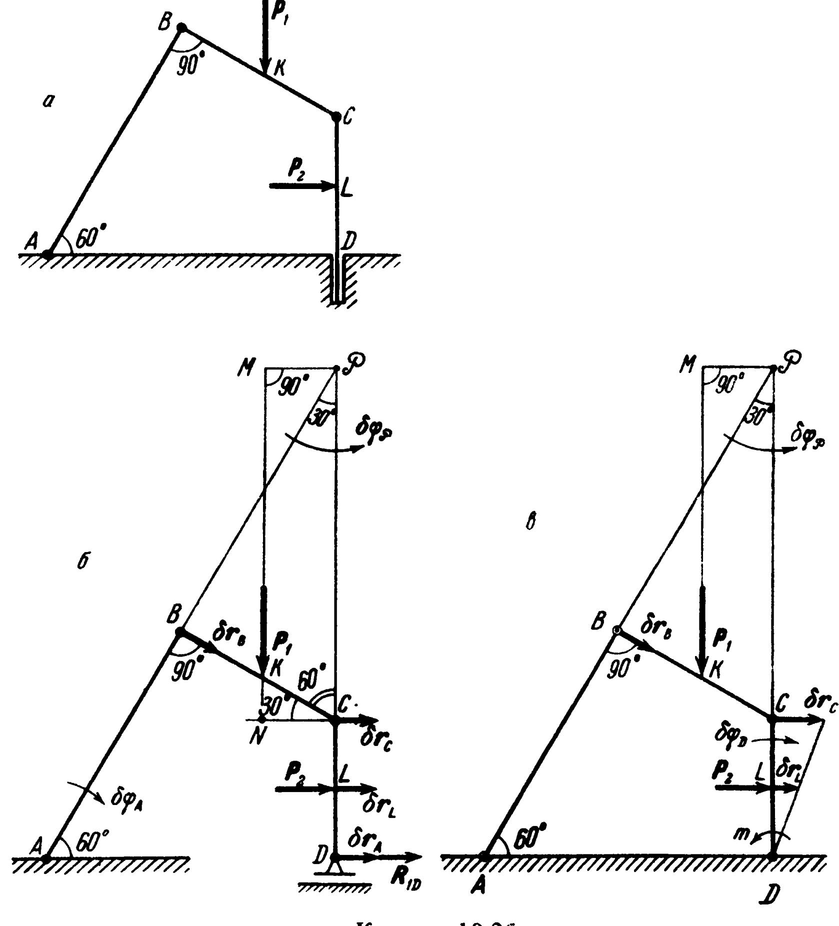
$$R_{2B} = -\frac{\sqrt{3}}{12}(4P + 3P_1) = -\frac{\sqrt{3}}{12}(4M + 3M_1)g.$$

В ходе решения задачи с помощью принципа возможных перемещений мы определяли каждую искомую составляющую реакции в точке B из одного уравнения независимо друг от друга. Так, вертикальная составляющая R_{1B} реакции в точке B была найдена из уравнения (1), а горизонтальная составляющая R_{2B} – из уравнения (3).

Задача 10.25. Две балки AB и BC соединены шарниром в точке B. Балка BC шарнирно прикреплена концом C к вертикальной стойке CD, защемленной в сечении D. Балка AB шарниром A прикреплена к земле.

Определить горизонтальную составляющую реакции R_D и реактивный момент m в защемленном сечении D. Силы P_1 и P_2 показаны на рис. *а*. Массой балок пренебречь; $BC = CD = 2a$, $BK = KC$, $CL = LD$.

Р е ш е н и е. Для определения горизонтальной составляющей реакции в защемленном сечении D применим закон освобождаемости от связей.



К задаче 10.25

Сообщим стойке CD в сечении D подвижность в горизонтальном направлении, мысленно заменив опору в точке D на опору, расположенную на катках (рис. *б*). Приложим в точке D горизонтальную составляющую реакции R_{1D}, соответствующую отброшенной связи.

Дадим возможное перемещение δr_D точке D по горизонтали направо. При этом стойка CD получит поступательное возможное перемещение, т.е.

$$\delta r_C = \delta r_L = \delta r_D. \qquad (1)$$

Балка AB получит возможное угловое перемещение $\delta\varphi_A$, а δr_B будет направлено перпендикулярно к AB, т.е. вдоль BC. Балка BC при наличии возможных перемещений δr_B и δr_C совершает плоское движение. Мгновенный центр вращения $\mathcal{P}$ балки BC находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек B и C к δr_B и δr_C. Итак, балка BC совершает поворот на угол $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$ в направлении против хода часовой стрелки вокруг мгновенного центра вращения $\mathcal{P}$.

Применяя принцип возможных перемещений, вычислим сумму работ активных сил P_1 и P_2 и горизонтальной составляющей реакции R_{1D} на возможных перемещениях их точек приложения и приравняем ее нулю:

$$P_1\,|M\mathcal{P}|\,\delta\varphi_{\mathcal{P}} + P_2\delta r_L + R_{1D}\,\delta r_D = 0. \qquad (2)$$

Из треугольника $\mathcal{P}BC$ находим

$$\mathcal{P}C = \frac{BC}{\sin 30^\circ} = 4a.$$

Тогда

$$\delta\varphi_{\mathcal{P}} = \frac{\delta r_C}{\mathcal{P}C} = \frac{\delta r_C}{4a}. \qquad (3)$$

Учитывая формулы (1) и (3), после почленного сокращения уравнения (2) на δr_D, получаем

$$P_1\frac{|M\mathcal{P}|}{4a} + P_2 + R_{1D} = 0. \qquad (4)$$

Заметив, что

$$M\mathcal{P} = NC = KC\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad (5)$$

и решив уравнение (4) относительно R_{1D}, найдем

$$R_{1D} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{8}P_1 + P_2\right).$$

Знак минус указывает, что горизонтальная составляющая реакции R_{1D} направлена по горизонтали налево.

Переходим к определению реактивного момента m в защемленном сечении D. Для этого заменим защемление в сечении D неподвижным цилиндрическим шарниром, приложив к нему реактивный момент m в направлении против хода часовой стрелки (рис. в).

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi_D$ стойке CD вокруг шарнира D по часовой стрелке. Обозначив возможные перемещения в точ-

ках B и C соответственно δr_B и δr_C, определяем, как и ранее, положение мгновенного центра вращения $\mathcal{P}$ балки BC. При заданном возможном угловом перемещении $\delta\varphi_D$ стойки CD вокруг точки D балка BC совершает поворот на угол $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$ вокруг мгновенного центра вращения $\mathcal{P}$ в направлении против хода часовой стрелки.

Применив принцип возможных перемещений, получаем

$$P_1 |M\mathcal{P}|\, \delta\varphi_{\mathcal{P}} + P_2 |LD|\, \delta\varphi_D - m\delta\varphi_D = 0. \tag{6}$$

Для установления зависимости между $\delta\varphi_D$ и $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$ рассмотрим возможное перемещение δr_C точки C, одновременно принадлежащей балке BC и стойке CD:

$$\delta r_C = \mathcal{P}C\, \delta\varphi_{\mathcal{P}}, \quad \delta r_C = CD\, \delta\varphi_D.$$

Следовательно, $\mathcal{P}C\delta\varphi_{\mathcal{P}} = CD\delta\varphi_D$, откуда $\delta\varphi_{\mathcal{P}} = \dfrac{CD}{\mathcal{P}C}\delta\varphi_D$. Так как $\mathcal{P}C = 4a$, то $\delta\varphi_{\mathcal{P}} = \dfrac{2a}{4a}\delta\varphi_D = \dfrac{1}{2}\delta\varphi_D$. Теперь уравнение (6) после почленного сокращения на $\delta\varphi_D$ принимает вид

$$\frac{1}{2} P_1 |M\mathcal{P}| + P_2 a - m = 0.$$

Учитывая формулу (5), получим

$$m = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} P_1 + P_2\right) a.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 46.1–46.4, 46.8, 46.10, 46.14–46.16, 46.20–46.24, 46.26, 46.29–46.32.

§ 5. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

При движении материальной системы, подчиненной идеальным удерживающим связям, сумма работ активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях точек системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{F}_k - m_k \boldsymbol{a}_k) \cdot \delta \boldsymbol{r}_k = 0.$$

Если

$$\boldsymbol{F}_k = F_{kx}\boldsymbol{i} + F_{ky}\boldsymbol{j} + F_{kz}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}_k = \ddot{x}_k\boldsymbol{i} + \ddot{y}_k\boldsymbol{j} + \ddot{z}_k\boldsymbol{k}, \qquad \delta\boldsymbol{r}_k = \delta x_k\boldsymbol{i} + \delta y_k\boldsymbol{j} + \delta z_k\boldsymbol{k},$$

то общее уравнение динамики имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} [(F_{kx} - m_k\ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{ky} - m_k\ddot{y}_k)\delta y_k + (F_{kz} - m_k\ddot{z}_k)\delta z_k] = 0.$$

Общее уравнение динамики является аналогом принципа возможных перемещений для случая *движения* материальной системы.

При движении системы реакции связей, вообще говоря, переменны. Они могут быть функциями времени, координат материальных точек, их скоростей и их ускорений. Поэтому при решении вторых задач динамики, в которых движение определяется по заданным силам, приходится исключать реакции связей из сопоставленных уравнений движения.

Большое преимущество общего уравнения динамики по сравнению с другими теоремами динамики заключается в том, что в его формулировке отсутствуют реакции идеальных связей. Если не все связи являются идеальными, например имеются связи с трением, то, применяя общее уравнение динамики, следует к активным силам добавлять реакции, соответствующие неидеальным связям.

Вычисление суммы работ сил инерции на возможных перемещениях точек твердого тела производится по формулам:

а) *При поступательном движении:*

$$\delta A = \boldsymbol{R}^{(J)} \cdot \delta \boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{R}^{(J)}$ — равнодействующая сил инерции ($\boldsymbol{R}^{(J)} = -M\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a}$ — ускорение любой точки твердого тела), $\delta\boldsymbol{r}$ — возможное перемещение любой точки твердого тела.

б) *При вращении вокруг неподвижной оси:*

$$\delta A = m_z^{(J)}\delta\varphi,$$

где $m_z^{(J)}$ — главный момент сил инерции относительно оси вращения z ($m_z^{(J)} = -I_z\varepsilon_z$), $\delta\varphi$ — возможное угловое перемещение твердого тела.

в) *При плоском движении*

$$\delta A = \boldsymbol{V}_C^{(J)} \cdot \delta\boldsymbol{r}_C + m_C^{(J)}\delta\varphi,$$

где $\boldsymbol{V}_C^{(J)}$ — главный вектор сил инерции ($\boldsymbol{V}_C^{(J)} = -M\boldsymbol{a}_C$, $\boldsymbol{a}_C$ — ускорение центра масс твердого тела), $m_C^{(J)}$ — главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс C твердого тела перпендикулярно плоскости движения ($m_C^{(J)} = -I_C\varepsilon_z$), $\delta\boldsymbol{r}_C$ — возможное перемещение центра масс C твердого тела, $\delta\varphi$ — возможное угловое перемещение твердого тела.

С помощью общего уравнения динамики можно решать задачи динамики материальной системы в случаях, когда в число задаваемых и искомых величин входят: инерционные характеристики (массы и моменты инер-

ции), ускорения точек системы (линейные и угловые), активные силы и моменты, коэффициенты трения (скольжения и качения), коэффициенты упругости пружин.

Из общего уравнения динамики вытекают дифференциальные уравнения движения материальной системы, в которые не входят реакции идеальных связей. Возможно решение как первых (определение сил по заданному движению), так и вторых задач (определение движения по заданным силам) динамики. При решении вторых задач приходится интегрировать составленную систему дифференциальных уравнений движения. Заметим, что использование общего уравнения динамики является *формальным* методом составления дифференциальных уравнений движения системы. Этот метод является менее удобным и менее эффективным по сравнению с применением уравнений Лагранжа второго рода (читатель сможет в этом убедиться, ознакомившись с содержанием следующего параграфа). Однако общее уравнение динамики справедливо как для голономных, так и для неголономных систем. Уравнения Лагранжа второго рода применимы только к голономным системам.

Указание 1. Задачи с помощью общего уравнения динамики рекомендуется решать в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке активные силы и реакции, соответствующие неидеальным связям (например, силы трения);

2) определить главные векторы и главные моменты сил инерции масс системы.

Дальнейшие действия следует осуществлять в зависимости от того имеет система одну степень свободы или же несколько.

а) *Для системы с одной степенью свободы:*

3) дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения всех сил, указанных в первых двух пунктах, через это возможное перемещение;

4) вычислить сумму работ всех сил, указанных в первых двух пунктах, на возможных перемещениях точек системы; составить общее уравнение динамики, приравняв вычисленную сумму работ сил нулю;

5) после сокращения полученного уравнения на заданное возможное перемещение определить искомую величину либо провести интегрирование дифференциального уравнения движения.

б) *Для системы с несколькими степенями свободы:*

3) выбрать независимые возможные перемещения точек системы в числе, равном числу степеней свободы этой системы;

4) дать возможное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом возможные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю. Выразить возможные перемещения точек приложения сил через это возможное перемещение;

5) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1) и 2), на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения и приравнять эту сумму нулю;

6) последовательно произведя выкладки пунктов 4) и 5) для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений "равновесия" в числе, равном числу независимых возможных перемещений, т.е. числу степеней свободы системы;

7) после сокращения каждого из составленных уравнений на соответствующее независимое возможное перемещение надо определить из полученной системы уравнений искомые величины.

Указание 2. При применении общего уравнения динамики к системам с двумя и бо́льшим числом степеней свободы, в связи с громоздкостью выкладок, удобнее пользоваться следующими правилами:

а) сделать предположение о направлении ускорений точек системы;

б) направить на рисунке силы инерции в стороны, противоположные выбранным направлениям соответствующих ускорений;

в) записать алгебраические величины главных векторов и главных моментов сил инерции;

г) определить знаки работ сил инерции и моментов сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и избранными направлениями возможных перемещений точек системы;

д) если искомые ускорения оказываются положительными, то сделанные предположения о направлениях ускорений подтверждаются, если — отрицательными, то соответствующие ускорения направлены в другую сторону.

Конечно, этот прием может быть использован и при решении задач о движении системы с одной степенью свободы.

Задача 10.26. Каток A и барабан D связаны тонкой нерастяжимой нитью. Нить, привязанная своим концом к оси C_1 катка A, переброшена через блок B и намотана на барабан D. К катку A массой M_1 и радиусом r_1 приложен вращающий момент m, заставляющий каток A катиться вверх без скольжения по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. При этом блок B массой M_2 вращается вокруг неподвижной оси O, а барабан D массой M_3 и радиусом r_3 катится без скольжения вверх по наклонной плоскости расположенной под углом β к горизонту (рис.).

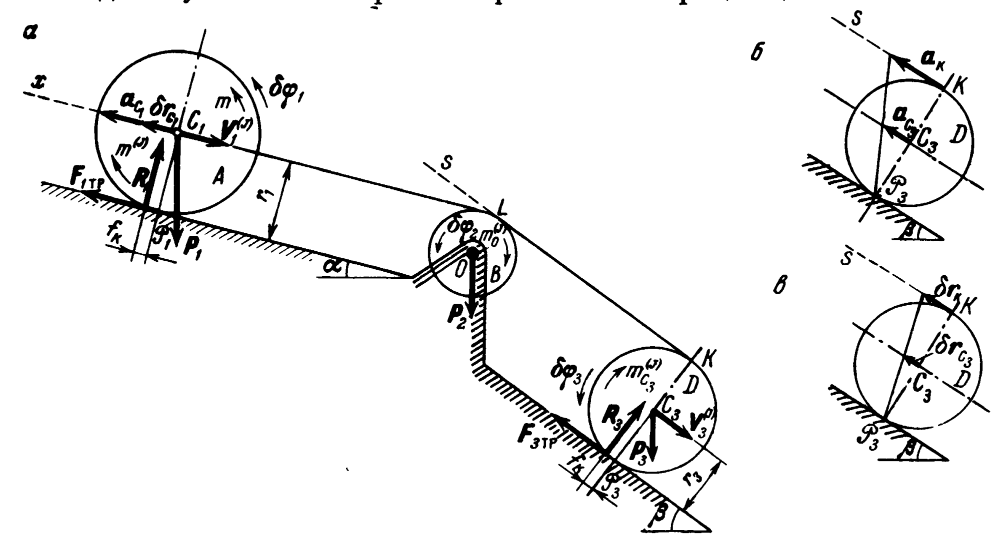
Определить ускорение a_{C_1} центра масс C_1 катка A, если коэффициент трения качения катка и нитей, намотанных на барабан, о наклонные плоскости равен $f_\text{к}$. Каток, блок и барабан считать однородными круглыми цилиндрами. Массой нити и ее проскальзыванием по ободу блока пренебречь.

Решение. Ось z направим перпендикулярно плоскости рисунка на нас.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение катка A на наклонной плоскости определяет положение блока и барабана. Обозначим через r_2 радиус блока B.

К системе приложены активные силы и моменты: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ – сила тяжести катка, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ – сила тяжести блока, $\boldsymbol{P}_3 = M_3\boldsymbol{g}$ – сила тяжести барабана и вращающий момент m.

Наклонные плоскости не являются идеальными связями, поэтому необходимо учесть силы трения. При наличии вращающего момента m



К задаче 10.26

каток A является ведущим и сила трения $\boldsymbol{F}_{1\text{тр}}$ катка A о наклонную плоскость направлена вдоль наклонной плоскости в сторону движения. Сила трения $\boldsymbol{F}_{3\text{тр}}$ нити, намотанной на барабан, о наклонную плоскость также направлена вдоль наклонной плоскости в сторону движения, т.е. вверх.

Ввиду наличия трения качения нормальные реакции наклонных плоскостей R_1 и R_3 смещены вперед в сторону движения на величину коэффициента трения качения $f_\text{к}$.

Для определения модулей сил инерции и моментов пар сил инерции масс системы найдем зависимость между ускорениями центров масс катка A и барабана D и угловыми ускорениями катка, блока и барабана. (Оси x и s изображены на рис. a).

Направим a_{C_1} параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости в сторону движения катка, т.е. по оси x. Ввиду нерастяжимости нити $a_{C_1x} = a_{L\tau} = a_{Ks}$, причем $a_{L\tau} = r_2\epsilon_{2z}$. Учитывая, что мгновенные центры скоростей катка и барабаны соответственно расположены в точках $\mathcal{P}_1$ и

$\mathcal{P}_3$, получим

$$a_{C_1x} = r_1\epsilon_{1z}, \quad a_{Ks} = 2r_3\epsilon_{3z}, \quad a_{C_3s} = a_{Ks}/2$$

(рис. *б*). Следовательно,

$$a_{C_1x} = r_1\epsilon_{1z} = r_2\epsilon_{2z} = 2r_3\epsilon_{3z} = 2a_{C_3s}, \tag{1}$$

где ϵ_{1z}, ϵ_{2z} и ϵ_{3z} — соответственно проекции на ось z угловых ускорений катка, блока и барабана.

Переходим к приведению сил инерции материальных точек системы. Силы инерции катка A, совершающего плоское движение, приводятся к силе, равной главному вектору $V_1^{(J)}$ и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_{C_1}^{(J)}$. Сила приложена в центре масс C_1 катка и направлена противоположно ускорению его центра масс, т.е. параллельно наклонной плоскости вниз ($V_1^{(J)} = -M_1 a_{C_1}$), поэтому

$$V_{1x}^{(J)} = -M_1 a_{C_1x}. \tag{2}$$

Главный момент сил инерции катка $m_{C_1}^{(J)}$ относительно оси, проходящей через его центр масс C_1 перпендикулярно плоскости симметрии, имеет знак, противоположный знаку проекции углового ускорения ϵ_{1z}, т.е.

$$m_{C_1}^{(J)} = -I_{C_1}\epsilon_{1z} = -\frac{M_1 r_1^2}{2}\,\epsilon_{1z}. \tag{3}$$

Силы инерции блока B, вращающегося вокруг неподвижной оси, приводятся к паре сил, момент которой равен главному моменту относительно оси вращения O. Знак момента противоположен знаку проекции его углового ускорения:

$$m_O^{(J)} = -I_O\epsilon_{2z} = -\frac{M_2 r_2^2}{2}\,\epsilon_{2z}. \tag{4}$$

Силы инерции барабана D, совершающего плоское движение, приводятся к силе, равной главному вектору $V_3^{(J)}$, и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_{C_3}^{(J)}$. Сила $V_3^{(J)}$ приложена в его центре масс C_3 и направлена противоположно ускорению a_{C_3}, т.е. параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости вниз; проекция этой силы на ось s равна

$$V_{3s}^{(J)} = -M_3 a_{C_3s}. \tag{5}$$

Главный момент сил инерции $m_{C_3}^{(J)}$ барабана D относительно оси, проходящей через его центр масс C_3 перпендикулярно плоскости материальной симмметрии, имеет знак, противоположный знаку проекции углового

ускорения ϵ_{3z}:

$$m_{C_3}^{(J)} = -I_{C_3}\epsilon_{3z} = -\frac{M_3 r_3^2}{2}\epsilon_{3z}. \qquad (6)$$

Итак, силы инерции материальных точек рассматриваемой системы оказались приведенными к силе $V_1^{(J)}$ и паре сил с моментом $m_{C_1}^{(J)}$ (каток A), к паре сил с моментом $m_O^{(J)}$ (блок B), к силе $V_3^{(J)}$ и паре сил с моментом $m_{C_3}^{(J)}$ (барабан D).

Дадим возможное перемещение δr_{C_1} центру масс C_1 катка A параллельно наклонной плоскости вверх. Учитывая нерастяжимость нити, имеем: $\delta r_{C_1} = \delta r_L = \delta r_K$. Кроме того, $\delta r_L = r_2\delta\varphi_2$, где $\delta\varphi_2$ – возможное угловое перемещение блока B. Принимая во внимание, что мгновенные центры скоростей катка A и барабана D соответственно расположены в точках $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_3$, получим $\delta r_{C_1} = r_1\delta\varphi_1$, $\delta r_K = 2r_3\delta\varphi_3 = 2\delta r_{C_3}$ (рис. *в*), где $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_3$ – соответственно возможные угловые перемещения катка и барабана. Следовательно,

$$\delta r_{C_1} = r_1\delta\varphi_1 = r_2\delta\varphi_2 = 2r_3\delta\varphi_3 = 2\delta r_{C_3}. \qquad (7)$$

Составим общее уравнение динамики:

$$m\delta\varphi_1 - P_1\delta r_{C_1}\sin\alpha + V_{1x}^{(J)}\delta r_{C_1} + m_{C_1}^{(J)}\delta\varphi_1 - R_1 f_k\,\delta\varphi_1 +$$
$$+ m_O^{(J)}\delta\varphi_2 - P_3\delta r_{C_3}\sin\beta + V_{3s}^{(J)}\delta r_{C_3} + m_{C_3}^{(J)}\delta\varphi_3 -$$
$$- R_3 f_\text{к}\,\delta\varphi_3 + \delta A(P_2) + \delta A(F_{1\text{тр}}) + \delta A(F_{3\text{тр}}) = 0. \qquad (8)$$

Работа силы тяжести P_2 блока B равна нулю, так как точка приложения этой силы неподвижна.

Выберем теперь в качестве возможного перемещения действительное перемещение dr_{C_1} (это допустимо, ибо в данном случае связи стационарны). Тогда работа сил трения $\delta A(F_{1\text{тр}})$ и $\delta A(F_{3\text{тр}})$ будет равна нулю, так как при действительных перемещениях точки приложения сил трения $F_{1\text{тр}}$ и $F_{3\text{тр}}$ всегда совпадают с соответствующими мгновенными центрами скоростей.

Учитывая, что $R_1 = P_1\cos\alpha$, $R_3 = P_3\cos\beta$, $\delta r_{C_1x} = \delta r_{C_1}$, $\delta r_{C_3s} = \delta r_{C_3}$, и воспользовавшись формулами (2)–(6), запишем уравнение (8) в виде

$$m\delta\varphi_1 - P_1\delta r_{C_1}\sin\alpha - \frac{P_1}{g}a_{C_1x}\delta r_{C_1} - \frac{P_1 r_1^2}{2g}\epsilon_{1z}\delta\varphi_1 -$$
$$- f_\text{к} P_1\cos\alpha\,\delta\varphi_1 - \frac{P_2 r_2^2}{2g}\epsilon_{2z}\delta\varphi_2 - P_3\delta r_{C_3}\sin\beta - \frac{P_3}{g}a_{C_3s}\delta r_{C_3} -$$
$$- \frac{P_3 r_3^2}{2g}\epsilon_{3z}\delta\varphi_3 - f_\text{к} P_3\cos\beta\,\delta\varphi_3 = 0. \qquad (9)$$

Выразив с помощью формулы (1) ϵ_{1z}, ϵ_{2z}, ϵ_{3z} и $a_{C_3 s}$ через $a_{C_1 x}$, а $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$ и δr_{C_3} с помощью формулы (7) – в зависимости от δr_{C_1}, представим уравнение (9) после почленного сокращения на δr_{C_1} в виде

$$\frac{m}{r_1} - P_1 \sin\alpha - \frac{3}{2}\frac{P_1}{g} a_{C_1 x} - \frac{f_к}{r_1} P_1 \cos\alpha - \frac{P_2}{2g} a_{C_1 x} -$$
$$- \frac{P_3}{2}\sin\beta - \frac{3P_3}{8g} a_{C_1 x} - \frac{f_к}{2r_3} P_3 \cos\beta = 0. \qquad (10)$$

Из уравнения (10) определяем проекцию искомого ускорения центра масс катка A (при этом $P_1 = M_1 g$, $P_2 = M_2 g$, $P_3 = M_3 g$):

$$a_{C_1 x} = 8\,\frac{\dfrac{m}{r_1} - M_1 g\left(\sin\alpha + \dfrac{f_к}{r_1}\cos\alpha\right) - \dfrac{M_3 g}{2}\left(\sin\beta + \dfrac{f_к}{r_3}\cos\beta\right)}{12M_1 + 4M_2 + 3M_3}.$$

Если

$$\frac{m}{r_1} > M_1 g\left(\sin\alpha + \frac{f_к}{r_1}\cos\alpha\right) + \frac{M_3 g}{2}\left(\sin\beta + \frac{f_к}{r_3}\cos\beta\right),$$

то $a_{C_1 x} > 0$, т.е. ускорение центра масс C_1 катка A направлено параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости вверх.

Задача 10.27. Центробежный регулятор применяется для автоматического управления частотой вращения гребных винтов судов и других вращающихся валов. Регулятор состоит из шаров A и B, находящихся в вершинах ромба $OACB$. Сила тяжести каждого шара P_1, длина стороны ромба l, сила тяжести муфты регулятора P_2. Угол, образованный каждой стороной ромба с вертикалью, обозначим α (рис.). Регулятор вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Определить угол α в равновесном положении, когда этот угол остается постоянным. Массами всех частей регулятора, кроме масс шаров и муфты, пренебречь. Шары A и B рассматривать как материальные точки.

Решение. На регулятор действуют активные силы: две силы P_1 и одна P_2. Присоединим к ним две силы инерции шаров J_1. Каждая сила инерции равна

$$J_1 = \frac{P_1}{g} r\omega^2, \qquad (1)$$

приложена в центре каждого шара в точках A и B и направлена по горизонтали от оси вращения в стороны, противоположные нормальному ускорению шаров. Величина r в (1) – это длина перпендикуляра, опущенного из

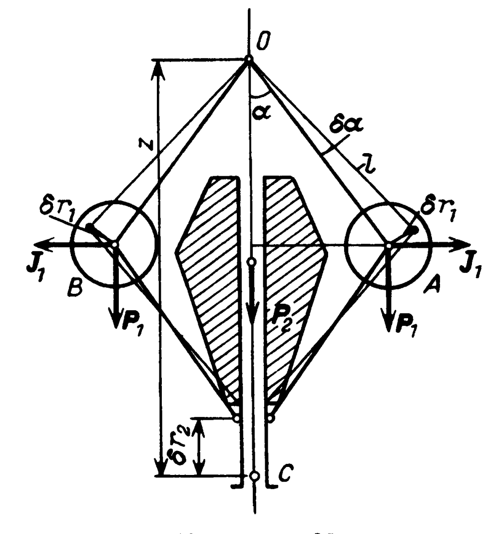
центра шара на вертикальную ось вращения регулятора. Следовательно,

$$r = l\sin\alpha, \quad J_1 = \frac{F_1}{g} l \sin\alpha \cdot \omega^2.$$

Силы инерции муфты взаимно уравновешиваются. Добавив к активным силам, действующим на регулятор, силы инерции, можно рассматривать вращающийся регулятор как находящийся в покое и применять общее уравнение динамики.

Дадим системе возможное перемещение, изменив угол α на малую величину $\delta\alpha$ (рис.). Перемещения центров шаров при этом обозначим δr_1, перемещение муфты δr_2. Тогда сумма работ всех активных сил и сил инерции на возможных перемещениях будет равна нулю:

$$2J_1\delta r_1\cos\alpha - 2F_1\delta r_1\sin\alpha - -F_2\delta r_2 = 0. \qquad (2)$$



К задаче 10.27

Здесь $\delta r_1 = l\delta\alpha$, причем δr_1 образует угол α с горизонтальной прямой AB, ибо δr_1 перпендикулярно к OB и OA соответственно, а прямая AB перпендикулярна вертикали OC.

Перейдем к вычислению δr_2. Это перемещение равно уменьшению диагонали OC ромба при увеличении угла α на величину $\delta\alpha$. Обозначая $OC = z$, находим

$$OC = z = 2l\cos\alpha. \qquad (3)$$

Дифференцируя, получаем бесконечно малое изменение

$$\delta z = -2l\sin\alpha\cdot\delta\alpha.$$

Тогда

$$\delta r_2 = -\delta z = 2l\sin\alpha\cdot\delta\alpha.$$

Внося в уравнение работ (2) найденные значения δr_1 и δr_2, имеем

$$2\frac{F_1}{g} l^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\delta\alpha - 2F_1 l\sin\alpha\cdot\delta\alpha - 2F_2 l\sin\alpha\cdot\delta\alpha = 0.$$

Сокращая на $2l\ \delta\alpha$, находим

$$\sin\alpha\left(\frac{F_1}{g} l\omega^2\cos\alpha - F_1 - F_2\right) = 0.$$

Решение $\sin\alpha = 0$ не имеет практического значения, так как конструкция регулятора не позволяет углу α обращаться в нуль. Реальное значение имеет второй угол α, определяемый формулой

$$\cos\alpha = \frac{F_1 + F_2}{F_1 l \omega^2} g.$$

Высота муфты находится согласно (3):

$$z = \frac{2(F_1 + F_2) g}{F_1 \omega^2}.$$

Назначение регулятора — поддерживать постоянную частоту вращения вала. Для этого соединяют конец муфты — точку C — с золотником. Если, предположим, у судна на волне оголился винт (сопротивление воздуха во много раз меньше сопротивления воды и, следовательно, частота вращения валопровода с винтом стала увеличиваться), то шары регулятора с увеличением угловой скорости раздвигаются, муфта C поднимается, а вместе с ней поднимается и золотник, уменьшающий подачу топлива в двигатель. Благодаря этому автоматически уменьшается угловая скорость валопровода с винтом.

Задача 10.28. Дифференциальный блок (рис. *а*) служит для подъема тяжестей. Сила F приложена к концу невесомой нерастяжимой нити. Нить, переброшенная через блок A радиусом R, охватывает нижний подвижный блок B массой m_1. Второй конец нити намотан на блок D радиусом r. Блоки A и D образуют ступенчатый барабан массой m с радиусом инерции ρ относительно горизонтальной оси вращения барабана. Радиус инерции подвижного блока B относительно оси, проходящей через центр масс блока C перпендикулярно плоскости его симметрии, равен ρ_1. К оси C блока B подвешен поднимаемый груз K массой m_2.

Определить угловое ускорение ϵ_z ступенчатого барабана.

Р е ш е н и е. Дифференциальный блок является системой с одной степенью свободы. Действительно, угол поворота φ барабана определяет положение всех точек системы.

К дифференциальному блоку приложены активные силы: F — сила, действующая на конец нити; mg — сила тяжести (ступенчатого) барабана, $m_1 g$ — сила тяжести подвижного блока B, $m_2 g$ — сила тяжести поднимаемого груза K. Связи, наложенные на систему, являются идеальными. Нить считается натянутой при работе дифференциального блока.

Согласно общему уравнению динамики системы, добавляем к активным силам силы инерции материальных точек системы.

Проекцию на ось z (ось z направим перпендикулярно плоскости рисунка на нас) искомого углового ускорения ступенчатого барабана обозначим ϵ_z. К ступенчатому барабану, вращающемуся вокруг неподвижной оси z,

приложим пару сил, момент которой равен главному моменту сил инерции $m_z^{(J)}$. Знак этого момента противоположен знаку ϵ_z:

$$m_z^{(J)} = -I_z\epsilon_z = -m\rho^2\epsilon_z. \quad (1)$$

Рассмотрим подвижный блок B, совершающий плоское движение. Сила инерции блока, равная главному вектору сил инерции $V_1^{(J)}$, приложена в его центре масс C и направлена противоположно ускорению a_C; следовательно,

$$V_1^{(J)} = -m_1 a_C. \quad (2)$$

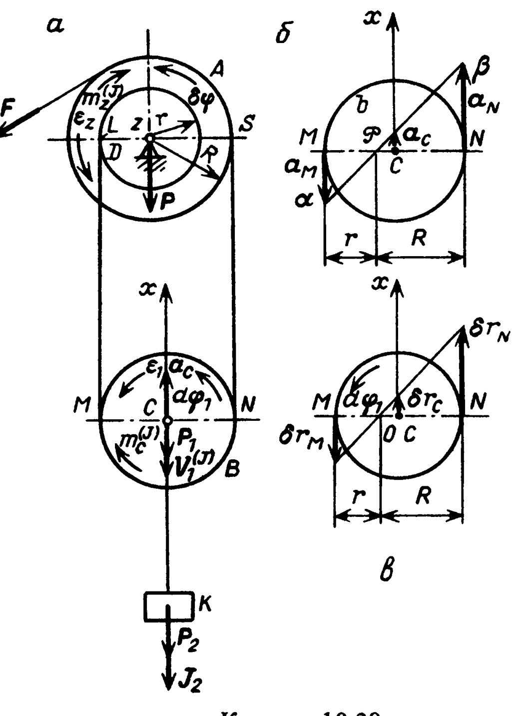
Его проекция на ось x (рис. *а*) равна

$$V_{1x}^{(J)} = -m_1 a_{Cx}. \quad (3)$$

Главный момент сил инерции блока B относительно оси, проходящей через его центр масс C перпендикулярно плоскости симметрии, равен

$$m_C^{(J)} = -I_C\epsilon_{1z} = -m_1\rho_1^2\epsilon_{1z}. \quad (4)$$

В формулы (3) и (4) входят a_{Cx} и ϵ_{1z}, которые надо выразить через проекции углового ускорения ступенчатого барабана ϵ_z.



К задаче 10.28

Заметим, что точки L и M нити имеют равные по модулю линейные ускорения. Тогда L расположена на ободе блока D радиусом r, вращающегося с угловым ускорением ϵ; следовательно,

$$a_{Mx} = a_{Lx} = -r\epsilon_z. \quad (5)$$

Точки N и S нити также имеют равные по модулю линейные ускорения. Точка S расположена на ободе блока A радиусом R, вращающегося с угловым ускорением ϵ_z; следовательно,

$$a_{Nx} = a_{Sx} = R\epsilon_z. \quad (6)$$

Изобразим ускорения точек M и N нити на рис. *б*. Проекцию a_{Cx} ускорения a_C центра масс C блока B на ось x можно легко определить рассуждением, законность которого обоснована в кинематике. Для этого соединим концы векторов ускорений a_M и a_N прямой. Центр масс C блока B движет-

ся по вертикали. Поэтому ускорение a_C также направлено по вертикали. Конец a_C лежит на прямой $\alpha\beta$ (рис. *б*).

Так как отрезки нити ML и NS расположены вертикально, то диаметр блока B равен

$$MN = R + r. \tag{7}$$

Из подобия треугольников $\mathcal{P}M\alpha$ и $\mathcal{P}N\beta$ следует, что

$$\frac{a_M}{M\mathcal{P}} = \frac{a_N}{N\mathcal{P}}. \tag{8}$$

Учитывая фоpмулы (5)–(7), находим $M\mathcal{P} = r$, $N\mathcal{P} = R$. Следовательно, $C\mathcal{P} = MC - M\mathcal{P} = \dfrac{R+r}{2} - r = \dfrac{R-r}{2}$.

Из пропорции $\dfrac{a_{Cx}}{a_{Mx}} = -\dfrac{C\mathcal{P}}{M\mathcal{P}}$ находим $a_{Cx} = -\dfrac{C\mathcal{P}}{M\mathcal{P}} a_{Mx}$, т.е.

$$a_{Cx} = \frac{R-r}{2}\,\epsilon_z. \tag{9}$$

Проекция углового ускорения блока B равна

$$\epsilon_{1z} = -\frac{a_{Mx}}{M\mathcal{P}} = \frac{a_{Nx}}{N\mathcal{P}} = \frac{a_{Cx}}{C\mathcal{P}}. \tag{10}$$

Тогда получим

$$\epsilon_{1z} = \epsilon_z. \tag{11}$$

Учитывая знаки a_{Cx} и ϵ_z, направим на рис. *а* главный вектор $V_1^{(J)}$ сил инерции блока B по вертикали вниз. Внося в (2) значение a_{Cx} из (9), получаем

$$V_{1x}^{(J)} = -m_1\frac{R-r}{2}\,\epsilon_z. \tag{12}$$

После подстановки в формулу (4) значения ϵ_{1z} из (11) имеем

$$m_C^{(J)} = -m_1\rho_1^2\epsilon_z. \tag{13}$$

Груз K силой тяжести m_2g движется по вертикали вверх. Проекция на ось x его ускорения равна

$$a_{Cx} = \frac{R-r}{2}\,\epsilon_z. \tag{14}$$

Поэтому равнодействующая сил инерции груза K равна

$$J_2 = -m_2a_C \tag{15}$$

и направлена по вертикали вниз. Ее проекция равна

$$J_{2x} = -m_2 \frac{R-r}{2} \epsilon_z. \tag{16}$$

Итак, в результате приведения сил инерции дифференциального блока мы получили: пару сил с моментом $m_z^{(J)}$ (ступенчатый барабан), силу $V_1^{(J)}$, пару сил с моментом $m_C^{(J)}$ (блок B) и силу J_2 (груз K).

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ ступенчатому барабану, направив $\delta\varphi$ против хода часовой стрелки. Вычислим возможные перемещения точек приложения активных сил и сил инерции, выразив их через $\delta\varphi$.

Точки L и M нити имеют равные возможные перемещения. Точка L расположена на ободе блока D радиусом r, получившего возможное перемещение $\delta\varphi$ против хода часовой стрелки. Поэтому возможное перемещение точки M направлено по вертикали вниз, причем

$$\delta r_M = \delta r_L = r\,\delta\varphi. \tag{17}$$

Точки N и S нити также имеют равные возможные перемещения. Точка S нити расположена на ободе блока радиусом R, получившего возможное перемещение $\delta\varphi$ против хода часовой стрелки. Поэтому возможное перемещение точки N направлено по вертикали вверх, причем

$$\delta r_N = \delta r_S = R\,\delta\varphi. \tag{18}$$

Изобразим возможные перемещения точек M и N на рис. *в*. Осуществив построение, аналогичное тому, которое было сделано для ускорений этих точек на рис. *б*, запишем:

$$\frac{\delta r_M}{OM} = \frac{\delta r_N}{ON}. \tag{19}$$

Воспользовавшись формулами (17) и (18), из пропорции получим $MO = r$, $ON = R$ (т.е. точка $\mathcal{P}$ рис. *б* совмещена с точкой O рис. *в*). Следовательно, $OC = MC - MO = \dfrac{R+r}{2} - r = \dfrac{R-r}{2}$. Из пропорции

$$\frac{\delta r_C}{OC} = \frac{\delta r_M}{OM} \tag{20}$$

находим возможное перемещение центра масс C нижнего блока B:

$$\delta r_C = \frac{R-r}{2}\,\delta\varphi. \tag{21}$$

Оно направлено по вертикали вверх. Возможное угловое перемещение

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta r_M}{OM} = \frac{\delta r_N}{ON} = \frac{\delta r_C}{OC} \tag{22}$$

блока B направлено против хода часовой стрелки, причем

$$\delta\varphi_1 = \delta\varphi. \tag{23}$$

Переходим к составлению общего уравнения динамики. Для этого надо сумму работ активных сил и сил инерции на возможных перемещениях точек системы приравнять нулю. Имеем

$$m_z^{(F)}\delta\varphi + m_z^{(J)}\delta\varphi + m_1 g\,\delta r_{Cx} + V_{1x}^{(J)}\delta r_{Cx} +$$

$$+ m_C^{(J)}\delta\varphi_1 + m_2 g\,\delta r_{Cx} + J_{2x}\delta r_{Cx} = 0.$$

Работа силы тяжести mg равна нулю, так как точка приложения этой силы неподвижна.

Учитывая, что

$$m_z^{(F)} = FR, \quad m_1 g_{1x} = -m_1 g, \quad m_2 g_{2x} = -m_2 g, \quad \delta r_{Cx} = \delta r_C,$$

а также принимая во внимание формулы (1),(12), (13), (16), (21), (23), после почленного сокращения уравнения на $\delta\varphi$ получаем

$$FR - m\rho^2\epsilon_z - m_1 g\frac{R-r}{2} - m_1\left(\frac{R-r}{2}\right)^2\epsilon_z - m_1\rho_1^2\epsilon_z -$$

$$- m_2 g\frac{R-r}{2} - m_2\left(\frac{R-r}{2}\right)^2\epsilon_z = 0.$$

Решая это уравнение относительно ϵ_z, находим

$$\epsilon_z = 2\frac{2FR - (m_1 + m_2)g(R-r)}{4m\rho^2 + 4m_1\rho_1^2 + m_1(R-r)^2 + m_2(R-r)^2}.$$

Груз K поднимается из состояния покоя ускоренно вверх при $\epsilon_z > 0$, т.е. при выполнении условия

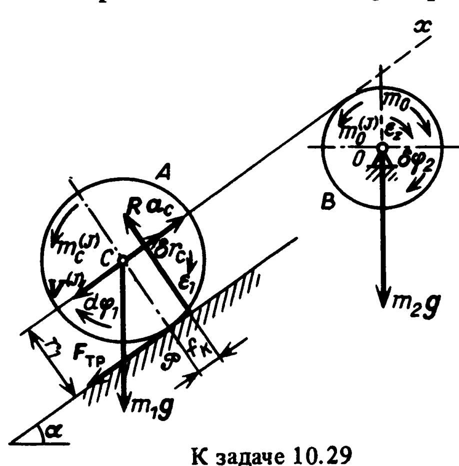
$$F > (m_1 + m_2)\, g\frac{R-r}{2R}.$$

Груз K опускается из состояния покоя ускоренно вниз при $\epsilon_z < 0$, т.е. при выполнении условия

$$F < (m_1 + m_2) g\frac{R-r}{2R}.$$

Если $F = (m_1 + m_2)\ g\ \dfrac{R - r}{2R}$, то $\epsilon_z = 0$. При этом груз находится в покое либо движется равномерно вверх или вниз в зависимости от начальных условий движения.

Задача 10.29. К оси C катка A массой m_1 и радиусом r_1 прикреплен конец тонкой невесомой нерастяжимой нити, намотанной на блок B массой m_2 и радиусом r_2. К блоку B приложена пара сил с моментом m_O. При этом нить наматывается на обод вращающегося вокруг неподвижной оси блока B, а каток A катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту (рис.).



К задаче 10.29

Определить ускорение центра масс C катка, если коэффициент трения качения катка о наклонную плоскость равен $f_к$. Каток A и блок B считать однородными круглыми дисками.

Р е ш е н и е. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение блока B, заданное посредством его угла поворота, определяет положение катка A.

Изобразим активные силы: $m_1 g$ — сила тяжести катка A, $m_2 g$ — сила тяжести блока B, пару сил с вращающим моментом m_O. Наклонная плоскость, по которой катится каток A, не является идеальной связью. Поэтому к активным силам добавляем силу трения $F_{тр}$ катка о наклонную плоскость, равную

$$F_{тр} = fN = fm_1 g \cos\alpha \qquad (1)$$

и направленную вдоль наклонной плоскости вниз (f — коэффициент трения скольжения). Так как имеется трение качения, то нормальная сила реакции R наклонной плоскости смещена в сторону движения катка на расстояние $f_к$, равное плечу пары трения качения:

$$m_{тр} = f_к R = f_к m_1 g \cos\alpha. \qquad (2)$$

Переходим к рассмотрению сил инерции системы. Направим ось z перпендикулярно плоскости рисунка от нас, а ось x — вдоль нити. Ускорение a_C центра масс C катка направлено параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости. Ввиду того, что нить нерастяжима,

$$a_{Cx} = r_2 \epsilon_{2z}. \qquad (3)$$

При качении катка без скольжения мгновенный центр скоростей нахо-

дится в точке $\mathcal{P}$ касания катка с наклонной плоскостью, поэтому

$$a_{Cx} = r_1 \epsilon_{1z}, \tag{4}$$

где ϵ_{1z} – проекция углового ускорения катка. Следовательно,

$$a_{Cx} = r_1 \epsilon_{1z} = r_2 \epsilon_{2z}. \tag{5}$$

Согласно методу кинетостатики, в общее уравнение динамики входят силы инерции. К блоку B, вращающемуся вокруг неподвижной горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, приложим пару сил инерции с моментом $m_O^{(J)}$, знак которого противоположен проекции углового ускорения ϵ_{2z}:

$$m_O^{(J)} = -I_O \epsilon_{2z}. \tag{6}$$

Блок рассматривается как круглый однородный диск, поэтому его момент инерции относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр O, равен

$$I_O = \frac{m_2 r_2^2}{2}. \tag{7}$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$m_O^{(J)} = -\frac{m_2 r_2^2}{2} \epsilon_{2z}. \tag{8}$$

Силы инерции катка A, совершающего плоское движение, приводятся к силе, равной главному вектору $V^{(J)}$, и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_C^{(J)}$. Сила инерции $V^{(J)}$ приложена в центре масс катка C и направлена противоположно ускорению a_C. Следовательно,

$$V_x^{(J)} = -m_1 a_{Cx}. \tag{9}$$

Главный момент сил инерции $m_C^{(J)}$ относительно оси C проходящей через центр масс катка перпендикулярно его плоскости симметрии, имеет знак, противоположный знаку проекции углового ускорения ϵ_{1z} катка:

$$m_C^{(J)} = -I_C \epsilon_{1z}. \tag{10}$$

Учитывая, что $I_C = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$, запишем (10) в виде

$$m_C^{(J)} = -\frac{m_1 r_1^2}{2} \epsilon_{1z}. \tag{11}$$

Итак, силы инерции данной системы приводятся к паре сил с моментом $m_O^{(J)}$, приложенной к блоку B, а также к силе $V_x^{(J)}$ и паре сил с моментом $m_C^{(J)}$, приложенных к катку A.

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi_2$ блоку B. При этом точка нити, лежащая на ободе блока, получит возможное перемещение $r_2\,\delta\varphi_2$. Так как нить нерастяжима, то такое же возможное перемещение получит центр масс катка – точка C:

$$\delta r_C = r_2\,\delta\varphi_2. \tag{12}$$

Точка $\mathcal{P}$ является мгновенным центром скоростей катка, поэтому возможное перемещение центра катка равно

$$\delta r_C = r_1\,\delta\varphi_1, \tag{13}$$

где $\delta\varphi_1$ – возможное угловое перемещение катка A. Приравнивая (12) и (13), имеем

$$\delta r_C = r_1\,\delta\varphi_1 = r_2\,\delta\varphi_2. \tag{14}$$

Составим общее уравнение динамики для рассматриваемой системы:

$$m_O\,\delta\varphi_2 + m_O^{(J)}\,\delta\varphi_2 - m_1 g\,\delta r_C \sin\alpha + V_x^{(J)}\,\delta r_C + m_C^{(J)}\,\delta\varphi_1 +$$
$$+ m_{\text{тр}}\,\delta\varphi_1 + \delta A\,(F_{\text{тр}}) + \delta A\,(m_2 g) = 0.$$

Работа силы тяжести $m_2 g$ равна нулю, так как точка приложения этой силы неподвижна.

Выберем теперь в качестве возможного перемещения действительное перемещение $d\varphi_2$ (это можно сделать, так как в рассматриваемой задаче все связи стационарны и, следовательно, действительное перемещение является одним из возможных). Тогда работа силы трения скольжения $\delta A\,(F_{\text{тр}})$ будет равна нулю, так как при действительном перемещении точка приложения силы трения скольжения всегда совпадает с мгновенным центром скоростей.

Учитывая, что $m_{\text{тр}} = -f_{\text{к}} R = -f_{\text{к}} m_1 g \cos\alpha$, а также используя формулы (8), (9) и (11), находим

$$m_O\,\delta\varphi_2 - \frac{m_2 r_2^2}{2}\,\epsilon_{2z}\,\delta\varphi_2 - m_1 g\,\delta r_C \sin\alpha - m_1 a_{Cx}\,\delta r_C -$$
$$- \frac{m_1 r_1^2}{2}\,\epsilon_{1z}\,\delta\varphi_1 - f_{\text{к}} m_1 g \cos\alpha \cdot \delta\varphi_1 = 0.$$

С помощью формул (5) и (14) выразим $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ через δr_C, а ϵ_{1z} и ϵ_{2z} – через a_{Cx}. После сокращения всех слагаемых на δr_C получим

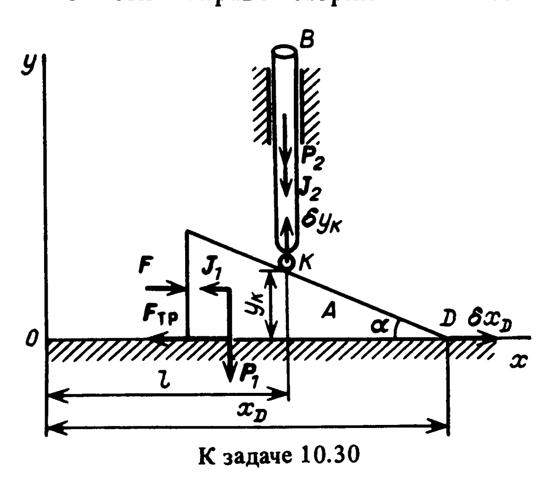
$$\frac{m_O}{r_2} - \frac{m_2}{2}\,a_{Cx} - m_1 g \sin\alpha - m_1 a_{Cx} - \frac{m_1}{2}\,a_{Cx} -$$
$$- \frac{f_{\text{к}}}{r_1}\,m_1 g \cos\alpha = 0,$$

откуда определим проекции на ось x искомого ускорения центра масс катка A:

$$a_{Cx} = 2\,\frac{\dfrac{m_O}{r_2} - m_1 g\left(\sin\alpha + \dfrac{f_к}{r_1}\cos\alpha\right)}{3m_1 + m_2}.$$

Если $\dfrac{m_O}{r_2} > m_1 g\left(\sin\alpha + \dfrac{f_к}{r_1}\cos\alpha\right)$, то $a_{Cx} > 0$, т.е. $\boldsymbol{a}_C$ направлено параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости вверх. Во всех случаях $\boldsymbol{a}_C$ по модулю равно a_{Cx}.

Задача 10.30. При движении кулачка A массой m_1 по горизонтальной плоскости направо стержень B массой m_2 поднимается в вертикальных направляющих вверх. Коэффициент трения скольжения кулачка о горизонтальную плоскость равен f (рис.).



К задаче 10.30

Какое ускорение приобретает кулачок A, боковая поверхность которого образует угол α с горизонтом, если к нему приложена слева направо горизонтальная сила $\boldsymbol{F}$?

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение кулачка A на горизонтальной плоскости определяет положение стержня B. Неподвижные координатные оси x, y изображены на рисунке.

К системе приложены активные силы: $m_1\boldsymbol{g}$ – сила тяжести кулачка, $m_2\boldsymbol{g}$ – сила тяжести стержня, $\boldsymbol{F}$ – движущая сила. Добавляем к активным силам силу трения скольжения кулачка A о горизонтальную плоскость, направленную в сторону, противоположную движению кулачка, т.е. налево.

Рассмотрим силы инерции масс системы. Так как кулачок A и стержень B движутся поступательно, то к каждому из них приложена равнодействующая сил инерции, направленная противоположно ускорению данного твердого тела и равная по модулю произведению его массы на модуль ускорения.

Обозначив абсциссу точки D кулачка через x_D (рис.), выразим ординату точки K стержня через x_D:

$$y_K = (x_D - l)\,\mathrm{tg}\,\alpha, \qquad (1)$$

где l и α – постоянные.

Вычисляем вторую производную от y_K по времени, определяя зависимость между ускорениями стержня и кулачка:

$$\ddot{y}_K = \ddot{x}_D \operatorname{tg} \alpha. \qquad (2)$$

Если ускорение кулачка A направлено по горизонтали вправо, то ускорение стержня B направлено по вертикали вверх. Поэтому проекция на ось x равнодействующей силы инерции кулачка J_1 определяется формулой

$$J_{1x} = -m_1 \ddot{x}_D, \qquad (3)$$

а проекция на ось y равнодействующей сил инерции стержня J_2 равна

$$J_{2y} = -m_2 \ddot{y}_K = -m_2 \ddot{x}_D \operatorname{tg} \alpha. \qquad (4)$$

Дадим кулачку A возможное перемещение δx_D по горизонтали вправо. При этом стержень B получит возможное перемещение δy_K по вертикали вверх. Зависимость между δx_D и δy_K находим варьированием зависимости (1):

$$\delta y_K = \delta x_D \operatorname{tg} \alpha. \qquad (5)$$

Составляем общее уравнение динамики для данной системы, приравнивая нулю сумму работ активных сил, сил трения и сил инерции на возможных перемещениях точек системы:

$$F_x \delta x_D + J_{1x} \delta x_D + (F_{\text{тр}})_x \delta x_D + m_2 g \delta y_K + J_{2y} \delta y_K = 0,$$

где $(F_{\text{тр}})_x = -fN = -f(m_1 g + m_2 g + J_{2y})$, $F_x = F$. Используя формулы (4) и (5) и сокращая все члены уравнения на δx_D, находим

$$F - m_1 \ddot{x}_D - f(m_1 g + m_2 g + m_2 \ddot{x}_D \operatorname{tg} \alpha) - m_2 g \operatorname{tg} \alpha - m_2 \ddot{x}_D \operatorname{tg}^2 \alpha = 0,$$

откуда определяется искомое ускорение кулачка

$$\ddot{x}_D = \frac{F - f(m_1 g + m_2 g) - m_2 g \operatorname{tg} \alpha}{m_1 + m_2 (f + \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} \alpha}.$$

Отсюда следует, что если

а) $F > f(m_1 g + m_2 g) + m_2 g \operatorname{tg} \alpha$, то $\ddot{x}_D > 0$,

т.е. ускорение кулачка A направлено направо;

б) $F < f(m_1 g + m_2 g) + m_2 g \operatorname{tg} \alpha$, то $\ddot{x}_D < 0$,

т.е. ускорение кулачка A направлено налево;

в) $F = f(m_1 g + m_2 g) + m_2 g \operatorname{tg} \alpha$, то $\ddot{x}_D = 0$,

т.е. кулачок A находится в покое, либо движется равномерно направо или налево (в зависимости от заданных начальных условий движения).

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 47.1–47.7, 47.9, 47.11–47.17, 47.19, 48.28–48.32, 48.36–48.39.

§ 6. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

1. Обобщенные координаты. Обобщенные силы. Рассматривается материальная система, подчиненная идеальным голономным связям.

Обобщенными координатами называются независимые параметры, однозначно определяющие положения точек материальной системы.

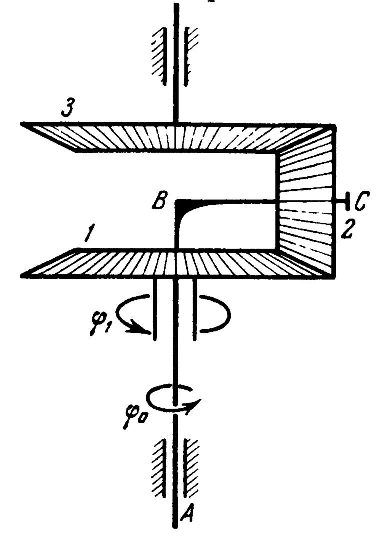


Рис. 10.20

Число независимых обобщенных координат материальной системы, подчиненной идеальным и голономным связям, равно числу степеней свободы.

Так, кривошипно-ползунный механизм является системой с одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты может быть взят угол поворота кривошипа, значением которого однозначно определяются положения всех точек системы.

Механизм конического дифференциала (рис. 10.20) является системой с двумя степенями свободы. В качестве независимых обобщенных координат можно избрать угол поворота φ_1 ведущего колеса *1* и угол поворота φ_0 водила *ABC*, вращающегося вокруг вертикальной оси. Значения углов поворота φ_1 и φ_0 однозначно определяют положение ведомого колеса *3*.

Радиус-вектор r_k, определяющий положение k-й материальной точки системы с s степенями свободы, является в случае нестационарных связей функцией обобщенных координат и времени:

$$r_k = r_k\,(q_1, q_2, \ldots, q_s, t),$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_s$ – обобщенные координаты, а $k = 1, 2, \ldots, n$ (n – число точек материальной системы).

Скорость этой точки равна

$$\mathrm{v}_k = \frac{\partial r_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial r_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial r_k}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial r_k}{\partial t}.$$

Возможное перемещение этой точки, выражаемое вариацией радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_k$, имеет вид

$$\delta \boldsymbol{r}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_s}\delta q_s,$$

где $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ – обобщенные возможные перемещения, т.е. вариации обобщенных координат.

Обращаем внимание читателя на то, что в формуле, определяющей возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_k$, на одно слагаемое меньше по сравнению с формулой, дающей скорость точки $\mathbf{v}_k$. Это получается потому, что возможное перемещение является вариацией функции, т.е. определяется при фиксированном значении аргумента t.

Обобщенными силами Q_i, где $i = 1, 2, \ldots, s$, называются коэффициенты, стоящие в выражении суммы работ активных сил при соответствующих обобщенных возможных перемещениях. Число обобщенных сил равно числу обобщенных координат, т.е. числу степеней свободы системы (связи, наложенные на систему, предполагаются идеальными и голономными). Размерность обобщенной силы

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]},$$

т.е. она может быть различной в зависимости от выбора обобщенной координаты, например если обобщенная координата – объем, то обобщенная сила имеет размерность напряжения.

Обобщенная сила Q_i вычисляется по формуле

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

где n – число материальных точек, s – число степеней свободы, $\boldsymbol{F}_k$ – равнодействующая активных сил, приложенных к k-й точке системы. Обобщенная сила является алгебраической величиной.

Выражение обобщенной силы Q_i через проекции активных сил на оси декартовых координат имеет вид

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right),$$

где

$$\boldsymbol{F}_k = F_{kx}\boldsymbol{i} + F_{ky}\boldsymbol{j} + F_{kz}\boldsymbol{k}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\boldsymbol{k}.$$

Если не все связи, наложенные на материальную систему, являются идеальными, например, имеются негладкие опорные поверхности, то при вычислении обобщенной силы по формуле

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i}$$

надо под F_k понимать не только активные силы, но и силы трения.

Если силы, действующие на систему, потенциальны, то обобщенные силы равны взятым с обратным знаком частным производным потенциальной энерии системы по соответствующим обобщенным координатам, т.е.

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$.

Вычисление обобщенных сил материальной системы является одним из существенных этапов решения задач с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

Указание. Определение обобщенных сил можно проводить двумя способами:

а) Наиболее распространенным приемом является вычисление обобщенных сил как коэффициентов в выражении суммы элементарных работ активных сил при соответствующих обобщенных возможных перемещениях. В этом случае вычисление обобщенных сил следует проводить в следующем порядке:

1) выяснить число степеней свободы рассматриваемой системы материальных точек и выбрать соответствующие обобщенные координаты;

2) изобразить все активные силы системы;

3) если не все связи, наложенные на материальную систему, являются идеальными, то добавить к активным силам соответствующие реакции связей (например, силы трения);

4) дать независимые обобщенные возможные перемещения системе в числе, равном числу обобщенных координат, т.е. числу степеней свободы материальной системы;

5) для определения обобщенной силы Q_i, соответствующей i-й обобщенной координате q_i, надо вычислить сумму работ всех активных сил, включая реакции неидеальных связей, на обобщенном возможном перемещении δq_i. При этом все остальные обобщенные возможные перемещения $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{i-1}, \delta q_{i+1}, \ldots, \delta q_s$ надо считать равными нулю, т.е. $\delta q_i \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_{i-1} = \delta q_{i+1} = \ldots = \delta q_s = 0$. Тогда обобщенная сила Q_i будет равна коэффициенту при δq_i. Аналогично определить все остальные обобщенные силы.

б) Если все силы, действующие на материальную систему, потенциальны, то после выбора обобщенных координат надо вычислить потенциальную энергию П системы, выразив ее в зависимости от обобщенных координат. Обобщенная сила определяется как взятая с обратным знаком частная производная потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате, т.е.

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$.

Этот способ определения обобщенных сил в случае системы с несколькими степенями свободы эффективнее предыдущего способа. Однако он пригоден лишь, когда все активные силы потенциальны.

При вычислении потенциальной энергии П положение начала отсчета выбирается произвольно. При перемене его положения потенциальная энергия меняется на постоянную величину: $\Pi_1 = \Pi + C$. Это не отражается на результате вычисления обобщенной силы. Действительно: $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_i}$.

Принцип возможных перемещений в обобщенных координатах формулируется так: для равновесия материальной системы, подчиненной идеальным, стационарным и голономным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ обобщенных сил на соответствующих обобщенных возможных перемещениях системы равнялась нулю:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_i \delta q_i + \ldots + Q_s \delta q_s = 0,$$

где Q_i – обобщенная сила, соответствующая i-й обобщенной координате.

Так как $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ являются независимыми обобщенными возможными перемещениями, то равенство оказывается справедливым лишь при условии:

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_i = \ldots = Q_s = 0.$$

Итак, в случае равновесия материальной системы все обобщенные силы равны нулю.

Задача 10.31. Определить обобщенную силу математического маятника массой M, если длина нити равна l. За обобщенную координату взять угол отклонения φ.

Решение. Математический маятник является системой с одной степенью свободы, так как для определения положения маятника достаточно задать один параметр. В соответствии с условием, в качестве обоб-

щенной координаты выбираем угол поворота φ, образуемый нитью маятника с вертикалью.

Единственной активной силой является сила тяжести маятника $P = Mg$. Так как нить нерастяжима и при движении маятника натянута, то она является идеальной связью.

Дадим маятнику обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ в сторону возрастания угла φ, т.е. против часовой стрелки. Для определения обобщенной силы Q_φ вычисляем работу силы P на обобщенном возможном перемещении $\delta\varphi$:

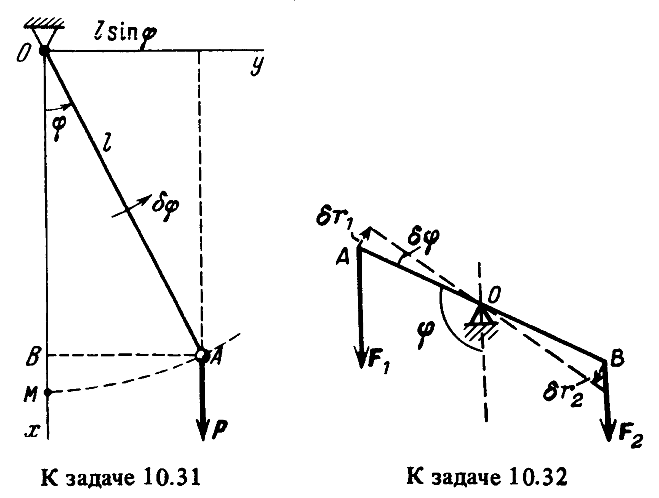
$$\delta A = -Pl \sin\varphi\, \delta\varphi = -Mgl \sin\varphi\, \delta\varphi.$$

Работа отрицательна, так как направления момента силы P относительно оси подвеса z, перпендикулярной к плоскости рисунка, и возможного перемещения $\delta\varphi$ противоположны. Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий в формуле (1) при $\delta\varphi$, т.е.

$$Q_\varphi = -Pl \sin\varphi = -Mgl \sin\varphi \qquad (1)$$

(индекс φ при обобщенной силе Q указывает, что эта сила соответствует обобщенной координате φ).

Рассмотрим теперь второй способ вычисления обобщенной силы. Сила тяжести P потенциальная. Для вычисления потенциальной энергии



К задаче 10.31 К задаче 10.32

маятника направим ось x по вертикали вниз, взяв начало отсчета в точке O привеса маятника. Потенциальная энергия маятника равна работе силы тяжести P при перемещении маятника из данного положения в нулевое, т.е. $\Pi = -Px$. Учитывая, что $x = l \cos\varphi$, получим

$$\Pi = -Pl \cos\varphi = -Mgl \cos\varphi. \qquad (2)$$

Для определения обобщенной силы надо взять с обратным знаком производную потенциальной энергии по обобщенной координате φ; при этом получится результат (1):

$$Q_\varphi = -\frac{d\Pi}{d\varphi} = -Mgl\sin\varphi.$$

В обзоре теории было указано, что произвол в выборе начала отсчета при вычислении потенциальной энергии П не влияет на результат вычисления обобщенной силы Q_i. Для пояснения этого положения возьмем новое начало отсчета в нижнем положении M маятника. Теперь потенциальная энергия Π_1 равна работе силы тяжести при перемещении маятника из A в M, т.е.

$$\Pi_1 = P\cdot BM = Mg\,(1-\cos\varphi). \qquad (3)$$

Из сопоставления потенциальных энергий (2) и (3) следует, что П и Π_1 отличаются на постоянную величину Pl. При вычислении производной Π_1 по φ получим для обобщенной силы Q_φ результат (1):

$$Q_\varphi = -\frac{d\Pi_1}{d\varphi} = -Mgl\sin\varphi.$$

Задача 10.32. Стержень AB может вращаться в вертикальной плоскости вокруг шарнира O. В точках A и B на стержень действуют вертикальные силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ (рис.). Расстояния $OA = l_1$, $OB = i_2$. Стержень образует переменный угол φ с вертикалью.

Определить обобщенную силу, если за обобщенную координату выбрать угол φ.

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. Угол φ определяет полностью положение всех точек системы. Поэтому этот угол может быть выбран за обобщенную координату.

Для того чтобы определить обобщенную силу Q, соответствующую обобщенной координате $q = \varphi$, сообщим обобщенной координате малое приращение $\delta\varphi$. При этом стержень повернется на малый угол $\delta\varphi$ (рис.) и точки приложения сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ получат бесконечно малые перемещения δr_1 и δr_2. Эти перемещения направлены перпендикулярно стержню AB и равны по модулю $\delta r_1 = l_1\delta\varphi$ и $\delta r_2 = l_2\delta\varphi$.

Составим сумму работ активных сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ на возможных перемещениях δr_1 и δr_2. Эту сумму приравняем произведению обобщенной силы на приращение обобщенной координаты:

$$-F_1\,\delta r_1\sin\varphi + F_2\,\delta r_2\sin\varphi = Q\,\delta\varphi.$$

Вносим в это уравнение значения перемещений δr_1 и δr_2:

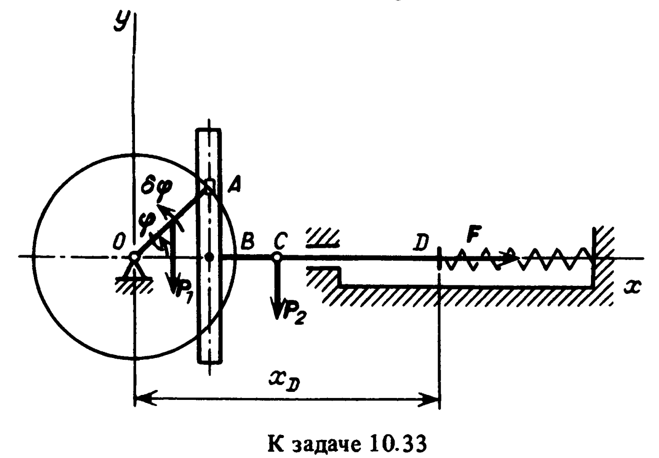
$$(-F_1 l_1 + F_2 l_2)\sin\varphi\cdot\delta\varphi = Q\,\delta\varphi.$$

Сокращая на $\delta\varphi$, находим искомую обобщенную силу

$$Q = (-F_1 l_1 + F_2 l_2) \sin\varphi.$$

В данном случае обобщенная сила Q – сумма моментов всех активных сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ относительно неподвижной точки O.

Задача 10.33. Кулисный механизм состоит из кривошипа OA длиной r и массой m_1. Масса рамки кулисы B вместе со штоком BD равна m_2, а их центр масс находится в точке C (рис.). Массами камня A кулисы



К задаче 10.33

и пружины пренебречь. При крайнем правом положении кулисы пружина не деформирована. Коэффициент жесткости пружины равен c. Кривошип OA считать однородным стержнем. Силами сопротивления пренебречь.

Определить обобщенную силу.

Решение. Выбираем систему координат с началом в точке O, ось x направляем по горизонтали, ось y – по вертикали. Кулисный механизм имеет одну степень свободы, так как положение всех его точек однозначно определяется одним параметром, например углом поворота φ кривошипа OA, отсчитываемым от оси x против хода часовой стрелки. Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ.

К механизму приложены три активные силы: $m_1 g = \boldsymbol{P}_1$ – сила тяжести кривошипа, $m_2 g = \boldsymbol{P}_2$ – сила тяжести рамки и штока, $\boldsymbol{F}$ – упругая сила пружины.

В положении механизма, указанном на рисунке, пружина растянута. Следовательно, упругая сила $\boldsymbol{F}$ пружины направлена по горизонтали направо. Она равна по модулю произведению коэффициента жесткости пружины c на модуль удлинения пружины Δ. Следовательно,

$$F = c\,|\Delta|. \tag{1}$$

Удлинение Δ пружины равно разности абсцисс точки D в ее промежуточ-

ном и начальном положениях: $\Delta = x_D - x_{OD}$. Так как $x_{OD} = r + BD$, а

$$x_D = OB + BD = r\cos\varphi + BD, \tag{2}$$

то

$$\Delta = -r(1-\cos\varphi). \tag{3}$$

Следовательно,

$$F = -c\Delta = cr(1-\cos\varphi). \tag{4}$$

Для вычисления обобщенной силы Q_φ дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ в направлении возрастания угла φ, т.е. против хода часовой стрелки. Найдем возможное перемещение δx_D точки D пружины, выразив его через $\delta\varphi$. Для этого вычислим вариацию абсциссы x_D, определенной формулой (2):

$$\delta x_D = -r\sin\varphi\cdot\delta\varphi. \tag{5}$$

Знак минус указывает, что направление возможного перемещения δx_D точки D при $\sin\varphi\cdot\delta\varphi > 0$ противоположно положительному направлению оси x, т.е. направлено налево.

Вычислим сумму работ активных сил m_1g и m_2g, а также упругой силы F на возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$\delta A = -m_1 g\,\frac{r}{2}\cos\varphi\;\;\delta\varphi + F_x\delta x_D. \tag{6}$$

Работа силы тяжести m_2g при горизонтальном перемещении ее точки приложения C равна нулю. Внося в формулу (6) значение F_x из (4), получаем

$$\delta A = -\frac{r}{2}\left[m_1 g\cos\varphi + 2cr(1-\cos\varphi)\sin\varphi\right]\delta\varphi. \tag{7}$$

Искомой обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий в выражении элементарной работы в формуле (7) при $\delta\varphi$, т.е.

$$Q_\varphi = -\frac{r}{2}\left[m_1 g\cos\varphi + 2cr(1-\cos\varphi)\sin\varphi\right]. \tag{8}$$

Эту же задачу можно решить и другим путем. Так как все активные силы, включая упругую силу F, потенциальны, то можно определить обобщенную силу по формуле

$$Q_\varphi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}. \tag{9}$$

Для этого следует вычислить потенциальную энергию рассматриваемой

системы, которая слагается из потенциальных энергий сил $m_1 g$, $m_2 g$ и F, т.е.

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)}. \tag{10}$$

За нулевой уровень при вычислении потенциальной энергии сил тяжести принимаем ось x. Потенциальная энергия $\Pi^{(1)}$ силы тяжести $m_1 g$ равна $\Pi^{(1)} = m_1 g y$, где $y = \dfrac{r}{2}\sin\varphi$ – ордината центра тяжести кривошипа OA. Следовательно,

$$\Pi^{(1)} = m_1 g \frac{r}{2}\sin\varphi. \tag{11}$$

Потенциальная энергия $\Pi^{(2)}$ силы тяжести $m_2 g$ равна нулю, так как ее точка приложения C перемещается по горизонтали:

$$\Pi^{(2)} = 0. \tag{12}$$

Потенциальная энергия $\Pi^{(3)}$ упругой силы F пружины равна $\Pi^{(3)} = \dfrac{c}{2}\Delta^2$. Подставляя значение Δ из формулы (3), находим

$$\Pi^{(3)} = \frac{c}{2} r^2 (1 - \cos\varphi)^2. \tag{13}$$

Вносят в формулу (10) найденные значения потенциальных энергий (11)–(13), имеем:

$$\Pi = m_1 g \frac{r}{2}\sin\varphi + \frac{c}{2} r^2 (1 - \cos\varphi)^2. \tag{14}$$

Для вычисления искомой обобщенной силы остается вычислить с обратным знаком производную от потенциальной энергии П, определяемой формулой (14), по обобщенной координате φ:

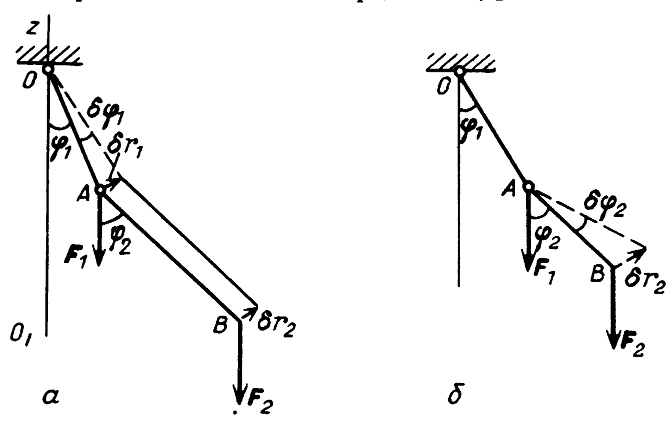
$$Q_\varphi = -\frac{r}{2}\left[m_1 g \cos\varphi + 2cr(1 - \cos\varphi)\sin\varphi\right].$$

Объемы вычислений, проведенных при подсчете обобщенной силы в каждом из вариантов, примерно одинаковы. Однако следует иметь в виду, что первым вариантом расчета можно пользоваться независимо от характера активных сил, в то время как второй вариант расчета пригоден только в случае потенциальных активных сил.

Задача 10.34. Двойной маятник состоит из стержня OA длиной l_1, подвешенного в неподвижном шарнире O. В его конце–точке A – к нему шарнирно подвешен стержень AB длиной l_2 (рис. a). В точках A и B действуют вертикальные силы F_1 и F_2, постоянные по модулю и направлению. Стержень OA образует с вертикалью угол φ_1, стержень AB – угол φ_2.

Выбрав углы φ_1 и φ_2 за обобщенные координаты, полностью определяющие положение системы, определить соответствующие этим углам обобщенные силы Q_1 и Q_2. Рассматриваемая система имеет две степени свободы.

Решение. Для вычисления обобщенной силы Q_1 даем ничтожно малое приращение $\delta\varphi_1$ первой обобщенной координате φ_1 (рис. *а*), сохраняя значение второй обобщенной координаты φ_2 неизменным. При этом



К задаче 10.34

стержень *OA* поворачивается вокруг неподвижного шарнира *O* на угол $\delta\varphi_1$, а стержень *AB* перемещается поступательно. Перемещения точек *A* и *B* одинаковы:

$$\delta r_1 = \delta r_2 = l_1\, \delta\varphi_1. \qquad (1)$$

Эти перемещения перпендикулярны прямой *OA*.

Составляем сумму работ активных сил F_1 и F_2 на возможных перемещениях δr_1 и δr_2 и приравниваем ее произведению искомой обобщенной силы на приращение обобщенной координаты $\delta\varphi_1$:

$$-F_1\, \delta r_1 \sin\varphi_1 - F_2\, \delta r_2 \sin\varphi_1 = Q_1\, \delta\varphi_1. \qquad (2)$$

Вносим в это уравнение значения возможных перемещений $\delta r_1 = \delta r_2 = l_1\, \delta\varphi_1$. Тогда

$$-(F_1 + F_2)\, l_1 \sin\varphi_1 \cdot \delta\varphi_1 = Q_1\, \delta\varphi_1. \qquad (3)$$

Сокращая обе части равенства на $\delta\varphi_1$, находим

$$Q_1 = -(F_1 + F_2)\, l_1 \sin\varphi_1. \qquad (4)$$

Для вычисления второй обобщенной силы Q_2 надо дать ничтожно малое приращение второму углу (второй обобщенной координате φ_2), оставляя первый угол φ_1 неизменным (рис. *б*). При этом стержень *OA*

остается на месте, а стержень AB поворачивается вокруг точки A на угол $\delta\varphi_2$. Перемещение точки A равно нулю, а перемещение точки B равно $\delta r_2 = l_2\,\delta\varphi_2$. Оно направлено перпендикулярно стержню AB. Работа силы F_1 таким образом равна нулю. Уравнение работ примет вид

$$-F_2\,\delta r_2 \sin\varphi_2 = Q_2\,\delta\varphi_2, \tag{5}$$

или с учетом значения δr_2

$$-F_2 l_2^2 \delta\varphi_2 \sin\varphi_2 = Q_2\,\delta\varphi_2, \tag{6}$$

откуда находится вторая обобщенная сила

$$Q_2 = -F_2 l_2 \sin\varphi_2. \tag{7}$$

Эта задача может быть решена и при помощи формулы

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{8}$$

где Q_i – обобщенная сила, соответствующая i-й обобщенной координате q_i, П – потенциальная энергия, выраженная через обобщенные координаты. При вычислении потенциальной энергии положение начала отсчета выбирается произвольно. При перемене его положения потенциальная энергия изменяется на постоянную величину, что не отражается на результатах, полученных согласно формуле (8).

Выбираем вертикаль, проходящую через шарнир O, за ось z (рис. a). Начало отсчета координат z точек приложения сил F_1 и F_2 выберем ниже точки O на расстоянии $l_1 + l_2$ от этой точки. Ось z направим вверх. Начало координат обозначено буквой O_1, причем

$$O_1 O = l_1 + l_2. \tag{9}$$

По условию силы F_1 и F_2 постоянны по модулю и направлению. Такие силы, как известно, имеют потенциал. Примером таких сил являются силы тяжести.

Потенциальная энергия системы может быть выражена формулой

$$\Pi = F_1 z_1 + F_2 z_2. \tag{10}$$

Координаты точек приложения сил определяются формулами

$$z_1 = l_1 + l_2 - l_1\cos\varphi_1, \tag{11}$$

$$z_2 = l_1 + l_2 - l_1\cos\varphi_1 - l_2\cos\varphi_2. \tag{12}$$

Внося эти значения координат (11) и (12) в формулу (10), находим выражения потенциальной энергии системы через обобщенные координаты:

$$\Pi = (F_1 + F_2)(l_1 + l_2 - l_1\cos\varphi_1) - F_2 l_2 \cos\varphi_2. \tag{13}$$

Воспользуемся далее формулой (8), согласно которой

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}.$$

Вычисляя от (13) соответствующие частные производные по обобщенным координатам, получаем

$$Q_1 = -(F_1 + F_2)\, l_1 \sin \varphi_1,$$
$$Q_2 = -F_2 l_2 \sin \varphi_2,$$

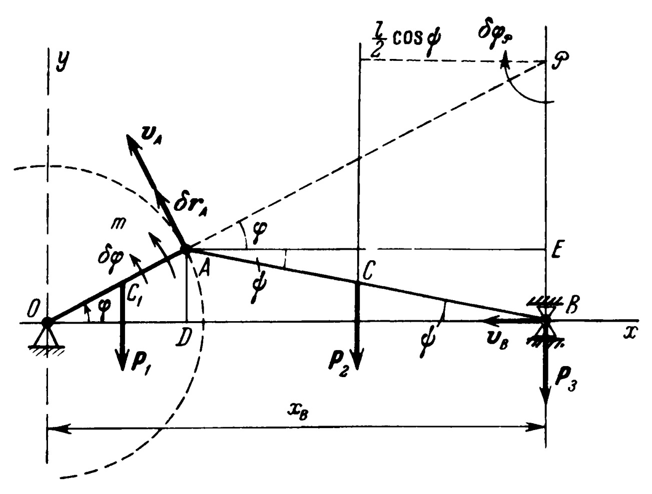
что совпадает с результатами, полученными ранее (см. (4) и (7)).

Задача 10.35. Кривошипно-ползунный механизм, расположенный в вертикальной плоскости, приводится в движение посредством вращающего момента m, приложенного к кривошипу OA массой M_1 и длиной r, M_2 – масса шатуна AB, l – длина шатуна.

Выбрать обобщенную координату и определить соответствующую ей обобщенную силу. Кривошип и шатун считать тонкими однородными стержнями. Силами сопротивления пренебречь.

Р е ш е н и е. Оси декартовых координат xy изображены на рисунке.

Кривошипно-ползунный механизм является системой с одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты выбираем угол



К задаче 10.35

поворота φ кривошипа OA, отсчитываемый от оси x против хода часовой стрелки. Силу тяжести ползуна B обозначим через P_3.

Изобразим активные силы и моменты: $P_1 = M_1 g$ – сила тяжести кривошипа, $P_2 = M_2 g$ – сила тяжести шатуна, $P_3 = M_3 g$ – сила тяжести ползуна, m – вращающий момент.

Все связи, наложенные на систему, являются идеальными. Дадим механизму обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ в направлении возрастания угла φ, т.е. против хода часовой стрелки.

Вычислим сумму работ активных сил на возможных перемещениях, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\varphi$:

$$\delta A = \delta A(m) + \delta A(\boldsymbol{P}_1) + \delta A(\boldsymbol{P}_2) + \delta A(\boldsymbol{P}_3). \tag{1}$$

Элементарная работа вращающего момента m равна

$$\delta A(m) = m\ \delta\varphi. \tag{2}$$

Элементарная работа силы тяжести $\boldsymbol{P}_1$ кривошипа равна

$$\delta A(\boldsymbol{P}_1) = -P_1 \frac{r}{2} \cos\varphi\, \delta\varphi = -M_1 g \frac{r}{2} \cos\varphi\, d\varphi. \tag{3}$$

Элементарная работа силы тяжести $\boldsymbol{P}_3$ ползуна B равна нулю, так как ползун B получает возможное перемещение по горизонтали, а сила $\boldsymbol{P}_3$ вертикальна:

$$\delta A(\boldsymbol{P}_3) = 0. \tag{4}$$

Для вычисления элементарной работы силы тяжести $\boldsymbol{P}_2$ шатуна AB, совершающего плоское движение, определяем положение его мгновенного центра скоростей $\mathscr{P}$ как точки пересечения перпендикуляров, восставленных к скоростям точек A и B. Имеем

$$\delta A(\boldsymbol{P}_2) = -m_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{P}_2)\, \delta\varphi_{\mathscr{P}}. \tag{5}$$

Работа отрицательна, так как направления момента силы $\boldsymbol{P}_2$ относительно оси $\mathscr{P}$ и возможного перемещения $\delta\varphi_{\mathscr{P}}$ противоположны. Находим

$$m_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{P}_2) = P_2 \frac{l}{2} \cos\psi, \tag{6}$$

где угол ABO обозначен ψ (рис.).

Для вычисления $\delta\varphi_{\mathscr{P}}$ воспользуемся возможным перемещением δr_A точки A, принадлежащей одновременно кривошипу OA и шатуну AB. Для точки A кривошипа имеем $\delta r_A = r\delta\varphi$. Для точки A шатуна получаем $\delta r_A = A\mathscr{P}\delta\varphi_{\mathscr{P}}$. Следовательно, $r\ \delta\varphi = A\ \mathscr{P}\ \delta\varphi_{\mathscr{P}}$, откуда

$$\delta\varphi_{\mathscr{P}} = \frac{1}{A\mathscr{P}}\delta\varphi. \tag{7}$$

Воспользовавшись формулами (6) и (7), запишем (5) в виде

$$\delta A(\boldsymbol{P}_2) = -P_2 \frac{l}{2} \frac{r}{A\mathscr{P}} \cos\psi\, \delta\varphi. \tag{8}$$

Проведем вспомогательную горизонталь через точку A. Из треугольника $A\mathcal{P}E$ получим $A\mathcal{P} = \dfrac{AE}{\cos\varphi}$. Так как $AE = AB\cos\psi = l\cos\psi$ (из ΔABE), то

$$A\mathcal{P} = \frac{l\cos\psi}{\cos\varphi}. \tag{9}$$

Подставив это значение $A\mathcal{P}$ в формулу (8), имеем

$$\delta A(P_2) = -P_2\,\frac{r}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi = -M_2 g\,\frac{r}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi. \tag{10}$$

Этот результат можно было получить более коротким путем, вычисляя элементарную работу силы тяжести P_2 по формуле $\delta A(P_2) = P_{2y}\delta y_C$, где δy_C – вариация ординаты точки C приложения силы P_2. Так как точка C расположена посередине шатуна AB, то $y_C = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}r\sin\varphi$.

Вычислив вариацию y_C, находим

$$\delta y_C = \frac{1}{2}r\cos\varphi\,\delta\varphi.$$

Следовательно, приняв во внимание, что $P_{2y} = -P_2$, получим

$$\delta A\,(P_2) = P_{2y}\delta y_C = -P_2\,\frac{r}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi.$$

Подставляя выражения элементарных работ вращающего момента m и сил P_1, P_2, P_3 из формул (2) – (4) и (10) в (1), имеем

$$\delta A = m\,\delta\varphi - P_1\,\frac{r}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi - P_2\,\frac{r}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi,$$

т.е.

$$\delta A = \left[m - \frac{1}{2}gr(M_1 + M_2)\cos\varphi\right]\delta\varphi. \tag{11}$$

Искомой обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий в формуле (11) при обобщенном возможном перемещении $\delta\varphi$, т.е.

$$Q_\varphi = m - \frac{1}{2}gr(M_1 + M_2)\cos\varphi.$$

Применение в этой задаче формулы $Q_i = -\partial\Pi/\partial q_i$ невозможно, так как при переменном моменте m, зависящем от угловой скорости $\dot\varphi$

или времени t, не все активные силы потенциальны. В этом случае можно воспользоваться указанной формулой для определения обобщенной силы, соответствующей потенциальным силам P_1, P_2 и P_3. Вторую часть обобщенной силы, соответствующую вращающему моменту m , пришлось бы подсчитать так, как это было сделано выше. Затем для определения искомой обобщенной силы надо было бы сложить вычисленные в отдельности выражения.

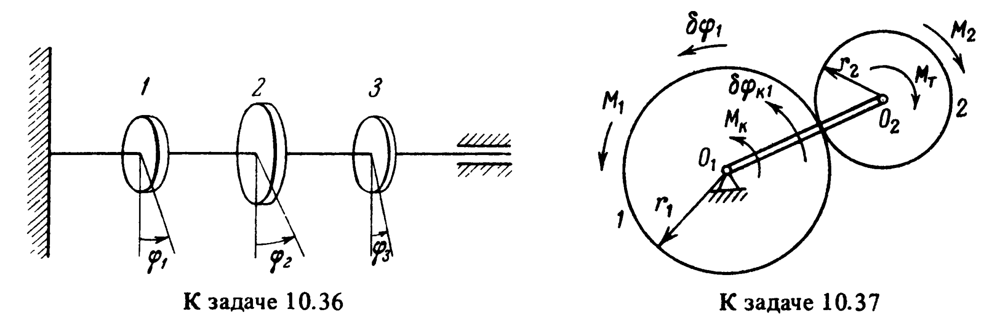
В задачах динамики курса "Теория механизмов и машин" обобщенная сила механизма носит название "приведенная сила".

Задача 10.36. Горизонтальный упругий вал жестко заделан левым концом в стену. Его правый конец лежит в подшипнике. На вал положены три диска, совершающие крутильные колебания (рис.).

Выбрать обобщенные координаты и определить им соответствующие обобщенные силы, если центры тяжести масс расположены на геометрической оси вращения. Коэффициент упругости вала равен c.

Решение. Данная система имеет три степени свободы. Обозначим углы поворота дисков соответственно φ_1, φ_2 и φ_3. Возьмем эти углы поворота за обобщенные координаты.

Вычислим углы закручивания вала. На левом участке вала (от стены до диска *1*) его угол закручивания равен φ_1, на следующем участке



К задаче 10.36 К задаче 10.37

угол закручивания равен $\varphi_2 - \varphi_1$, участок между дисками *2* и *3* закручен на угол $\varphi_3 - \varphi_2$. На правом крайнем участке вала угол закручивания равен нулю.

Тогда потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} c\varphi_1^2 + \frac{1}{2} c(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} c(\varphi_3 - \varphi_2)^2 .$$

Зная выражение потенциальной энергии системы, легко определяем искомые обобщенные силы Q_{φ_1}, Q_{φ_2} и Q_{φ_3}:

$$Q_{\varphi_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = -c(2\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$Q_{\varphi_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = -c(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3),$$

$$Q_{\varphi_3} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_3} = -c(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Задача 10.37. На рисунке изображен узел металлорежущего станка. Зубчатое колесо *1* радиусом r_1 и кривошип O_1O_2 насажены независимо друг от друга на неподвижную ось O_1. Конец O_1 кривошипа O_1O_2 совмещен с подвижной осью O_2 зубчатого колеса *2* радиусом r_2. При независимых вращениях колеса *1* и кривошипа O_1O_2 колесо *2* катится по ободу колеса *1*.

К колесу *1* приложен вращающий момент M_1, к кривошипу O_1O_2 – вращающий момент M_k, к колесу *2* – момент сопротивления M_2. Момент сил трения на подвижной оси O_2 равен $M_т$. Ось O_1 считать гладкой. Механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Вычислить обобщенные силы Q_{φ_1} и $Q_{\varphi_{k,1}}$, приняв за обобщенные координаты угол поворота φ_1 колеса *1* и угол поворота $\varphi_{k,1}$ кривошипа O_1O_2 относительно колеса *1*.

Решение. Соответственно заданным обобщенным координатам φ_1 и $\varphi_{k,1}$ введем независимые обобщенные угловые возможные перемещения $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_{k,1}$. Для определения обобщенных сил Q_{φ_1} и $Q_{\varphi_{k,1}}$ вычислим элементарную работу активных сил и моментов на возможных перемещениях точек системы. При наличии трения на подвижной оси O_2 эта связь не является идеальной. Поэтому надо учесть $M_т$ – момент трения на оси O_2. Механизм расположен в горизонтальной плоскости, и, значит, работа сил тяжести его звеньев равна нулю. Поэтому элементарная работа имеет вид

$$\delta A = M_1\delta\varphi_1 + M_k\delta\varphi_k - M_т\,\delta\varphi_{2,k} - M_2\delta\varphi_2, \tag{1}$$

где $\delta\varphi_k$ – угловое возможное перемещение кривошипа O_1O_2, $\delta\varphi_{2,k}$ – колеса *2* относительно кривошипа O_1O_2, $\delta\varphi_2$ – колеса *2*.

Для определения зависимостей между угловыми возможными перемещениями $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_k$, $\delta\varphi_{2,k}$ и $\delta\varphi_2$ применим метод Виллиса: мысленно остановим кривошип O_1O_2 и запишем зависимость между угловыми возможными перемещениями колес *1* и *2* относительно кривошипа:

$$\frac{\delta\varphi_{1,k}}{\delta\varphi_{2,k}} = -\frac{r_2}{r_1}$$

(знак минус поставлен ввиду внешнего зацепления колес *1* и *2*), т.е. $\delta\varphi_{2,k} = -\frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_{1,k}$. Так как $\delta\varphi_{1,k}$ и $\delta\varphi_{k,1}$ равны по абсолютной вели-

чине и противоположны по направлениям, т.е. $\delta\varphi_{k,1} = -\delta\varphi_{1,k}$, то

$$\delta\varphi_{2,k} = \frac{r_1}{r_2}\,\delta\varphi_{k,1}. \qquad (2)$$

Для вычисления обобщенной силы Q_{φ_1} дадим возможное перемещение $\delta\varphi_1$, а $\delta\varphi_{k,1}$ будем считать равным нулю: $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_{k,1} = 0$. Заметив, что $\delta\varphi_{k,1} = \delta\varphi_k - \delta\varphi_1$, получим

$$\delta\varphi_k = \delta\varphi_1. \qquad (3)$$

При $\delta\varphi_{k,1} = 0$ из соотношения (2) имеем

$$\delta\varphi_{2,k} = 0. \qquad (4)$$

Так как $\delta\varphi_{2,k} = \delta\varphi_2 - \delta\varphi_k$, то с учетом результатов (3) и (4) запишем

$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1. \qquad (5)$$

Использовав зависимости (3) – (5) в формуле (1), найдем $\delta A = M_1\delta\varphi_1 + M_k\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_1 = (M_1 + M_k - M_2)\,\delta\varphi_1$. Выражение в скобках является обобщенной силой Q_{φ_1}, т.е.

$$Q_{\varphi_1} = M_1 + M_k - M_2. \qquad (6)$$

Перейдем к вычислению обобщенной силы $Q_{\varphi_{k,1}}$. Для этого дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi_{k,1}$, а $\delta\varphi_1$ будем считать равным нулю, т.е. $\delta\varphi_{k,1} \neq 0$, $\delta\varphi_1 = 0$. Так как $\delta\varphi_{k,1} = \delta\varphi_k - \delta\varphi_1$, то при $\delta\varphi_1 = 0$

$$\delta\varphi_k = \delta\varphi_{k,1}. \qquad (7)$$

Для вычисления $\delta\varphi_2$ примем в формуле (2) во внимание, что $\delta\varphi_{2,k} = \delta\varphi_2 - \delta\varphi_k$, т.е. $\delta\varphi_2 - \delta\varphi_k = \frac{r_1}{r_2}\,\delta\varphi_{k,1}$. Использовав здесь результат (7), получим $\delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\,\delta\varphi_{k,1} + \delta\varphi_{k,1}$, т.е.

$$\delta\varphi_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\delta\varphi_{k,1}. \qquad (8)$$

Теперь внесем результаты (2). (7) и (8) в формулу (1), помня при этом, что $\delta\varphi_1 = 0$:

$$\delta A = M_k\delta\varphi_{k,1} - M_{\text{т}}\frac{r_1}{r_2}\,\delta\varphi_{k,1} - M_2\frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\delta\varphi_{k,1},$$

т.е.

$$\delta A = \left(M_k - \frac{r_1}{r_2}\,M_{\text{т}} - \frac{r_1 + r_2}{r_2}\,M_2\right)\delta\varphi_{k,1}.$$

Выражение в скобках является обобщенной силой $Q_{\varphi_k,1}$, т.е.

$$Q_{\varphi_k,1} = M_k - \frac{r_1}{r_2} M_т - \frac{r_1 + r_2}{r_2} M_2. \tag{9}$$

Итак, искомые обобщенные силы приведены в формулах (6) и (9).

2. Общее уравнение динамики в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа второго рода. Общее уравнение динамики материальной системы

$$\sum_{k=1}^{n} (F_k - m_k a_k) \cdot \delta r_k = 0$$

в обобщенных координатах имеет вид

$$\delta q_1 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 \right) + \delta q_2 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 \right) + \ldots +$$

$$+ \delta q_s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right) = 0,$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_s$ – обобщенные координаты, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ – обобщенные скорости, $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ – обобщенные возможные перемещения системы, являющиеся вариациями соответствующих обобщенных координат, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ – обобщенные силы системы, T – кинетическая энергия системы.

Так как $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ в случае системы, подчиненной голономным связям, являются независимыми обобщенными возможными перемещениями, то общее уравнение динамики удовлетворяется лишь при условии, что коэффициенты, стоящие при возможных перемещениях, равны нулю, т.е.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ &\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s. \end{aligned} \tag{1*}$$

Уравнения (1*) называются уравнениями Лагранжа второго рода*).

*) Уравнения Лагранжа первого рода в этом томе не рассматриваются. Они приведены в третьем томе. Поэтому ниже уравнения Лагранжа второго рода просто называются уравнениями Лагранжа.

При наличии голономных связей, наложенных на систему, число уравнений Лагранжа равно числу независимых обобщенных координат, т.е. числу степеней свободы. Система (1*) состоит из s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для обобщенных координат.

Если активные силы системы потенциальны, то уравнения Лагранжа можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad (2^*)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}.$$

Если ввести функцию Лагранжа L, равную разности кинетической и потенциальной энергий, т.е. $L = T - \Pi$, то уравнения (2*) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \qquad (3^*)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0.$$

Трудность решения задач динамики материальных систем с одной степенью свободы заключается, между прочим, и в удачном выборе соответствующей общей теоремы динамики. В случаях систем с несколькими степенями свободы решение задач значительно усложняется, так как при этом требуется совместное применение некоторых общих теорем и других соотношений динамики, выбор которых обычно представляет значительные трудности. В подобных случаях наиболее удобно использование уравнений Лагранжа, являющееся универсальным мето-

дом составления систем дифференциальных уравнений движения материальных систем.

Большое достоинство уравнений Лагранжа заключается в том, что при наличии идеальных и голономных связей в них не входят реакции связей. (При применении других методов решения задач приходится в ходе решения исключать реакции связей из системы составленных уравнений.)

Полученные выше при решении подавляющего большинства задач динамики системы уравнения могут быть непосредственно выведены с помощью уравнений Лагранжа. Если по условию задачи требуется найти реакции связей, то, определив с помощью уравнений Лагранжа ускорения точек системы, применяют закон освобождаемости от связей к соответствующей массе системы с последующим использованием одной из общих теорем динамики либо метода кинетостатики. Если при решении задачи динамики отсутствует ясный план применения тех или иных теорем, то следует остановиться на применении уравнений Лагранжа.

Все сказанное выше не умаляет значения общих теорем, которыми целесообразно пользоваться при решении ряда простых задач динамики (см. ниже гл. 11).

Уравнения Лагранжа второго рода, или уравнения в обобщенных координатах, были получены французским математиком и механиком Жозефом Луи Лагранжем (1736–1813) и опубликованы им в трактате "Аналитическая механика" (1788).

Лагранж полностью отказался от геометрической трактовки в механике. Все учение о равновесии и движении он свел к некоторым общим уравнениям. В основу статики он положил принцип возможных перемещений. В основу динамики он положил сочетание принципа возможных перемещений с принципом Даламбера (методом кинетостатики) и ввел обобщенные силы и обобщенные координаты.

Указание. Составление уравнений Лагранжа надо проводить в такой последовательности:

1) определить число степеней свободы изучаемой материальной системы:

2) выбрать систему координат и ввести независимые обобщенные координаты в числе, равном числу степеней свободы;

3) определить обобщенные силы системы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$, соответствующие избранным обобщенным координатам (последовательность вычисления обобщенных сил детально разобрана в п. 1 этого параграфа);

4) вычислить кинетическую энергию T рассматриваемой материальной системы, выразив энергию в зависимости от обобщенных координат и обобщенных скоростей;

5) найти частные производные кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$, т.е. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$, а затем вычислить их производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right), \ldots, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right);$$

6) определить частные производные кинетической энергии T по обобщенным координатам: $q_1, q_2, \ldots, q_s$, т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial q_s};$$

7) полученные в пунктах 3), 5) и 6) результаты подставить в уравнения Лагранжа.

Задача 10.38. Вывести дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, воспользовавшись уравнениями Лагранжа.

Решение. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы. Действительно, для определения положения всех его точек достаточно задать один параметр, например его угол поворота φ. Выберем φ в качестве обобщенной координаты.

Направим ось z вдоль оси вращения твердого тела. Обозначим: I_z – момент инерции твердого тела относительно оси вращения, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ – активные силы.

Так как число уравнений Лагранжа при наличии идеальных и голономных связей равно числу степеней свободы системы, т.е. числу обобщенных координат, то в данном случае следует записать одно уравнение Лагранжа для обобщенной координаты φ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \tag{1}$$

Дадим твердому телу обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ и вычислим сумму работ активных сил на этом возможном перемещении:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k)\,\delta\varphi = \left[\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k)\right]\delta\varphi. \tag{2}$$

Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$ в уравнении (2), т.е.

$$Q_\varphi = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k). \tag{3}$$

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, имеет вид

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2.$$

Вычислим частную производную кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \dot{\varphi},$$

а затем возьмем производную от полученного результата по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \ddot{\varphi}. \tag{4}$$

Учитывая, что в выражение кинетической энергии T не входит обобщенная координата φ, имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \tag{5}$$

После подстановки формул (3) – (5) в уравнение Лагранжа второго рода (1) находим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k). \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что в правую часть уравнения (6) вместо суммы моментов всех активных сил F_k относительно оси вращения z можно подставить сумму моментов всех внешних сил F_k^e относительно той же оси. Действительно, активные силы могут быть как внешними, так и внутренними. Как известно, главный момент внутренних сил равен нулю. В число внешних, кроме активных сил, входят только опорные реакции, моменты которых относительно оси вращения z равны нулю (опорные реакции приложены к оси вращения z). Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k) = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e),$$

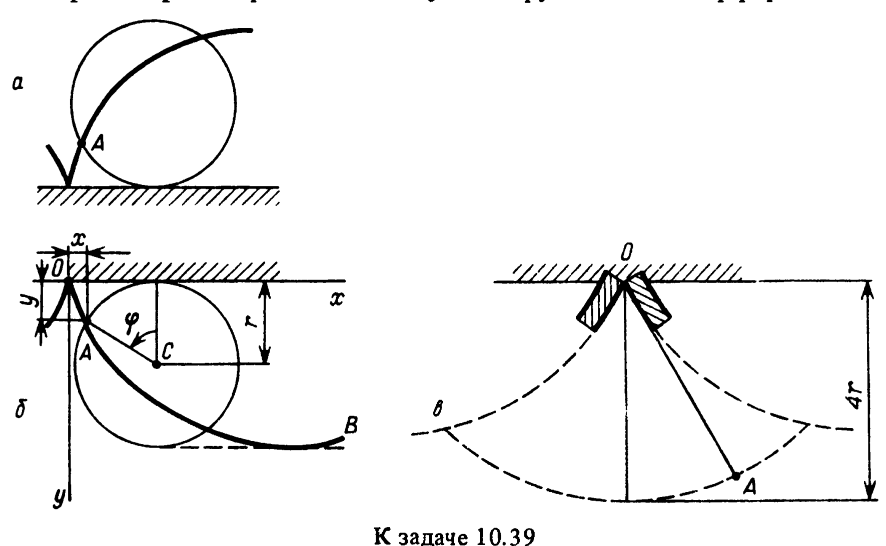
и уравнение (6) примет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e).$$

Задача 10.39. Доказать изохронность колебаний циклоидального маятника.

Решение. *Циклоидальным* называется маятник, который может быть схематизирован в виде материальной точки, движущейся по дуге циклоиды.

В решении задачи 9.46 был рассмотрен математический маятник, у которого траекторией была дуга окружности. Дифференциальное



К задаче 10.39

уравнение колебаний математического маятника, представленное формулой (4) задачи 9.46, имело вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

где φ – угол отклонения нити маятника от вертикали, а l – длина нити.

В формуле (11) той же задачи было показано, что период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots\right),$$

где α – угловая амплитуда колебаний. Таким образом, колебания математического маятника свойством изохронности не обладают, так как его период колебаний зависит от начальных условий движения – от угловой амплитуды α. Лишь в случае малых колебаний маятника при замене в его дифференциальном уравнении движения $\sin \varphi$ на φ мы получали свойство изохронности колебаний маятника. При этом период

колебаний математического маятника был приближенно равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Покажем, что колебания циклоидального маятника, в отличие от колебаний математического, обладают свойством изохронности, т.е. его период колебаний не зависит от начальных условий движения.

Обычное представление о циклоиде связано с траекторией точки A, лежащей на ободе колеса, которое катится без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. *а*).

На рис. *б* изображено колесо, массой которого по сравнению с массой точки A, укрепленной на его ободе, можно пренебречь. Колесо катится по рельсу, расположенному над ним. Покажем, что движение точки A является колебательным около нижней точки B циклоиды. Период этих колебаний не зависит от начальных условий движения.

Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ, образуемый радиусом AC точки A с вертикалью. Как известно, уравнения циклоиды в параметрической форме имеют вид

$$x = r\varphi - r\sin\varphi, \quad y = r(1 - \cos\varphi), \tag{1}$$

где r – радиус колеса.

Запишем соответствующее уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \tag{2}$$

Единственной активной силой является сила тяжести материальной точки, которую мы обозначим P.

Потенциальная энергия П материальной точки выражается формулой

$$\Pi = -Py = -Pr(1 - \cos\varphi). \tag{3}$$

Обобщенная сила Q_φ имеет вид $Q_\varphi = -\partial\Pi/\partial\varphi$. Внося в эту формулу выражение П из (3), имеем

$$Q_\varphi = Pr\sin\varphi. \tag{4}$$

Вычислим кинетическую энергию T материальной точки:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2). \tag{5}$$

Использовав формулу (1), находим

$$\dot x = r\dot\varphi - r\dot\varphi\cos\varphi, \quad \dot y = r\dot\varphi\sin\varphi.$$

Теперь формула (5) принимает вид

$$T = mr^2 (1 - \cos\varphi)\,\dot\varphi^2. \tag{6}$$

Вычислим частную производную кинетической энергии T по обобщенной скорости $\dot\varphi$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = 2mr^2(1 - \cos\varphi)\,\dot\varphi.$$

Возьмем производную полученного результата по времени:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = 2mr^2 (1 - \cos\varphi)\,\ddot\varphi + 2mr^2\dot\varphi^2 \sin\varphi. \tag{7}$$

Найдем теперь частную производную выражения (6) кинетической энергии T по обобщенной координате φ:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = mr^2\dot\varphi^2 \sin\varphi. \tag{8}$$

Подставив формулы (4), (7) и (8) в уравнение Лагранжа (2), получим

$$\ddot\varphi(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2}\dot\varphi^2 \sin\varphi = \frac{g}{2r}\sin\varphi. \tag{9}$$

Вводя тригонометрические функции половинных углов и сокращая на $\sin\frac{\varphi}{2}$, имеем

$$\ddot\varphi \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\dot\varphi^2 \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{g}{2r}\cos\frac{\varphi}{2}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\ddot\varphi \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\dot\varphi^2 \cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (10) можно записать так:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{g}{4r}\cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Обозначив $\cos\frac{\varphi}{2} = z$, находим

$$\ddot z + k^2 z = 0, \tag{11}$$

где

$$\frac{g}{4r} = k^2. \qquad (12)$$

Таким образом, точное дифференциальное уравнение (11) колебаний циклоидального маятника тождественно приближенному дифференциальному уравнению колебаний математического маятника:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Это значит, что колебания циклоидального маятника обладают свойством полной *изохронности,* т.е. период его колебаний не зависит от начальных условий движения.

Воспользовавшись формулой (12), можно записать период колебаний в виде

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где $l = 4r$.

Уравнение (11) определяет колебания с центром $z = 0$. Учитывая, что $z = \cos(\varphi/2)$, найдем $\varphi/2 = \pi/2$, т.е. $\varphi = \pi$. Таким образом, показано, что центр колебаний расположен в нижней точке B циклоиды (рис. *б*).

Эволюта циклоиды также является циклоидой, тождественной исходной. Поэтому для осуществления рассматриваемого маятника следует вырезать шаблон, изображающий два участка дуг циклоиды, примыкающие к ее точке возврата O (рис. *в*). Нить длиной $l = 4r$ при колебаниях частично накладывается то на левую, то на правую части шаблона, а материальная точка, находящаяся на конце нити, при этом движется по циклоиде.

Дифференциальное уравнение (9) можно также получить, воспользовавшись уравнением Лагранжа в форме (3*), т.е.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \qquad (13)$$

В данном случае функция Лагранжа L в соответствии с формулами (6) и (3) имеет вид

$$L = T - \Pi = mr^2(1 - \cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + mgr(1 - \cos\varphi).$$

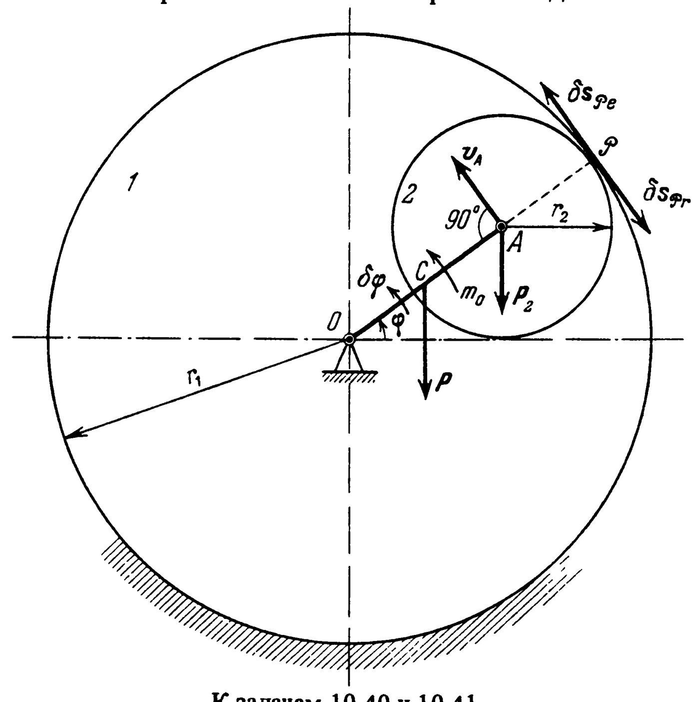
Предоставляем читателю подставить функцию Лагранжа L в уравнение (13) и получить дифференциальное уравнение (9).

Задача 10.40. Определить угловое ускорение кривошипа OA планетарной передачи, расположенной в вертикальной плоскости. Зубчатое колесо *2* находится во внутреннем зацеплении с неподвижным зуб-

чатым колесом *1*. Колесо *2* приводится в движение посредством кривошипа *ОА*, к которому приложен вращающий момент m_0. Заданы масса M кривошипа *ОА*, масса M_2 колеса *2*, радиус r_2 колеса *2*, радиус r_1 неподвижного колеса *1* (рис.).

Колесо *2* считать однородным круглым диском, а кривошип *ОА* – тонким однородным стержнем. Силами сопротивления движению пренебречь.

Решение. Планетарная передача имеет одну степень свободы, так как угол поворота φ кривошипа *ОА* определяет положение всех точек механизма. В качестве обобщенной координаты выбираем угол φ, отсчитываемый от горизонтальной оси против хода часовой стрелки.



К задачам 10.40 и 10.41

Уравнение Лагранжа для обобщенной координаты φ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}.$$

Активными силами являются: $P = Mg$ – сила тяжести кривошипа, $P_2 = M_2 g$ – сила тяжести колеса *2*, m_0 – вращающий момент, приложенный к кривошипу *ОА*. Все связи, наложенные на систему, идеальны.

Дадим кривошипу *ОА* возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ в направлении возрастания угла φ, т.е. против хода часовой стрелки.

Для определения обобщенной силы Q_φ вычислим сумму работ активных сил на возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$\delta A = m_0 \delta\varphi - P \mid OC \mid \cos\varphi\,\delta\varphi - P_2 \mid OA \mid \cos\varphi\,\delta\varphi.$$

Так как $OA = O\mathscr{P} - A\mathscr{P} = r_1 - r_2$, $OC = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{r_1 - r_2}{2}$, то

$$\delta A = \frac{1}{2}[2 m_0 - (P + 2P_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi]\,\delta\varphi. \qquad (1)$$

Учитывая, что $\delta A = Q_\varphi \delta\varphi$, находим обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ:

$$Q_\varphi = \frac{1}{2}\,[2m_0 - g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi]. \qquad (2)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии T механизма, в состав которого входят массы кривошипа OA и зубчатого колеса *2* (зубчатое колесо *1* неподвижно), т.е.

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия кривошипа OA, вращающегося вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, определяется формулой $T^{(1)} = \dfrac{1}{2} I_O \dot\varphi^2$, где

$$I_O = \frac{1}{3} M \cdot OA^2 = \frac{1}{3} M (r_1 - r_2)^2$$

— момент инерции кривошипа. Следовательно,

$$T^{(1)} = \frac{1}{6} M (r_1 - r_2)^2 \dot\varphi^2. \qquad (4)$$

Кинетическая энергия зубчатого колеса *2*, совершающего плоское движение, равна

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_A^2 + \frac{1}{2} I_A \omega_2^2. \qquad (5)$$

Найдем скорость точки A, являющейся концом кривошипа OA:

$$v_A = OA \mid \dot\varphi \mid = (r_1 - r_2) \mid \dot\varphi \mid. \qquad (6)$$

Рассмотрим скорость той же точки A, принадлежащей зубчатому колесу *2*, по отношению к мгновенному центру скоростей $\mathscr{P}$ колеса:

$$v_A = A\mathscr{P} \cdot \omega_2 = r_2 \omega_2. \qquad (7)$$

Сопоставляя формулы (6) и (7), находим

$$\omega_2 = \frac{r_1 - r_2}{r_2} \, |\dot{\varphi}|. \tag{8}$$

Момент инерции зубчатого колеса 2 вычисляется по формуле

$$I_A = \frac{M_2 r_2^2}{2} \,. \tag{9}$$

После подстановки значений v_A, ω_2 и I_A соответственно из формул (6), (8) и (9) выражение (5) принимает вид

$$T^{(2)} = \frac{3}{4} M_2 (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}^2 . \tag{10}$$

Воспользовавшись формулами (3), (4) и (10), запишем выражение кинетический энергии планетарного механизма:

$$T = \frac{2M + 9M_2}{12} (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}^2 . \tag{11}$$

Вычислим частную производную кинетической энергии T по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2M + 9M_2}{6} (r_1 - r_2)^2 \, \dot{\varphi},$$

и возьмем производную полученного результата по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2M + 9M_2}{6} (r_1 - r_2)^2 \, \ddot{\varphi} . \tag{12}$$

Заметив, что кинетическая энергия T системы, определенная формулой (11), не зависит от обобщенной координаты φ, находим

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \tag{13}$$

После подстановки выражений (2), (12), (13) в уравнение Лагранжа получим дифференциальное уравнение движения механизма для обобщенной координаты φ:

$$\frac{2M + 9M_2}{6} (r_1 - r_2)^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} \left[2m_0 - g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi \right],$$

откуда определяем искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа OA:

$$\ddot{\varphi} = 3 \frac{2m_0 - g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi}{2M + 9M_2} . \tag{14}$$

Равномерное вращение кривошипа осуществляется при выполнении условия

$$m_0 = \frac{1}{2} g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi.$$

Задача 10.41. Решить предыдущую задачу с учетом момента сил сопротивления m_c в подвижном цилиндрическом шарнире A, соединяющем конец кривошипа OA с центром колеса 2.

Решение. Запишем элементарную работу момента m_c:

$$\delta A\,(m_c) = m_c \delta\varphi_r, \tag{1}$$

где $\delta\varphi_r$ – относительное угловое возможное перемещение колеса 2 по отношению к кривошипу OA.

Для определения $\delta\varphi_r$ разложим движение колеса 2 на переносное вращательное вместе с кривошипом OA и относительное по отношению к кривошипу. При этом возможное перемещение любой точки колеса 2 можно записать в виде

$$\delta s_a = \delta s_e + \delta s_r. \tag{2}$$

Возможное перемещение точки $\mathscr{P}$, совмещенной с мгновенным центром скоростей, равно нулю. Поэтому формула (2) принимает вид $0 = \delta s_{\mathscr{P}e} + \delta s_{\mathscr{P}r}$, т.е.

$$\delta s_{\mathscr{P}r} = -\delta s_{\mathscr{P}e}. \tag{3}$$

Так как $\delta S_{\mathscr{P}r} = A\mathscr{P}|\delta\varphi_r| = r_2|\delta\varphi_r|$, а $\delta s_{\mathscr{P}e} = O\mathscr{P}|\delta\varphi_e| = r_1|\delta\varphi|$, то, в соответствии с формулой (3), имеем $r_2\delta\varphi_r = -r_1\delta\varphi$. Отсюда

$$\delta\varphi_r = -\frac{r_1}{r_2}\delta\varphi. \tag{4}$$

Внеся значение (4) $\delta\varphi_r$ в формулу (1), получим

$$\delta A(m_c) = -\frac{r_1}{r_2} m_c\,\delta\varphi. \tag{5}$$

С учетом работы (5) момента сил сопротивления m_c, формула (1) предыдущей задачи примет вид

$$\delta A = \frac{1}{2}\left[2m_0 - g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi - \frac{2r_1}{r_2} m_c\right]\delta\varphi. \tag{6}$$

Учитывая, что $\delta A = Q_\varphi \delta\varphi$, находим обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ:

$$Q_\varphi = \frac{1}{2}\left[2m_0 - g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi - \frac{2r_1}{r_2} m_c\right]. \tag{7}$$

После подстановки выражения (7), а также результатов (12) и (13) предыдущей задачи в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

и решения его относительно $\ddot\varphi$ получим искомое угловое ускорение кривошипа OA:

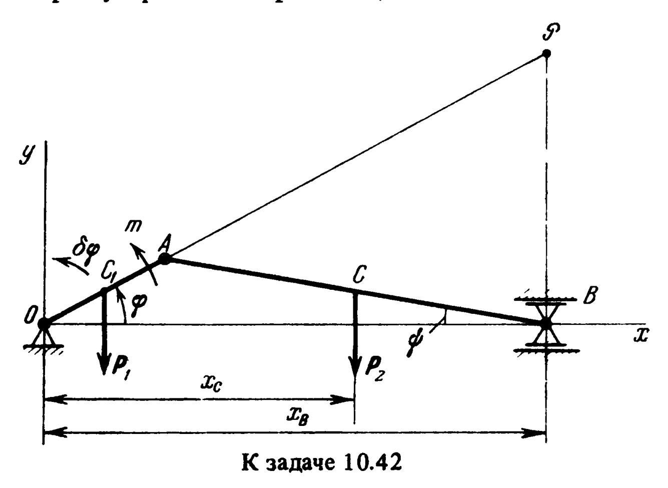
$$\ddot\varphi = 3\,\frac{2m_0 - g(M+2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi - \dfrac{2r_1}{r_2}m_c}{2M+9M_2}. \quad (8)$$

Сопоставив числители формулы (8) и выражения (14) предыдущей задачи, видим, что момент сил сопротивления m_c уменьшает угловое ускорение $\ddot\varphi$ кривошипа.

Равномерное вращение кривошипа происходит при выполнении условия $\ddot\varphi = 0$. При этом из формулы (8) находим

$$m_0 = \frac{1}{2}g(M+2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi - \frac{r_1}{r_2}m_c.$$

Задача 10.42. Кривошипно-ползунный механизм OAB, расположенный в вертикальной плоскости, приводится в движение посредством кривошипа OA, к которому приложен вращающий момент m.



К задаче 10.42

Найти закон изменения момента m, при котором осуществляется равномерное вращение кривошипа; M_1 – масса кривошипа OA, r – длина кривошипа, M_2 – масса шатуна AB, l – длина шатуна, M_3 – масса ползуна. Кривошип OA и шатун AB считать тонкими однородными стержнями, а ползун – точечной массой. Силами сопротивления движению пренебречь.

Решение. В решении задачи 10.35 в качестве обобщенной координаты был введен угол поворота φ кривошипа и была определена обобщенная сила Q_φ:

$$Q_\varphi = m - \frac{1}{2} rg(M_1 + M_2)\cos\varphi. \tag{1}$$

Уравнение Лагранжа для обобщенной координаты φ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \tag{2}$$

Вычислим кинетическую энергию T механизма, в состав которого входят массы кривошипа, шатуна и ползуна, по формуле

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}. \tag{3}$$

Кинетическая энергия $T^{(1)}$ кривошипа OA, вращающегося вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, равна $T^{(1)} = \frac{1}{2} I_O \dot\varphi^2$. Так как кривошип считается однородным тонким стержнем, то $I_O = \frac{1}{3} M_1 r^2$, и, следовательно,

$$T^{(1)} = \frac{1}{6} M_1 r^2 \dot\varphi^2. \tag{4}$$

Кинетическая энергия $T^{(2)}$ шатуна AB, совершающего плоское движение, имеет вид

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2. \tag{5}$$

Выразим теперь v_C и ω_2 через обобщенную координату φ и обобщенную скорость $\dot\varphi$.

В решении задачи 10.35 было определено положение мгновенного центра скоростей $\mathcal{P}$ шатуна AB и был вычислен мгновенный радиус точки A, равный $A\mathcal{P} = \dfrac{l\cos\psi}{\cos\varphi}$. Учитывая, что точка A одновременно принадлежит кривошипу OA и шатуну AB, получим $v_A = r|\dot\varphi| = |A\mathcal{P}|\omega_2$, откуда

$$\omega_2 = \frac{r}{A\mathcal{P}}|\dot\varphi| = \lambda \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}|\dot\varphi|, \tag{6}$$

где $\lambda = r/l$.

Установим связь между $\cos\psi$ и углом φ. Из треугольника OAB находим, что $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \dfrac{l}{r}$, откуда

$$\sin\psi = \lambda\sin\varphi, \tag{7}$$

где $\lambda = r/l$, следовательно,

$$\cos\psi = \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi} = (1 - \lambda^2\sin^2\varphi)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi \approx$$

$$\approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\cdot\frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \approx 1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\,.$$

Итак,

$$\cos\psi \approx 1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi. \tag{8}$$

Подставив значение $\cos\psi$ из формулы (8) в (6), получаем

$$\omega_2 = \frac{\lambda\cos\varphi}{1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi}\,|\dot\varphi|. \tag{9}$$

В первое слагаемое формулы (5) входит квадрат скорости центра масс C шатуна, который можно вычислить по формуле

$$v_C^2 = \dot x_C^2 + \dot y_C^2. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что $x_C = |OA|\cos\varphi + |AC|\cos\psi = r\cos\varphi + \dfrac{l}{2}\cos\psi$.

Подставляя значение $\cos\psi$ из формулы (8), имеем

$$x_C = r\cos\varphi + \frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right),$$

т.е.

$$x_C = \frac{l}{2} - \frac{1}{8}\lambda^2 l + r\cos\varphi + \frac{1}{8}\lambda^2 l\cos 2\varphi,$$

откуда

$$\dot x_C = -r\left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)\dot\varphi\,. \tag{11}$$

Центры масс кривошипа OA и шатуна AB расположены в их серединах и по конструкции имеют равные ординаты

$$y_C = y_{C_1} = \frac{r}{2}\sin\varphi,$$

откуда

$$\dot{y}_C = \frac{r}{2}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}. \qquad (12)$$

Внося в формулу (10) значения $\dot{x}_C$ и $\dot{y}_C$ соответственно из формул (11) и (12), находим

$$v_C^2 = r^2\left[\left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)^2 + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right]\dot{\varphi}^2. \qquad (13)$$

Подставляем в формулу (5) выражения ω_2 и v_C^2 из формул (9) и (13) и, принимая во внимание, что $I_C = \dfrac{M_2 l^2}{12}$, получаем

$$T^{(2)} = \frac{M_2 r^2}{24}\left\{3\left[4\left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)^2 + \cos^2\varphi\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos^2\varphi}{\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right)^2}\right\}\dot{\varphi}^2. \qquad (14)$$

Кинетическая энергия $T^{(3)}$ ползуна B, движущегося поступательно, находится по формуле

$$T^{(3)} = \frac{1}{2}M_3 v_B^2. \qquad (15)$$

Для определения v_B вычислим абсциссу x_B ползуна:

$$x_B = r\cos\varphi + l\cos\psi.$$

Использовав формулу (8), запишем

$$x_B = r\cos\varphi + l\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right),$$

откуда

$$v_{B_x} = \dot{x}_B = -r\left(\sin\varphi + \frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\right)\dot{\varphi}.$$

Теперь формула (15) принимает вид

$$T^{(3)} = \frac{M_3 r^2}{2}\left(\sin\varphi + \frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\right)^2 \dot{\varphi}^2. \tag{16}$$

Кинетическая энергия кривошипно-ползунного механизма вычисляется по формуле (3) после подстановки в нее значений $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ и $T^{(3)}$ соответственно из (4), (14) и (16):

$$T = \frac{r^2}{24}\left\{4M_1 + M_2\left[12\left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)^2 + 3\cos^2\varphi + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\cos^2\varphi}{\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right)^2}\right] + 12M_3\left(\sin\varphi + \frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\right)^2\right\}\dot{\varphi}^2. \tag{17}$$

Если ввести обозначение

$$I_{\text{пр}} = \frac{r^2}{12}\left\{4M_1 + M_2\left[12\left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)^2 + 3\cos^2\varphi + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\cos^2\varphi}{\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right)^2}\right] + 12M_3\left(\sin\varphi + \frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\right)^2\right\}, \tag{18}$$

то кинетическая энергия кривошипно-ползунного механизма записывается в форме

$$T = \frac{1}{2} I_{\text{пр}}\dot{\varphi}^2, \tag{19}$$

т.е. получает вид кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, равной обобщенной скорости $\dot{\varphi}$ системы. Таким образом, все массы системы оказываются приведенными к обобщенной координате φ. Коэффициент $I_{\text{пр}}$ носит в курсе теории механизмов и машин название *приведенного момента инерции системы* (если бы в качестве обобщенной координаты была избрана какая-либо линейная координата s, то кинетическая энергия системы получила бы вид $T = \frac{1}{2} M_{\text{пр}}\dot{s}^2$, где $M_{\text{пр}}$ – приведенная масса системы).

Громоздкость выражения приведенного момента инерции $I_{\text{пр}}$, определенного формулой (18), наглядно иллюстрирует вычислительные трудности, с которыми приходится сталкиваться при определении выражения кинетической энергии механизма аналитическим путем (не менее громоздким, как показывает решение задачи 10.35, получается и выражение обоб-

щенной силы Q_φ. именуемое в курсе теории механизмов и машин приведенной силой). При этом следует иметь в виду, что в этой задаче рассматривается сравнительно несложный механизм.

Возвращаясь к составлению уравнения Лагранжа для рассматриваемого кривошипно-ползунного механизма, вычислим частную производную кинетической энергии T, определенной формулой (19), по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{\text{пр}}\dot{\varphi}. \tag{20}$$

Затем возьмем производную по времени от частной производной (20), приняв во внимание, что приведенный момент инерции зависит от обобщенной координаты φ, т.е. $I_{\text{пр}} = I_{\text{пр}}(\varphi)$. Получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 + I_{\text{пр}}\ddot{\varphi}. \tag{21}$$

Далее вычислим частотную производную кинетической энергии (19) по обобщенной координате φ:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2. \tag{22}$$

После подстановки значений Q_φ, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$ и $\dfrac{\partial T}{\partial \varphi}$ соответственно из формул (1), (21) и (22) в уравнение Лагранжа (2) получим

$$I_{\text{пр}}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 = m - \frac{1}{2} rg(M_1 + M_2)\cos\varphi, \tag{23}$$

где $I_{\text{пр}}$ определено формулой (18). Уравнение (23) является дифференциальным уравнением движения кривошипно-ползунного механизма.

По условию задачи требуется определить закон изменения вращающего момента m, обеспечивающий равномерное вращение кривошипа, т.е. постоянство $\dot{\varphi}$. При этом $\ddot{\varphi} = 0$ и решение уравнения (23) относительно m приводит к результату

$$m = \frac{1}{2}\left[\frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 + rg(M_1 + M_2)\cos\varphi\right],$$

где

$$\frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi} = \frac{r^2}{12}\left\{M_2\left[24\left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\lambda\cos 2\varphi\right) - \right.\right.$$

$$-\sin 2\varphi \frac{3\left(1-\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda^2\cos 2\varphi\right)^3+1-\frac{3}{4}\lambda^2-\frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi}{\left(1-\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right)^3}\Bigg]+$$

$$+\,24M_3\left(\sin\varphi+\frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\right)(\cos\varphi+\lambda\cos 2\varphi)\Bigg\};$$

здесь $\lambda = r/l$.

Задача 10.43. Использовав условие и рисунок к задаче 10.22, определить ускорение призмы B, если система движется под действием силы F. Трением пренебречь.

Решение. Данная материальная система имеет одну степень свободы. Действительно, задание какого-либо одного параметра однозначно определяет положение всех ее точек. В качестве обобщенной координаты выберем параметр ξ. Для определения искомого ускорения применим уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\xi}-\frac{\partial T}{\partial\xi}=Q_\xi. \tag{1}$$

Изобразим активные силы: силы тяжести P и Q призм M и B, а также силу F. Реакции изображать не следует, так как все связи по условию идеальны. Для вычисления обобщенной силы Q_ξ запишем сумму работ активных сил на возможных перемещениях их точек приложения: $\delta A = P_y\delta y_C + F_x\delta x_D$. Использовав в этой формуле результаты (2) задачи 10.22, а также $P_y = -P = -M_1g$ и $F_x = -F$, найдем $\delta A = M_1g\delta\xi\,\mathrm{tg}\,\alpha - F\cdot 2\delta\xi$, т.е. $\delta A = (M_1g\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2F)\delta\xi$. Обобщенной силой Q_ξ является коэффициент пропорциональности, стоящий при $\delta\xi$, т.е.

$$Q_\xi = M_1g\,\mathrm{tg}\,\alpha-2F. \tag{2}$$

Кинетическая энергия материальной системы равна

$$T = T^{(B)}+T^{(M)}. \tag{3}$$

Призмы B и M движутся поступательно. Поэтому

$$T^{(B)} = \frac{1}{2}M_2v_D^2,\qquad T^{(M)} = \frac{1}{2}M_1v_C^2, \tag{4}$$

где

$$v_D^2 = \dot x_D^2+\dot y_D^2,\qquad v_C^2 = \dot x_B^2+\dot y_C^2. \tag{5}$$

Используем соотношения (1) задачи 10.22, взяв производные по времени:

$$\dot{x}_D = 2\dot{\xi}, \qquad \dot{y}_C = -\dot{\xi}\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{6}$$

Как видно из рисунка к задаче 10.22, $x_C = a + \xi$, $y_D = \mathrm{const}$. Значит,

$$\dot{x}_C = \dot{\xi}, \quad \dot{y}_D = 0. \tag{7}$$

Используем выражения (6) и (7) в формулах (5):

$$v_D^2 = 4\dot{\xi}^2, \quad v_C^2 = \frac{\dot{\xi}^2}{\cos^2\alpha}. \tag{8}$$

Теперь последовательно подставим значения (8) в формулы (4) и затем в выражение кинетической энергии (3):

$$T = 2M_2\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}M_1\frac{\dot{\xi}^2}{\cos^2\alpha},$$

т.е.

$$T = \frac{M_1 + 4M_2\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}\dot{\xi}^2. \tag{9}$$

Применив результат (9), вычислим

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \frac{M_1 + 4M_2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\ddot{\xi}. \tag{10}$$

Внесем выражения (2) и (10) в уравнение Лагранжа (1):

$$\frac{M_1 + 4M_2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\ddot{\xi} = M_1 g\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2F,$$

т.е.

$$\ddot{\xi} = \frac{M_1\mathrm{tg}\,\alpha - 2F}{M_1 + 4M_2\cos^2\alpha}\cos^2\alpha. \tag{11}$$

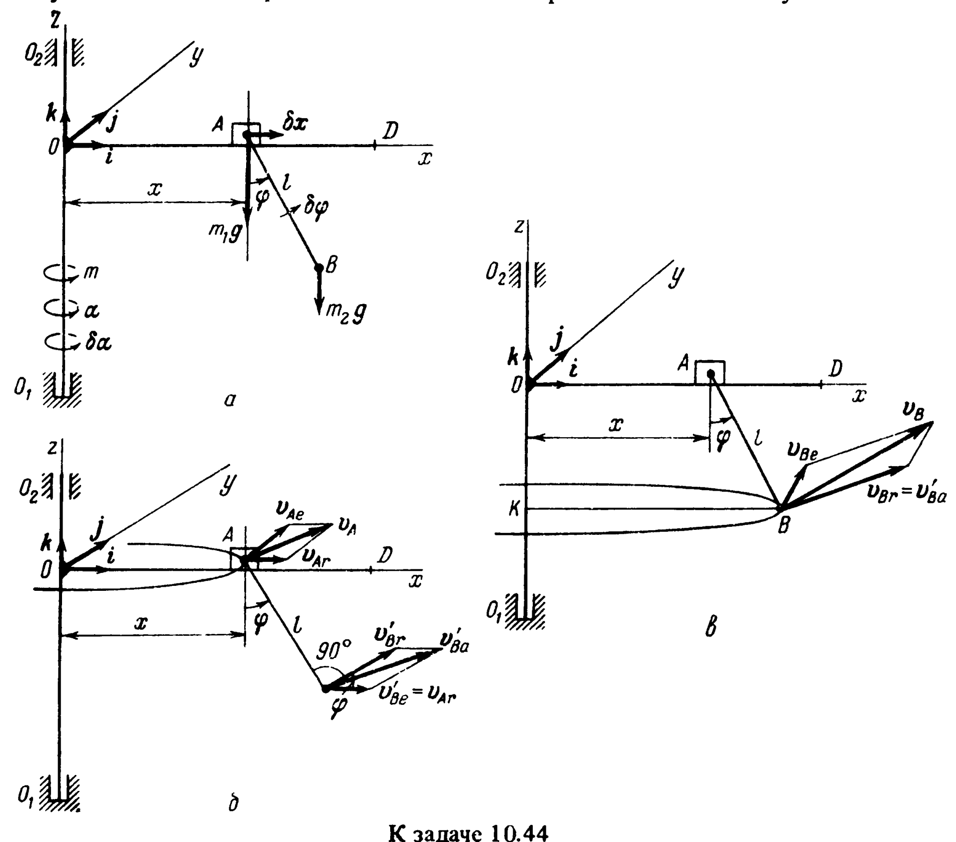
Для определения искомого ускорения призмы заметим, что оно направлено горизонтально, т.е. $a_D = |a_{Dx}| = |\ddot{x}_D|$. Использовав первую формулу (6), вычислим $\ddot{x}_D = a_{Dx} = 2\ddot{\xi}$. Подстановка результатов (11) дает

$$a_{Dx} = 2\frac{M_1 g\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2F}{M_1 + 4M_2\cos^2\alpha}\cos^2\alpha.$$

Если в начальный момент система находилась в покое, а сила F была столь мала, что $F < ½M_1 g\,\mathrm{tg}\,\alpha$, то $a_{Dx} > 0$, т.е. призма B движется напра-

во, а призма M – направо вниз. Если же сила F по модулю столь велика, что $F > \frac{1}{2}M_1 g \operatorname{tg} \alpha$, то $a_{Dx} < 0$, т.е. призма B движется налево, а призма M – налево вверх. При выполнении условия $F = \frac{1}{2}M_1 g \operatorname{tg} \alpha$ система остается в покое (этот результат следует также из формулы (9) задачи 10.22 при $f = 0$).

Задача 10.44. К валу O_1O_2, вращающемуся вокруг неподвижной вертикальной оси z, жестко прикреплен гладкий горизонтальный стержень OD. Ползун A массой m_1 скользит вдоль стержня OD. В ползуне A имеется



К задаче 10.44

цилиндрический подшипник, горизонтальная ось которого перпендикулярна плоскости O_1OD. Вокруг оси может проворачиваться невесомый стержень AB длиной l с точечной массой m_2 в точке B. Момент инерции вала со стержнем относительно оси z равен I_z. К валу приложен вращающий момент m_z. Всеми силами сопротивления пренебречь. Ползун считать точечной массой.

Написать дифференциальные уравнения движения материальной системы.

Решение. Направим ось x вдоль стержня OD, а ось y – перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Соответствующие орты равны $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Подвижная система осей xyz вращается вместе с валом (рис. a).

Данная материальная система имеет три степени свободы: для определения положений вала O_1O_2 со стержнем, ползуна A на стержне и массы B относительно ползуна надо задать три независимых параметра. Выберем обобщенные координаты: $q_1 = \alpha$ – угол поворота вала O_1O_2 со стержнем, $q_2 = x$ – координата ползуна A, $q_3 = \varphi$ – угол поворота стержня AB (рис. a). Запишем соответствующие уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_\alpha, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \qquad (1)$$

К материальной системе приложены активные силы и моменты: сила тяжести $\boldsymbol{P}$ вала со стержнем (сила $\boldsymbol{P}$ не задана и на рисунке не изображена), сила тяжести $m_1 g$ ползуна, сила тяжести $m_2 g$ – массы B, вращающий момент m_z.

Для определения обобщенной силы Q_α дадим системе обобщенное возможное перемещение $\delta\alpha$, а два других, т.е. δx и $\delta\varphi$, примем равными нулю: $\delta\alpha \neq 0$, $\delta x = 0$, $\delta\varphi = 0$. Это значит, что при неизменных значениях x и φ вал со стержнем повернется на $\delta\alpha$. При этом точки приложения всех сил тяжести переместятся по дугам горизонтальных окружностей с центрами, лежащими на оси z. Значит, работа этих сил равна нулю. Отличной от нуля является лишь работа вращающего момента m_z, т.е. $\Sigma\, \delta A_k = m_z \delta\alpha$. Отсюда следует значение обобщенной силы Q_α. Имеем

$$Q_\alpha = m_z. \qquad (2)$$

Для вычисления обобщенной силы Q_x дадим обобщенное возможное перемещение δx, а два других, т.е. $\delta\alpha$ и $\delta\varphi$, примем равными нулю: $\delta x \neq 0$, $\delta\alpha = 0$, $\delta x = 0$. Это значит, что при неизменных значениях α и φ ползун переместится вдоль оси x на δx. При этом стержень AB передвинется поступательно и траекториями точек приложения сил тяжести $m_1 g$ и $m_2 g$ окажутся горизонтальные прямые. Следовательно, работа сил тяжести ползуна A и массы B равна нулю (при неизменном положении вала работа вращающего момента и его силы тяжести также равны нулю): $\Sigma\, \delta A_k = 0$. Так как $\Sigma\, \delta A_k = Q_x \delta x$, а $\delta x \neq 0$, то

$$Q_x = 0. \qquad (3)$$

Для определения обобщенной силы Q_φ дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$, а два других, т.е. $\delta\alpha$ и δx, примем равными нулю: $\delta\varphi \neq 0$, $\delta\alpha = 0$, $\delta x = 0$. Это значит, что при неизменных значениях α и x

маятник повернется на $\delta\varphi$ в сторону возрастания угла φ, т.е. против хода часовой стрелки. Использовав формулу (1) задачи 10.31, запишем

$$Q_\varphi = -m_2 g l \sin\varphi. \tag{4}$$

Перейдем к вычислению кинетической энергии материальной системы:

$$T = T^{(\text{в})} + T^{(\text{п})} + T^{(B)}, \tag{5}$$

где $T^{(\text{в})}$ – кинетическая энергия вала, $T^{(\text{п})}$ – ползуна A, $T^{(B)}$ – массы B.

Вал O_1O_2 со стержнем OD вращается вокруг неподвижной оси z. Поэтому

$$T^{(\text{в})} = \frac{1}{2} I_z \dot{\alpha}^2. \tag{6}$$

Кинетическая энергия ползуна A, считаемого точечной массой, равна

$$T^{(\text{п})} = \frac{1}{2} m_1 v_A^2, \tag{7}$$

где v_A – модуль абсолютной скорости ползуна, который совершает сложное движение: переносное вращательное вместе с валом и стержнем и относительное – вдоль стержня. Применим теорему о сложении скоростей к точке A: $\mathbf{v}_{Aa} = \mathbf{v}_{Ae} + \mathbf{v}_{Ar}$. В данном случае $\mathbf{v}_{Aa} = \mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_{Ae} = x\dot{\alpha}\boldsymbol{j}$, $\mathbf{v}_{Ar} = \dot{x}\boldsymbol{i}$ (рис. *б*). Поэтому

$$\mathbf{v}_A = x\dot{\alpha}\boldsymbol{j} + \dot{x}\boldsymbol{i}. \tag{8}$$

Следовательно, $v_A^2 = x^2\dot{\alpha}^2 + \dot{x}^2$. Внеся это значение в формулу (7), найдем кинетическую энергию ползуна A:

$$T^{(\text{п})} = \frac{1}{2} m_1 x^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2. \tag{9}$$

Кинетическая энергия массы B имеет вид

$$T^{(B)} = \frac{1}{2} m_2 v_B^2, \tag{10}$$

где v_B – модуль ее абсолютной скорости.

Перейдем к определению скорости $\mathbf{v}_B$ точки B. Заметим, что она совершает относительное движение по отношению к ползуну A, скользящему вдоль стержня. Стержень же в свою очередь вместе с валом вращается вокруг неподвижной оси z. Найдем скорость $\mathbf{v}_B$ в два этапа.

На первом этапе отвлечемся от вращения стержня с валом вокруг неподвижной оси z. Тогда относительным окажется движение массы B

по отношению к подвижной среде, движущейся поступательно вместе с ползуном A, скользящим вдоль стержня. Найдем абсолютную скорость $\mathbf{v}'_B$ на этом этапе (все скорости на первом этапе будем обозначать штрихами).

На втором этапе рассмотрим относительное движение массы B по отношению к подвижной среде, совершающей переносное вращение вокруг неподвижной оси z. Теперь скорость $\mathbf{v}'_{Ba}$, которая на первом этапе была абсолютной, является относительной. Выполним подробно эти расчеты.

1) Применим теорему о сложении скоростей точки к массе B:

$$\mathbf{v}'_{Ba} = \mathbf{v}'_{Be} + \mathbf{v}'_{Br}. \tag{11}$$

В данном случае при мысленно остановленном стержне переносное движение является поступательным вместе с ползуном A. Поэтому переносная скорость $\mathbf{v}'_{Be}$ массы B векторно равна относительной скорости $\mathbf{v}_{Ar}$ движения ползуна A по стержню (рис. *б*):

$$\mathbf{v}'_{Be} = \mathbf{v}_{Ar} = \dot{x}\mathbf{i}. \tag{12}$$

Относительная скорость — это скорость массы B по отношению ползуна A, т.е.

$$\mathbf{v}'_{Br} = \mathbf{v}_{BA}. \tag{13}$$

Вектор $\mathbf{v}_{BA}$ перпендикулярен AB (рис. *б*), т.е. образует с осью x угол φ и по модулю равен

$$v_{BA} = l\,|\dot{\varphi}|. \tag{14}$$

Использовав результаты (12) и (13) в формуле (11), имеем $\mathbf{v}'_{Ba} = \dot{x}\mathbf{i} + \mathbf{v}_{BA}$. Построив на рис. *б* параллелограмм скоростей, лежащий в плоскости xz, и приняв во внимание выражение (14), найдем

$$v'^2_{BA} = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi. \tag{15}$$

2) Вновь применим теорему о сложении скоростей точки B, но теперь уже при переносном вращении стержня с валом вокруг неподвижной оси z и относительном движении массы B по отношению к ним:

$$\mathbf{v}_{Ba} = \mathbf{v}_{Be} + \mathbf{v}_{Br}. \tag{16}$$

Теперь абсолютная скорость является искомой скоростью точки B:

$$\mathbf{v}_{Ba} = \mathbf{v}_B. \tag{17}$$

При переносном вращении вокруг оси z скорость $\mathbf{v}_{Be}$ направлена перпендикулярно плоскости рисунка от нее (рис. *в*) и по модулю равна: $v_{Be} = BK\,|\dot{\alpha}| = (x + l\sin\varphi)\,|\dot{\alpha}|$, т.е.

$$\mathbf{v}_{Be} = (x + l\sin\varphi)\,\dot{\alpha}\mathbf{j}. \tag{18}$$

Относительной скоростью $\mathbf{v}_{Br}$ является скорость $\mathbf{v}'_{Ba}$, которая на первом этапе при остановленном вале со стержнем была абсолютной, т.е.

$$\mathbf{v}_{Br} = \mathbf{v}'_{Ba}. \tag{19}$$

Внеся результаты (17)–(19) в формулу (16), найдем

$$\mathbf{v}_B = (x + l \sin\varphi)\,\dot\alpha \mathbf{j} + \mathbf{v}'_{Ba}. \tag{20}$$

В празой части выражения (20) стоят две взаимно перпендикулярные скорости (вектор $(x + l\sin\varphi)\dot\alpha \mathbf{j}$ перпендикулярен плоскости xz, а вектор $\mathbf{v}'_{Ba}$ лежит в этой плоскости). Поэтому, приняв во внимание формулу (15), найдем

$$v_B^2 = (x + l\sin\varphi)^2\dot\alpha^2 + \dot x^2 + l^2\dot\varphi^2 + 2l\dot\varphi\dot x\cos\varphi. \tag{21}$$

Подставив результат (21) в формулу (10), получим кинетическую энергию массы B:

$$T^{(B)} = \frac{1}{2}m_2(x + l\sin\varphi)^2\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}m_2\dot x^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot\varphi^2 + m_2 l\dot\varphi\dot x\cos\varphi. \tag{22}$$

После внесения в формулу (5) значений (6), (9) и (22) и простых преобразований найдем кинетическую энергию данной материальной системы:

$$T = \frac{1}{2}\left[I_z + m_1x^2 + m_2(x + l\sin\varphi)^2\right]\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot x^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}m_2l^2\dot\varphi^2 + m_1 l\dot\varphi\dot x\cos\varphi. \tag{23}$$

Заметим, что $T = T(x, \varphi, \dot\alpha, \dot x, \dot\varphi)$.

Последующая часть решения задачи представляет лишь незначительные вычислительные трудности. Найдем, во-первых, частные производные кинетической энергии (23) по обобщенным скоростям $\dot\alpha$, $\dot x$, $\dot\varphi$:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\alpha} = \left[I_z + m_1x^2 + m_2(x + l\sin\varphi)^2\right]\dot\alpha,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot x} = (m_1 + m_2)\dot x + m_2l\dot\varphi\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = m_2l^2\dot\varphi + m_2l\dot x\cos\varphi.$$

Затем возьмем производные от этих частных производных по времени,

имея в виду, что $x, \varphi, \dot\alpha, \dot x, \dot\varphi$ являются функциями времени:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\alpha} = [I_z + m_1 x^2 + m_2(x + l\sin\varphi)^2]\ddot\alpha +$$

$$+ 2\dot\alpha[m_1 x\dot x + m_2(x + l\sin\varphi)(\dot x + l\dot\varphi\cos\varphi)], \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot x} = (m_1 + m_2)\ddot x + m_2 l\ddot\varphi\cos\varphi - m_2 l\dot\varphi^2\sin\varphi, \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = m_2 l^2\ddot\varphi + m_2 l\ddot x\cos\varphi - m_2 l\dot\varphi\dot x\sin\varphi. \tag{26}$$

Теперь вычислим частные производные кинетической энергии (23) по обобщенным координатам α, x и φ:

$$\frac{\partial T}{\partial\alpha} = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = [m_1 x + m_2(x + l\sin\varphi)]\dot\alpha^2, \tag{28}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = m_2 l(x + l\sin\varphi)\dot\alpha^2\cos\varphi. \tag{29}$$

Для составления искомых дифференциальных уравнений движения материальной системы подставим результаты (24), (27) и (2) в первое уравнение Лагранжа (1), затем (25), (28) и (3) – во второе уравнение (1) и, наконец, (26), (29) и (4) – в третье уравнение (1). Найдем

$$[I_z + m_1 x^2 + m_2(x + l\sin\varphi)^2]\ddot\alpha + 2\dot\alpha[m_1 x\dot x + m^2(x +$$

$$+ l\sin\varphi)(\dot x + l\dot\varphi\cos\varphi)] = m_z, \tag{30}$$

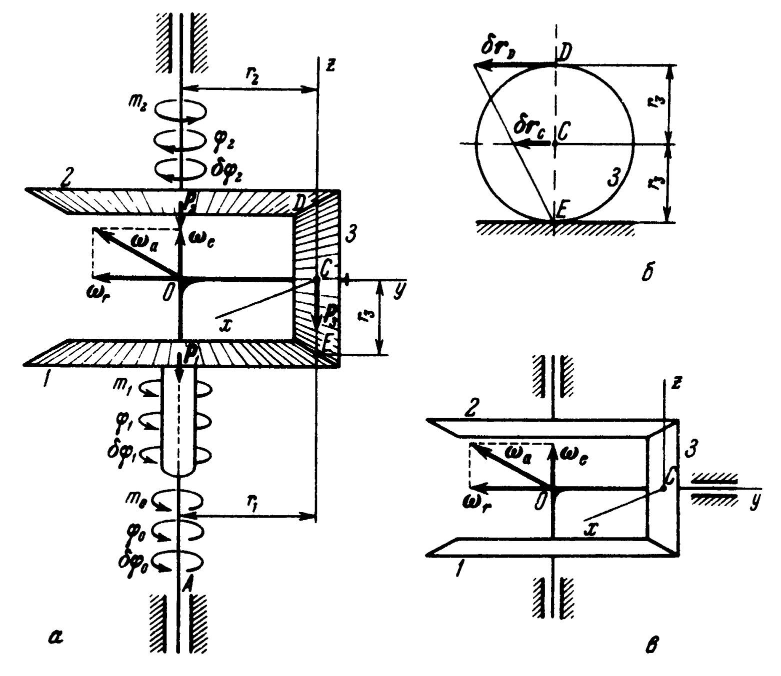
$$(m_1 + m_2)\ddot x + m_2 l\ddot\varphi\cos\varphi - m_2 l\dot\varphi^2\sin\varphi - [m_1 x + m_2(x + l\sin\varphi)]\dot\alpha^2 = 0, \tag{31}$$

$$l\ddot\varphi + \ddot x\cos\varphi - \dot\varphi\dot x\sin\varphi - (x + l\sin\varphi)\dot\alpha^2\cos\varphi = -g\sin\varphi. \tag{32}$$

Бегло просмотрев решение этой задачи с помощью уравнений Лагранжа, видим, что в нем отсутсвовали какие-либо искусственные приемы. Задача рещалась по стандартным образцам. Громоздкие уравнения появились только в конце решения при вычислении производных кинетической энергии (23). Однако это не связано с какими-либо принципиальными трудностями. Центральным звеном решения задачи было определение скоростей точек A и B, необходимых при составлении выражения кинетической энергии (23). Легко представить, во сколько раз затруднилось бы решение этой задачи в случае применения общего уравнения динами-

ки. Действительно, при этом вместо отыскания скоростей точек пришлось бы для модулей сил инерции находить их ускорения. Это усложнило бы решение в несколько раз.

Задача 10.45. На рис. *а* изображен механизм станочного дифференциала. Ведущее коническое зубчатое колесо *1* и ведомое коническое зубчатое колесо *2* вращаются вокруг неподвижных осей. Коническое зубчатое колесо *3*, называемое *сателлитом*, передает вращение от колеса *1* к



К задаче 10.45

колесу *2*. Колесо *3* свободно посажено на ось *OC*, являющуюся частью изогнутого кривошипа *AOC*, который вращается вокруг неподвижной вертикальной оси. Сообщая разные угловые скорости кривошипу *AOC* и колесу *1*, можно получить любую необходимую угловую скорость колеса *2*. К кривошипу *AOC* приложен вращающий момент m_0, к валу колеса *1* – вращающий момент m_1 и к валу колеса *2* – момент полезного сопротивления m_2 (рис. *а*). Колеса *1*, *2* и *3* считать круглыми однородными дисками соответственно массой M_1, M_2 и M_3 и радиусами r_1, r_2 и r_3 (в рассматриваемой конструкции r_1 равно r_2).

Определить угловые ускорения кривошипа *AOC* и конических зубчатых колес *1* и *2*. Массой кривошипа *AOC* и силами сопротивления движению пренебречь.

Решение. Из условия задачи следует, что станочный дифференциал является системой с двумя степенями свободы.

В качестве независимых обобщенных координат выберем угол поворота φ_0 кривошипа AOC вокруг вертикальной оси AO и угол поворота φ_1 колеса *1* вокруг соответствующей неподвижной оси. Угол поворота ведомого колеса *2* обозначим через φ_2.

Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах φ_0 и φ_1 имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_0} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_0} = Q_{\varphi 0}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi 1}. \tag{1}$$

Изобразим на рис. *а* активные силы и моменты: $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ – силы тяжести конических колес *1, 2, 3* и моменты m_0, m_1 и m_2. Реакции связей изображать не следует, так как все связи, наложенные на дифференциал, являются идеальными; $P_1 = M_1 g$, $P_2 = M_2 g$, $P_3 = M_3 g$.

Дадим дифференциалу независимые обобщенные возможные перемещения $\delta\varphi_0$ и $\delta\varphi_1$ в направлении возрастания углов φ_0 и φ_1. Для вычисления обобщенной силы $Q_{\varphi 0}$ сообщим дифференциалу возможное перемещение $\delta\varphi_0$, считая при этом $\delta\varphi_1$ равным нулю: $\delta\varphi_0 \neq 0$, $\delta\varphi_1 = 0$.

Это значит, что при неподвижном колесе *1* кривошип получил возможное угловое перемещение $\delta\varphi_0$ вокруг оси AO. При этом возможное перемещение точки C кривошипа равно $\delta r_C = OC\delta\varphi_0 = r_1\delta\varphi_0$. Так как точка C одновременно принадлежит колесу *3*, имеющему при $\delta\varphi_1 = 0$ неподвижную точку E, то нетрудно видеть (рис. *б*), что возможное перемещение точки D третьего колеса $\delta r_D = 2\delta r_C = 2r_1\delta\varphi_0$. Учитывая, что точка D одновременно принадлежит колесу *2*, выразим δr_D через $\delta\varphi_2$; тогда имеем: $\delta r_D = r_2\delta\varphi_2$. Следовательно, $r_2\delta\varphi_2 = 2r_1\delta\varphi_0$, откуда

$$\delta\varphi_2 = 2\delta\varphi_0 \tag{2}$$

(по условию $r_2 = r_1$).

Вычислим сумму работ активных сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\varphi_0$. Имеем $\delta A = m_0\delta\varphi_0 - m_2\delta\varphi_2$.

Работа момента m_2 отрицательна, так как направления m_2 и $\delta\varphi_2$ противоположны. Учитывая формулу (2), получим

$$\delta A = (m_0 - 2m_2)\delta\varphi_0. \tag{3}$$

Работа момента m_1 равна нулю, так как колесо *1* неподвижно. Работа сил $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ равна нулю, ибо их точки приложения неподвижны. Работа силы $\boldsymbol{P}_3$ равна нулю, так как ее точка приложения перемещается в горизонтальной плоскости, а сила $\boldsymbol{P}_3$ вертикальна. Обобщенной силой $Q_{\varphi 0}$ является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi_0$ в формуле (3), т.е.

$$Q_{\varphi 0} = m_0 - 2m_2. \tag{4}$$

Для вычисления обобщенной силы $Q_{\varphi 1}$ дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi_1$, считая при этом $\delta\varphi_0$ равным нулю: $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_0 = 0$. Это значит, что при неподвижном кривошипе AOC колесо *1* получило возможное перемещение $\delta\varphi_1$. При этом колесо *2* через посредство колеса *3* получит равное по величине возможное перемещение $\delta\varphi_2$, направленное в противоположную сторону: $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1$. Следовательно, направления m_2 и $\delta\varphi_2$ совпадают.

Вычислим сумму работ активных сил на обобщенном возможном перемещении $\delta\varphi_1$:

$$\delta A = m_1\delta\varphi_1 + m_2\delta\varphi_2 = (m_1 + m_2)\delta\varphi_1 .$$

Учитывая, что $\delta A = Q_{\varphi 1}\delta\varphi_1$, находим

$$Q_{\varphi 1} = m_1 + m_2 . \tag{5}$$

Переходим к вычислению кинетической энергии T станочного дифференциала, в состав которого входят три конических зубчатых колеса *1*, *2* и *3* (массой кривошипа AOC, по условию, мы пренебрегаем):

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} . \tag{6}$$

Кинетическая энергия колеса *1*, вращающегося вокруг неподвижной вертикальной оси, дается формулой

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_1\dot{\varphi}_1^2 , \tag{7}$$

где I_1 – момент инерции колеса *1* относительно его оси вращения.

Кинетическая энергия колеса *2*, вращающегося вокруг неподвижной вертикальной оси, равна

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} I_2\dot{\varphi}_2^2 , \tag{8}$$

где I_2 – момент инерции колеса *2* относительно его оси вращения.

Для вычисления кинетической энергии колеса *3* применяем формулу

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} M_3 v_C^2 + \frac{1}{2}(I_{3x}\omega_x^2 + I_{3y}\omega_y^2 + I_{3z}\omega_z^2 - 2I_{3yz}\omega_y\omega_z - 2I_{3zx}\omega_z\omega_x - 2I_{3xy}\omega_x\omega_y),$$

где v_C – скорость центра масс C колеса *3*, ω_x, ω_y, ω_z – проекции абсолютной угловой скорости $\vec{\omega}_a$ колеса *3* на подвижные координатные оси x, y, z, с ним жестко связанные, I_{3x}, I_{3y}, I_{3z} – осевые моменты инерции, I_{3yz}, I_{3zx}, I_{3xy} – центробежные моменты инерции колеса *3* относительно соответствующих осей координат.

Выберем начало осей координат в центре масс C колеса 3. Направим по вертикали ось z, по горизонтали направо вдоль оси относительного вращения колеса 3 направим ось y и, следовательно, перпендикулярно плоскости рисунка ось x. Нетрудно видеть, что при подобном расположении осей координат они являются главными осями инерции колеса 3 (колесо 3, подобно колесам 1 и 2, мы считаем однородным круглым диском). Следовательно, $I_{3yz} = I_{3zx} = I_{3xy} = 0$, и формула для подсчета кинетической энергии $T^{(3)}$ колеса 3 упрощается:

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} M_3 v_C^2 + \frac{1}{2} (I_{3x}\omega_x^2 + I_{3y}\omega_y^2 + I_{3z}\omega_z^2). \tag{9}$$

Для вычисления ω_x, ω_y и ω_z надо определить абсолютную угловую скорость $\vec{\omega}_a$ колеса 3. Колесо участвует в переносном вращательном движении с угловой скоростью $\omega_e = |\dot{\varphi}_0|$ вокруг вертикальной оси и в относительном вращательном движении с угловой скоростью ω_r вокруг оси симметрии колеса 3.

Для определения ω_r представим себе наблюдателя, расположенного на кривошипе AOC. Этому наблюдателю кривошип кажется неподвижным. Следовательно, глазам наблюдателя представится относительная картина движений. Ему будет казаться, что колеса 1, 2 и 3 вращаются вокруг неподвижных осей (рис. *в*). Запишем зависимости между относительными угловыми скоростями колес и их радиусами:

$$\frac{\omega_1^{(r)}}{\omega_3^{(r)}} = \frac{r_3}{r_1}, \quad \frac{\omega_3^{(r)}}{\omega_2^{(r)}} = -\frac{r_2}{r_3},$$

где $\omega_1^{(r)}$, $\omega_2^{(r)}$, $\omega_3^{(r)}$ обозначают угловые скорости колес 1, 2 и 3 по отношению к кривошипу AOC, вращающемуся с угловой скоростью ω_0. Во второй пропорции стоит знак минус, который при совместном рассмотрении пропорций должен указывать на различные направления относительных угловых скоростей колес 1 и 2. Действительно перемножив пропорции, получим

$$\frac{\omega_1^{(r)}}{\omega_2^{(r)}} = -\frac{r_2}{r_1}.$$

Учитывая, что по условию $r_2 = r_1$, находим $\omega_2^{(r)} = -\omega_1^{(r)}$. Так как $\omega_2^{(r)} = \omega_2 - \omega_0$, а $\omega_1^{(r)} = \omega_1 - \omega_0$, то $\omega_2 = 2\omega_0 - \omega_1$, т.е.

$$\dot{\varphi}_2 = 2\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_1. \tag{10}$$

Из первой пропорции определим относительную угловую скорость $\omega_3^{(r)}$ колеса 3:

$$\omega_3^{(r)} = \frac{r_1}{r_3}\,\omega_2^{(r)} = \frac{r_1}{r_3}\,(\omega_2 - \omega_0),$$

откуда

$$\omega_3^{(r)} = \frac{r_1}{r_3}\,(\dot\varphi_1 - \dot\varphi_0). \tag{11}$$

Направление $\vec\omega_r$ указано на рис. *в*.

Применим к колесу 3 теорему о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся в точке O осей: $\vec\omega_a = \vec\omega_e + \vec\omega_r$ (рис. *в*). Теперь нетрудно вычислить проекции абсолютной угловой скорости $\vec\omega_a$ колеса 3 на оси x, y, z, с ним жестко связанные:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega_3^{(r)}, \quad \omega_z = \omega^{(e)}.$$

Учитывая формулу (11) и замечая, что $\omega_e = \dot\varphi_0$, имеем

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\frac{r_1}{r_3}\,(\dot\varphi_1 - \dot\varphi_0), \quad \omega_z = \dot\varphi_0.$$

Внося эти значения ω_x, ω_y, ω_z в формулу (9) и принимая во внимание, что $v_C = |OC|\,\omega_0 = r_1\dot\varphi_0$, получим

$$T^{(3)} = \frac{1}{2}\,M_3 r_1^2 \dot\varphi_0^2 + \frac{1}{2}\,I_{3y}\,\frac{r_1^2}{r_3^2}\,(\dot\varphi_1 - \dot\varphi_0)^2 + \frac{1}{2}\,I_{3z}\,\dot\varphi_0^2,$$

т.е.

$$T^{(3)} = \frac{1}{2}\left(I_{3z} + M_3 r_1^2 + I_{3y}\,\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\dot\varphi_0^2 + \frac{1}{2}\,I_{3y}\,\frac{r_1^2}{r_3^2}\,\dot\varphi_1^2 - I_{3y}\,\frac{r_1^2}{r_3^2}\,\dot\varphi_0\dot\varphi_1. \tag{12}$$

Кинетическая энергия станочного дифференциала (6) после подстановки значений $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ и $T^{(3)}$ из формул (7), (8) и (12) при одновременном учете соотношения (10) принимает вид

$$T = \frac{1}{2}\left(4I_2 + I_{3z} + M_3 r_1^2 + I_{3y}\,\frac{r_2^2}{r_3^2}\right)\dot\varphi_0^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2 + I_{3y}\,\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\dot\varphi_1^2 - \left(2I_2 + I_{3y}\,\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\dot\varphi_0\dot\varphi_1. \tag{13}$$

Для составления уравнений Лагранжа вычислим частные производные кинетической энергии T по обобщенным скоростям $\dot\varphi_0$ и $\dot\varphi_1$, а затем возь-

мем производные полученных результатов по времени. Находим:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_0} = \left(4I_2 + I_{3z} + M_3 r_1^2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_0 - \left(2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_1, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1} = \left(I_1 + I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_1 - \left(2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}. \quad (15)$$

Учитывая, что выражение кинетической энергии T станочного дифференциала не зависит от обобщенных координат φ_0 и φ_1, имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi_0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = 0. \quad (16)$$

После подстановки формул (4), (5), (14), (15) и (16) в уравнения (1) получим уравнения Лагранжа для обобщенных координат φ_0 и φ_1:

$$\begin{gathered}\left(4I_2 + I_{3z} + M_3 r_1^2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_0 - \left(2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_1 = m_0 - 2m_2,\\ \left(I_1 + I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_1 - \left(2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_0 = m_1 + m_2.\end{gathered} \quad (17)$$

По условию задачи, колеса *1*, *2* и *3* считаются однородными круглыми дисками; поэтому

$$I_1 = \frac{M_1 r_1^2}{2}, \quad I_2 = \frac{M_2 r_2^2}{2}, \quad I_{3y} = \frac{M_3 r_3^2}{4}, \quad I_{3z} = \frac{M_3 r_3^2}{4}.$$

Теперь уравнения движения (17) дифференциала принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}\left[8M_2 r_1^2 + M_3(6r_1^2 + r_3^2)\right]\ddot{\varphi}_0 - \frac{2M_2 + M_3}{2}\,r_1^2\ddot{\varphi}_1 = m_0 - 2m_2,\\ \frac{M_1 + M_2 + M_3}{2}\,r_1^2\ddot{\varphi}_1 - \frac{2M_2 + M_3}{2}\,r_1^2\ddot{\varphi}_0 = m_1 + m_2.\end{gathered} \quad (18)$$

Решив систему уравнений (18) относительно $\ddot{\varphi}_0$ и $\ddot{\varphi}_1$, определим искомые угловые ускорения кривошипа AOC и колеса *1*:

$$\ddot{\varphi}_0 = \frac{LN + MS}{KL - M^2}, \quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{KS + MN}{KL - M^2};$$

здесь

$$K = \frac{1}{4}\,[8M_2r_1^2 + M_3(6r_1^2 + r_3^2)],$$

$$L = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{2}\,r_1^2,$$

$$M = \frac{2M_2 + M_3}{2}\,r_1^2,$$

$$N = m_0 - 2m_2, \qquad S = m_1 + m_2.$$

Воспользовавшись формулой (10), найдем

$$\ddot\varphi_2 = 2\ddot\varphi_0 - \ddot\varphi_1.$$

После подстановки в эту формулу выражений $\ddot\varphi_0$ и $\ddot\varphi_1$ получаем искомое угловое ускорение колеса 2:

$$\ddot\varphi_2 = \frac{N(2L - M) + S(2M - K)}{KL - M^2},$$

где K, L, M, N и S имеют значения, указанные выше.

Решение этой задачи посредством использования общих теорем динамики представило бы значительные трудности. Применение уравнений Лагранжа дает возможность сравнительно просто получить уравнения движения дифференциала и вновь демонстрирует удобство применения Лагранжа при решении сложных задач динамики систем с несколькими степенями свободы.

Задача 10.46. Прибор, разработанный О. Шликом для записи горизонтальных колебаний корпуса судна, называется *паллографом* (рис. *а*). Этот прибор состоит из тяжелого однородного цилиндра A массой m. Цилиндр прикреплен двумя симметрично расположенными стержнями AB, которые свободно проходят через втулки шарниров O и могут поворачиваться вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Стержни AB поддерживаются кривошипами $O_1C = b$, вращающимися вокруг неподвижной оси O_1. При этом $OO_1 = l$, $AC = c$. Момент инерции цилиндра относительно горизонтальной оси, проходящей через точки A, равен I.

Пренебрегая массами стержней AB и O_1C, определить собственные колебания прибора, считая их малыми. Трением пренебречь.

Решение. Применим для решения задачи уравнения Лагранжа в обобщенных координатах для системы с лишними координатами. Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты, полностью определяющей положение системы, угол φ — угол отклонения стержня AB от вертикали. Единственной активной силой, действующей

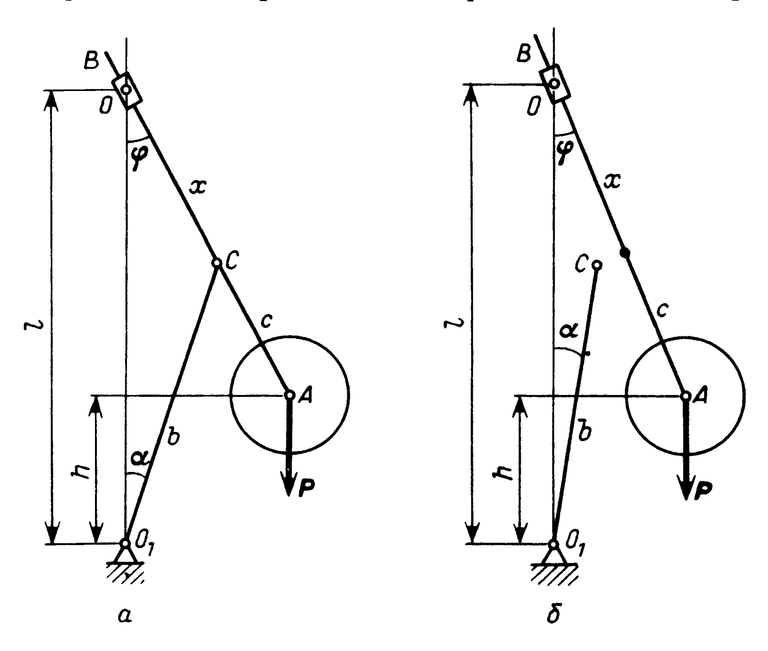
на систему, является сила тяжести цилиндра $P = mg$. Сила тяжести имеет потенциал. Обозначив потенциальную энергию системы П, найдем обобщенную силу Q, соответствующую обобщенной координате φ:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Уравнение Лагранжа в обобщенных координатах примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Переходим к вычислению кинетической энергии T и потенциальной энергии П. Для этого введем два переменных параметра: расстояние $OC = x$ и угол α, образованный вертикалью и стержнем O_1C. Эти параметры и



К задаче 10.46

будут двумя лишними координатами. Кинетическая энергия цилиндра, совершающего плоское движение, определится, согласно теореме Кёнига, формулой

$$T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2, \tag{1}$$

где v – скорость центра масс A цилиндра, ω – угловая скорость цилиндра.

Если выбрать точку O за полюс, то $OA = AC + CO = c + x$ будет являться полярным радиусом, а угол φ – полярным углом. Тогда, согласно известной формуле, квадрат скорости в полярной системе координат равен:

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho\omega)^2,$$

или с учетом того, что $\rho = c + x$, $\omega = \dot{\varphi}$,

$$v^2 = \dot{x}^2 + (c + x)^2 \dot{\varphi}^2.$$

Внося эти значения в формулу (1), находим

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + (c + x)^2 \dot{\varphi}^2] + \frac{I_z \dot{\varphi}^2}{2}. \qquad (2)$$

Найдем зависимость между координатами φ, x, α. Из треугольника OCO_1 находим

$$x \cos\varphi + b\cos\alpha - l = 0, \quad x\sin\varphi - b\sin\alpha = 0. \qquad (3)$$

Чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа для системы с лишними координатами, отбросим мысленно уравнения связи (3). Для этого достаточно отбросить шарнир C (рис. *б*). Тогда новая система имеет три степени свободы, координаты φ, x, α становятся независимыми, превращая рассматриваемую систему в систему с тремя степенями свободы.

Кинетическая энергия определяется формулой (2). Потенциальная энергия равна

$$\Pi = mgh = mg[l - (c + x)\cos\varphi].$$

Следовательно, обобщенные силы Q_φ, Q_α, Q_x, соответствующие обобщенным координатам φ, x, α, равны

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -mg(c + x)\sin\varphi,$$
$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = mg\cos\varphi, \quad Q_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0. \qquad (4)$$

Восстановим соединение шарниром стержней AB и O_1C. Обозначим левые части уравнений связи (3) через f_1 и f_2:

$$f_1 = x\cos\varphi + b\cos\alpha - l, \quad f_2 = x\sin\varphi - b\sin\alpha. \qquad (5)$$

Пользуясь формулами для кинетической энергии (2) и обобщенных сил (4), составим, следуя Лагранжу, уравнения с лишними коор-

динатами:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_\alpha + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}.$$

Внося в эти три уравнения значения кинетической энергии, обобщенных сил и учитывая формулы (5), находим

$$\begin{gathered}[m(c+x)^2 + I]\,\ddot{\varphi} + 2m(c+x)\,\dot{x}\,\dot{\varphi} = -mg(c+x)\sin\varphi - \lambda_1 x \sin\varphi + \\ + \lambda_2 x \cos\varphi, \\ m\ddot{x} - m(c+x)\dot{\varphi}^2 = P\cos\varphi + \lambda_1\cos\varphi + \lambda_2 \sin\varphi, \\ 0 = -\lambda_1 b \sin\alpha - \lambda_2 b \cos\alpha. \end{gathered} \tag{6}$$

Вместе с уравнениями связей (3) система уравнений (6) представляет собой точные дифференциальные уравнения движения центра цилиндра A паллографа Шлика.

Решение этой системы проведем приближенно с точностью до малых величин первого порядка включительно. Полагая угол φ и угловую скорость $\dot{\varphi}$ малыми величинами первого порядка малости, записываем уравнение (3) в виде

$$x + b = l, \quad x\varphi - b\alpha = 0, \tag{7}$$

где принимаем $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$.

Пренебрегая далее членами второго и высших порядков малости в уравнениях (6) и учитывая (7), находим

$$[m(c+l-b)^2 + I]\,\ddot{\varphi} = -mg(c+l-b)\,\varphi - \lambda_1(l-b)\varphi + \lambda_2(l-b), \tag{8}$$

$$mg + \lambda_1 + \lambda_2\varphi = 0, \quad \lambda_1\alpha + \lambda_2 = 0. \tag{9}$$

Находим из уравнений (9) $\lambda_2 = -\lambda_1\alpha$, $\lambda_1 = -mg$, так как $\lambda_2\varphi = -\lambda_1\alpha\varphi$ является величиной второго порядка малости. Тогда $\lambda_2 = mg\alpha$. Вносим найденные значения λ_1 и λ_2 в уравнение (8). Тогда

$$[m(c+l-b)^2 + I]\,\ddot{\varphi} = -mgc\varphi + mg(l-b)\alpha.$$

Подставляя в это уравнение найденное из (7) значение

$$\alpha = \frac{l-b}{b}\,\varphi,$$

находим дифференциальное уравнение малых колебаний паллографа Шлика

$$\ddot{\varphi} + mg\,\frac{cb-(l-b)^2}{b[m(c+l-b)^2+I]}\,\varphi = 0. \tag{10}$$

Обозначая для краткости

$$k^2 = mg\,\frac{cb-(l-b)^2}{b[m(c+l-b)^2+I]}, \tag{11}$$

представим уравнение (10) в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Интегрируя, находим уравнение свободных колебаний паллографа Шлика

$$\varphi = A\sin(kt+\beta). \tag{12}$$

Частота свободных колебаний k определяется равенством (11). Если

$$cb-(l-b)^2 > 0, \tag{13}$$

то паллограф Шлика, будучи выведен из равновесного положения, будет совершать свободные колебания около положения равновесия. Если же

$$cb-(l-b)^2 < 0,$$

то частота k становится мнимой, в формуле (12) вместо тригонометрической функции появится функция гиперболическая, колебательного движения нет, а угол φ будет возрастать с течением времени. Это значит, что равновесное вертикальное положение стержней AB и O_1C неустойчиво. Следовательно, (13) является условием устойчивости равновесного положения паллографа Шлика. Как видно из формулы (13), подбирая значения постоянных l, b, c, можно изменять собственную частоту свободных колебаний паллографа Шлика в широких пределах. Это позволяет настраивать прибор (меняя длину l), делая его чувствительным к записи горизонтальных колебаний корпуса судна.

На примере этой задачи показано применение уравнений движения Лагранжа для системы с лишними координатами.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 47.9, 47.11–47.15, 48.28–48.31, 48.36, 48.39, 48.43.

3. Электромеханические аналогии. В 1873 г. английский ученый Д. Максвелл (1831–1879) в "Трактате по электричеству и магнетизму" предложил применить уравнения Лагранжа к электрическим и электромеханическим системам. В основе электромеханической аналогии лежит соответствие тока и скорости движения. Использование электромеханической аналогии в уравнениях Лагранжа дает возможность описывать "движения"

электромеханических систем, основанных на взаимодействиях между механическими движениями точек и твердых тел, а также электрическими и электромагнитными явлениями в электрических цепях.

Ниже дается таблица аналогичных механических и электрических параметров (существуют также другие системы электромеханических аналогий).

Механические величины	Электрические величины
t – время	t – время
q – обобщенная координата	$q_{зар}$ – электрический заряд
$\dot{q}$ – обобщенная скорость	$\dot{q}_{зар} = i$ – ток
m – масса, I – момент инерции	L – индуктивность, M – взаимная индуктивность
$T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2$ или $T = \frac{1}{2} I\dot{q}^2$ – кинетическая энергия	$T = \frac{1}{2} L\dot{q}^2_{зар}$ – электрокинетическая энергия
c – коэффициент упругости	$\frac{1}{C}$ – где C – емкость
β – коэффициент сопротивления	R – омическое сопротивление
Q – обобщенная сила	E – электродвижущая сила
$\delta A = Q\,\delta q$ – элементарная работа	$\delta A = E\,\delta q_{зар}$ – элементарная работа

Задача 10.47. На рисунке изображена схема электромагнитного механизма для регистрации крутильных колебаний*). Диск B эксцентрично насажен на вал O_1O_2, который концом O_1 крепится к торцу колеблющегося вала (вал на рисунке не изображен). Часть эксцентрика B входит в прорезь неподвижной катушки D.

Катушка D с индуктивностью L включена в электрическую цепь постоянного тока. Питание цепи осуществляется от источника тока с электродвижущей силой, равной E. Омическое сопротивление электрической цепи равно R. При крутильных колебаниях вала изменяется площадь эксцентрика B, заключенная в прорези катушки D. Это в свою очередь вызывает изменение индуктивности L катушки, т.е. $L = L(\varphi)$, где φ – угол поворота вала. При изменении индуктивности меняется величина тока i цепи, которая измеряется амперметром A. Амперметр градуирован в углах поворота φ вала и непосредственно определяет значения этих углов.

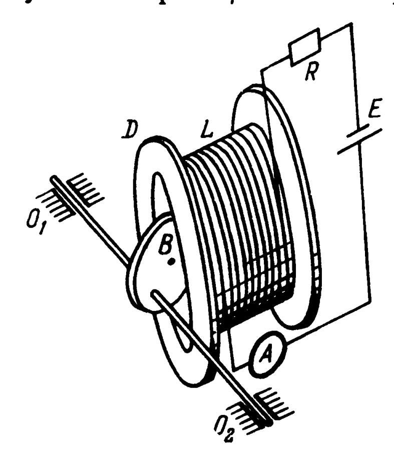
Момент инерции вала относительно его геометрической оси z равен I_z. Центр масс вала лежит на оси z. Момент сил упругости вала $m_{z\,упр} = -c\varphi$, где c – постоянный коэффициент упругости. Вал колеблется под действием возмущающего момента m.

Составить дифференциальные уравнения "движения" электромеханической системы, состоящей из вала и электромагнитного механизма.

*) Описание прибора взято из книги: Арутюнов В. О. Электрические измерительные приборы и измерения. – М.: Госэнергоиздат, 1958.

Массой и моментом инерции подвижных частей электромагнитного механизма и силами сопротивления вала пренебречь.

Р е ш е н и е. Электромеханическая система, состоящая из вала, совершающего крутильные колебания, и электромагнитного механизма, имеет две степени свободы. Выберем две обобщенные координаты. Одна из них – угол поворота φ вала – определяет положение точек механической части системы, т.е. $q_1 = \varphi$, а вторая обобщенная координата $q_2 = q_{зар}$ фиксирует состояние электрической цепи.



К задаче 10.47

Этим обобщенным координатам соответствуют два уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{зар}} - \frac{\partial T}{\partial q_{зар}} = Q_{q\,зар}. \quad (1)$$

К механической системе приложены следующие активные силы и моменты: сила тяжести вала, опорные реакции вала, возмущающий момент m_z, а также момент сил упругости вала $m_{z\,упр} = -c\varphi$.

Электродвижущая сила E источника тока уменьшена благодаря наличию омического сопротивления. На основании закона Ома потеря напряжения в цепи равна $e = iR$. Поэтому электродвижущая сила E^* электрической цепи равна

$$E^* = E - iR, \quad (2)$$

где $i = dq_{зар}/dt$ – ток цепи.

Переходим к вычислению обобщенных сил Q_φ и $Q_{q\,зар}$.

Для определения обобщенной силы Q_φ дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ валу, считая при этом электрический заряд $q_{зар}$ неизменным, т.е. $\delta\varphi \neq 0$, $\delta q_{зар} = 0$. При этом сумма работ активных сил и моментов равна

$$\sum \delta A_k = (m_z + m_{z\,упр})\,\delta\varphi. \quad (3)$$

(Моменты относительно оси z силы тяжести вала и опорных реакций равны нулю, ибо линии действия этих сил пересекают ось z). По условию, момент сил упругости вала равен $m_{z\,упр} = -c\varphi$, поэтому формула (3) примет вид

$$\sum \delta A_k = (m_z - c\varphi)\,\delta\varphi. \quad (4)$$

Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$ в выражении (4), т.е.

$$Q_\varphi = m_z - c\varphi. \tag{5}$$

При вычислении обобщенной силы $Q_{q\,зар}$ будем считать, что электрический заряд изменяется, а механическая часть системы остается неподвижной, т.е. $\delta q_{зар} \neq 0$, $\delta\varphi = 0$. Работа электродвижущей силы в электрической цепи равна

$$\delta A = E^* \delta q_{зар}. \tag{6}$$

Приняв во внимание формулу (2), запишем выражение (6) в виде

$$\delta A = (E - iR)\,\delta q_{зар}. \tag{7}$$

Обобщенной силой $Q_{q\,зар}$ является коэффициент, стоящий при $\delta q_{зар}$ в формуле (7), т.е.

$$Q_{q\,зар} = E - iR = E - \dot q_{зар} R. \tag{8}$$

Займемся вычислением кинетической энергии T данной электромеханической системы. Она равна сумме кинетической энергии T_1 механической части системы и электрокинетической энергии T_2 электрической цепи, т.е.

$$T = T_1 + T_2. \tag{9}$$

Вал совершает крутильные колебания вокруг оси z. Поэтому его кинетическая энергия равна

$$T_1 = \frac{1}{2} I_z \dot\varphi^2. \tag{10}$$

Электрокинетическая энергия равна

$$T_2 = \frac{1}{2} L(\varphi) \cdot \dot q^2_{зар}. \tag{11}$$

(Напоминаем, что индуктивность L катушки D зависит от угла поворота φ колеблющегося вала.)

Подставив значения (10) и (11) в формулу (9), имеем

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} L(\varphi) \cdot q^2_{зар}. \tag{12}$$

Для составления уравнений Лагранжа (1) вычислим частные производные кинетической энергии (12) по обобщенным скоростям $\dot\varphi$ и $\dot q_{зар}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = I_z \dot\varphi, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot q_{зар}} = L(\varphi)\, \dot q_{зар}. \tag{13}$$

Затем возьмем производные по времени функций (13):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=I_z\ddot\varphi,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_{\text{зар}}}=L(\varphi)\ddot q_{\text{зар}}+\frac{dL(\varphi)}{d\varphi}\dot\varphi\dot q_{\text{зар}}. \tag{14}$$

Далее вычислим частные производные кинетической энергии (12) по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=\frac{1}{2}\frac{dL(\varphi)}{d\varphi}\dot q^2_{\text{зар}},\qquad \frac{\partial T}{\partial q_{\text{зар}}}=0. \tag{15}$$

Подставив результаты (5), (8), (14) и (15) в уравнения Лагранжа (1), получим искомые дифференциальные уравнения "движения" электромеханической системы:

$$\begin{gathered} I_z\ddot\varphi-\frac{1}{2}\frac{dL(\varphi)}{d\varphi}\dot q^2_{\text{зар}}=m_z-c\varphi,\\ L(\varphi)\ddot q_{\text{зар}}+\left[\frac{dL(\varphi)}{d\varphi}\dot\varphi+R\right]\dot q_{\text{зар}}=E. \end{gathered} \tag{16}$$

Внеся в первое из уравнений (16) значение возмущающего момента m_z (в условии зависимость момента m_z от времени не задана) и проинтегрировав систему дифференциальных уравнений (16), мы получим уравнения движения:

$$\varphi=f_1(t),\quad q_{\text{зар}}=f_2(t).$$

Взяв производную $q_{\text{зар}}$ по времени, найдем зависимость тока i от времени t, т.е. $i=\dfrac{dq_{\text{зар}}}{dt}=\Phi(t)$. Затем, исключив из системы уравнений $\varphi=f_1(t)$, $i=\Phi(t)$ время t, мы определим зависимость тока i от угла поворота φ вала, т.е. $i=F(\varphi)$.

Значения тока i измеряются амперметром A, который градуирован в зависимости от φ. Таким образом, показания амперметра непосредственно фиксируют углы поворота φ колеблющегося вала.

Задача 10.48. Вал совершает крутильные колебания под действием возмущающего момента m_z, где z – геометрическая ось вала. Момент сил упругости вала относительно этой оси $m_{z\,\text{упр}}=-c\varphi$, где c – постоянный коэффициент упругости вала на кручение, а φ – угол поворота вала. Момент инерции вала относительно оси z равен I_z.

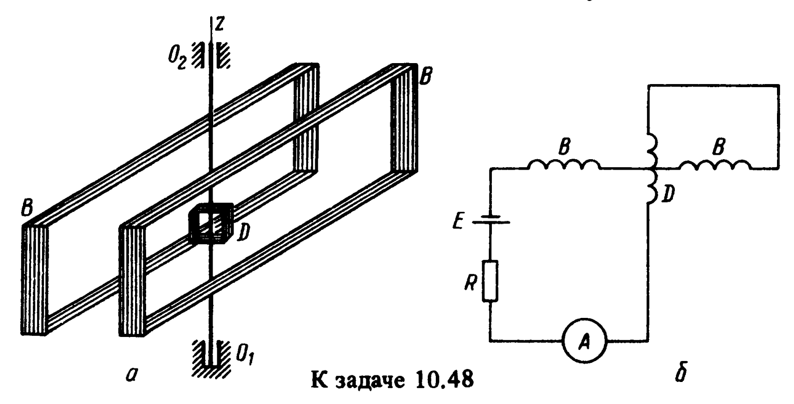
Для измерения крутильных колебаний вала применяется электродинамический датчик*) (рис. *а*). Датчик состоит из двух катушек: неподвиж-

*) Схема прибора взята из книги: Арутюнов В.О. Электрические измерительные приборы и измерения. – М.: Госэнергоиздат, 1958.

ной B и подвижной D, насаженной на ось O_1O_2. Ось датчика крепится к торцу вала, совершающего крутильные колебания (вид на рисунке не изображен). Неподвижная катушка B конструктивно выполнена в виде двух половин, между которыми проходит ось O_1O_2 подвижной катушки D.

Обе катушки последовательно соединены и питаются от одного источника постоянного тока с электродвижущей силой E (электрическая схема изображена на рис. *б*).

При колебаниях вала и, следовательно, оси O_1O_2 датчика катушка D поворачивается по отношению к неподвижной катушке B. Это вызывает



К задаче 10.48

изменение взаимной индуктивности M катушек, которая зависит от угла поворота φ вала: $M = M(\varphi)$. С изменением взаимной индуктивности меняется ток в электрической цепи, измеряемый амперметром A. Амперметр, градуированный в единицах угла поворота, непосредственно измеряет крутильные колебания вала.

Индуктивности катушек B и D постоянны и соответственно равны L_B и L_D. Омическое сопротивление электрической цепи постоянно и равно R. Силой тяжести и моментом инерции подвижных частей датчика пренебречь.

Составить дифференциальные уравнения "движения" электромеханической системы, состоящей из колеблющегося вала и электродинамического датчика.

Р е ш е н и е. Данная электромеханическая система имеет две степени свободы, ибо надо задать один параметр для определения положения точек механической системы и второй – для электрической цепи. В качестве обобщенных координат выберем угол поворота вала $q_1 = \varphi$ и электрический заряд $q_2 = q_{\text{зар}}$.

Запишем соответствующие уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\text{зар}}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\text{зар}}} = Q_{q_{\text{зар}}}. \qquad (1)$$

К механической системе приложены активные силы и моменты: сила тяжести вала, опорные реакции вала, возмущающий момент m_z и момент силы упругости вала $m_{z\,\text{упр}} = -c\varphi$.

Электродвижущая сила E источника тока электрической цепи уменьшена за счет омического сопротивления на величину $u = iR$ (по закону Ома) и, следовательно, равна

$$E_1 = E - iR, \tag{2}$$

где ток $i = dq_{\text{зар}}/dt$.

Для вычисления обобщенной силы Q_φ дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ валу, а изменение электрического заряда будем считать равным нулю. Сумма работ активных сил и моментов на обобщенном возможном перемещении равна

$$\Sigma\,\delta A_k = (m_z + m_{z\,\text{упр}})\,\delta\varphi. \tag{3}$$

(Моменты силы тяжести вала и опорных реакций вала относительно оси z равны нулю.) Подставив в формулу (3) значение момента силы упругости $m_{z\,\text{упр}} = -c\varphi$, получим

$$\Sigma\,\delta A_k = (m_z - c\varphi)\,\delta\varphi. \tag{4}$$

Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$ в выражении (4):

$$Q_\varphi = m_z - c\varphi. \tag{5}$$

Для определения обобщенной силы $Q_{q_{\text{зар}}}$ будем считать $\delta q_{\text{зар}} \neq 0$, а $\delta\varphi = 0$. При этом работа электродвижущей силы E_1 в электрической цепи равна

$$\delta A = E_1\,\delta q_{\text{зар}}. \tag{6}$$

Использовав формулу (2), запишем работу (6) в виде

$$\delta A = (E - iR)\,\delta q_{\text{зар}}. \tag{7}$$

Обобщенной силой $Q_{q_{\text{зар}}}$ является коэффициент, стоящий при $\delta q_{\text{зар}}$ в выражении (7):

$$Q_{q_{\text{зар}}} = E - iR. \tag{8}$$

Перейдем к вычислению кинетической энергии данной электромеханической системы:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \tag{9}$$

где $T^{(1)}$ – кинетическая энергия механической части системы, а $T^{(2)}$ – электрокинетическая энергия электрической цепи.

Кинетическая энергия вала, совершающего крутильные колебания вокруг оси z, равна

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_z\dot{\varphi}^2. \tag{10}$$

Электрокинетическая энергия имеет вид

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}[L_B + L_D + M(\varphi)]\, i^2, \tag{11}$$

где L_B и L_D — постоянные индуктивности катушек B и D, а $M = M(\varphi)$ — взаимная переменная индуктивность этих катушек.

Подставив результаты (10) и (11) в выражение (9), запишем кинетическую энергию электромеханической системы:

$$T = \frac{1}{2} I_z\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}[L_B + L_D + M(\varphi)]\, i^2. \tag{12}$$

Для составления уравнений Лагранжа (1) вычислим частные производные кинетической энергии (12) по обобщенным скоростям $\dot{\varphi}$ и i (напомним, что ток $i = dq_{\text{зар}}/dt$):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial i} = [L_B + L_D + M(\varphi)]\, i. \tag{13}$$

Затем возьмем производные функций (13) по времени:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z\ddot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial i} = [L_B + L_D + M(\varphi)]\frac{di}{dt} + \frac{dM(\varphi)}{d\varphi}\dot{\varphi} i. \tag{14}$$

Далее вычислим частные производные кинетической энергии (12) по обобщенным координатам φ и $q_{\text{зар}}$.

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\frac{dM}{d\varphi} i^2, \quad \frac{\partial T}{\partial q_{\text{зар}}} = 0. \tag{15}$$

Использовав результаты (5), (8), (14) и (15) в формулах (1), получим искомые уравнения Лагранжа

$$\begin{gathered} I_z\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\frac{dM}{d\varphi} i^2 + c\varphi = m_z, \\ [L_B + L_D + M(\varphi)]\,\ddot{q}_{\text{зар}} + \left(\frac{dM}{d\varphi}\dot{\varphi} + R\right)\dot{q}_{\text{зар}} = E. \end{gathered} \tag{16}$$

Дифференциальные уравнения (16) описывают "движение" данной электромеханической системы. Заметим, что в каждое из этих уравнений входят как механические, так и электрические параметры системы.

Зная зависимость возмущающего момента m_z от времени, можно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (16) и получить уравнения "движения"

$$\varphi = f_1(t) \quad \text{и} \quad i = \frac{dq_{\text{зар}}}{dt} = f_2(t).$$

Исключив из этих уравнений время, определим зависимость тока от угла поворота вала: $i = F(\varphi)$.

Значения тока измеряются амперметром A, который градуирован в единицах угла поворота φ и, значит, непосредственно фиксирует углы поворота вала, совершающего крутильные колебания.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 48.52–48.58.

§ 7. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПОВ

1. Гироскоп с тремя степенями свободы. *Гироскопом* называется симметричное твердое тело, угловая скорость $\vec{\omega}$ вращения которого вокруг оси симметрии значительно превосходит по модулю угловую скорость $\vec{\omega}_1$ вращения самой оси симметрии:

$$\omega \gg \omega_1.$$

Так, в современных гироскопических приборах угловая скорость $\vec{\omega}$ собственного вращения достигает иногда 40 000–50 000 об/мин, а угловая скорость $\vec{\omega}_1$ вращения оси гироскопа равна одному обороту за 2–3 мин и даже за 20 мин (для гирокомпасов). Рассмотрим сначала случай, когда гироскоп движется около неподвижной точки. Если выбрать начало координат в этой точке O и направить ось z по оси симметрии гироскопа, то оси x, y, z оказываются главными осями инерции гироскопа в неподвижной точке (рис. 10.21). Момент инерции I_z является полярным моментом инерции гироскопа, а I_x и I_y – экваториальными моментами инерции. В связи с наличием в твердом теле оси симметрии имеем $I_x = I_y$.

Пусть гироскоп вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси симметрии, которая в свою очередь вращается вокруг неподвижной точки с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ (рис. 10.22). В соответствии с теоремой о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей, абсолютная угловая скорость $\vec{\omega}_a$ равна векторной сумме угловых скоростей переносного и относительного вращений:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}.$$

Предположим для простоты, что $\vec{\omega}_1 \perp \vec{\omega}$. Направим ось z вдоль $\vec{\omega}$, а ось x – вдоль $\vec{\omega}_1$ (рис. 10.22). Разложим главный момент количеств движения L_O гироскопа на две составляющие L_z и L_x. Модули этих составляющих равны: $L_z = I_z \omega$, $L_x = I_x \omega_1$. Угол θ между главным моментом количеств движения L_O и осью z симметрии гироскопа определится равенством $\operatorname{tg} \theta = I_x \omega_1 / (I_z \omega)$.

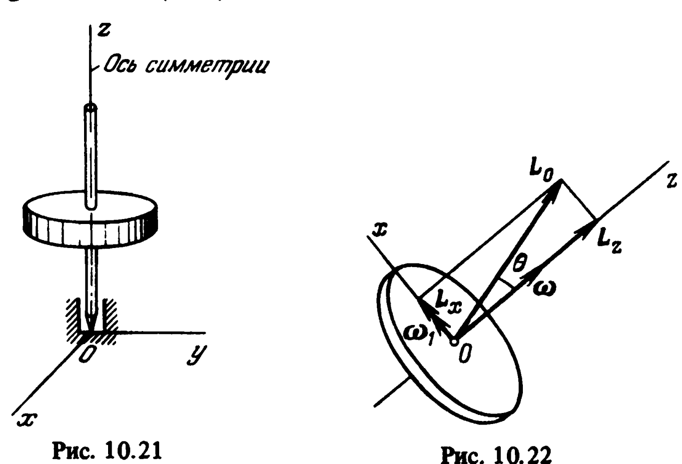


Рис. 10.21 Рис. 10.22

Так как $\omega_1 \ll \omega$, то угол θ очень мал, в современных приборах он составляет доли секунды, и с достаточной для практики точностью можно считать, что вектор L_O совпадает с осью гироскопа, т.е.

$$L_O = L_z = I_z \vec{\omega}.$$

На этом допущении основана приближенная (элементарная) теория гироскопов.

При решении задач с помощью приближенной теории гироскопа удобно пользоваться теоремой об изменении главного момента количеств движения материальной системы в ее кинематической интерпретации – *теоремой Резаля* (рис. 10.23): скорость u*) конца главного момента количеств движения материальной системы L_O, определенного относительно неподвижной точки, векторно равна главному моменту внешних сил системы m_O^e относительно той же точки:

$$u = m_O^e$$

(скорость u конца L_O направлена по касательной к годографу L_O в соответствующей точке).

---

*) Вектор u называется скоростью условно, так как размерности скорости не имеет.

Эта теорема была впервые сформулирована французским ученым в области механики Анри Эме Резалем (1828–1896) в "Трактате чистой кинематики" (1862).

Основное свойство гироскопа с тремя степенями свободы в случае, когда главный момент m_O^e внешних сил относительно неподвижной точки

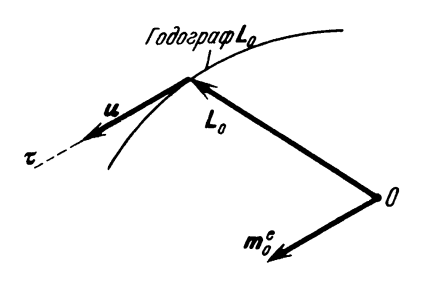


Рис. 10.23

равен нулю, заключается в сохранении неизменного направления оси гироскопа по отношению к инерциальным осям (см. задачу 10.49).

Если же на гироскоп действуют внешние силы, главный момент которых относительно неподвижной точки O равен m_O^e, то ось гироскопа перемещается (прецессирует) в пространстве. Угловая скорость прецессии $\vec{\omega}_1$ определяется с помощью теоремы Резаля по формуле

$$\omega_1 = \frac{m_O^e}{I_z \omega \sin \alpha}, \qquad (1^*)$$

где α – угол между осью гироскопа и вектором угловой скорости $\vec{\omega}_1$ прецессии.

Равенство (1*) в совокупности с теоремой Резаля определяет закон прецессии оси гироскопа.

Указание. Задачи на определение движения оси гироскопа с помощью приближенной теории рекомендуется решать в такой последовательности:

1) проверить, имеет ли гироскоп или гироскопическая система три степени свободы;

2) выбрать систему координат;

3) изобразить на рисунке внешние силы, приложенные к гироскопу;

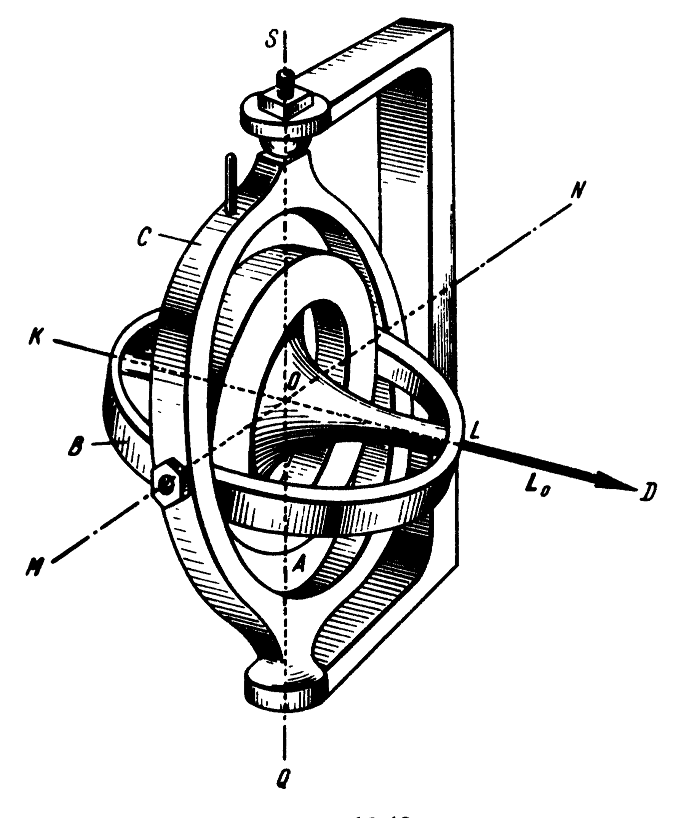
4) определить главный момент внешних сил m_O^e относительно неподвижной точки;

5) найти главный момент количеств движения гироскопа относительно неподвижной точки L_O;

6) применив теорему Резаля $u = m_O^e$, определить движение оси гироскопа.

Задача 10.49. На рисунке изображен гироскоп в кардановом подвесе. Гироскоп A выполнен в виде уравновешенного массивного круглого цилиндра, вращающегося вокруг оси KL. Ось KL укреплена во внутреннем кольце B, вращающемся вокруг подвижной оси MN. Ось MN в свою очередь имеет опоры во внешнем кольце C, вращающемся вокруг неподвижной оси SQ. Ось SQ закреплена в стойке прибора. Оси KL, MN и SQ пересекаются в центре масс O гироскопа. Гироскопу A сообщена большая угловая скорость вокруг оси KL.

Определить изменение положения оси KL, пренебрегая трением в опорах осей KL, MN и SQ и массами колец B и C.



К задаче 10.49

Р е ш е н и е. Гироскоп A в кардановом подвесе имеет три степени свободы, так как его положение определяется тремя независимыми углами поворота вокруг осей KL, MN и SQ, пересекающихся в центре масс O. Таким образом, гироскоп вращается вокруг неподвижной точки O, совмещенной с центром масс. При этих условиях главный момент внешних

сил относительно центра масс O гироскопа равен нулю:

$$m_O^e = 0. \qquad (1)$$

Главный момент количеств движения гироскопа L_O приближенно направлен вдоль оси KL. Конец вектора L_O обозначим D.

Применив теорему Резаля $u = m_O^e$, в соответствии с формулой (1), находим $u = 0$, т.е. скорость точки D равна нулю. Значит, при вращении гироскопа ось KL сохраняет неизменное направление в пространстве. Этим свойством можно пользоваться для доказательства вращения Земли (опыт Фуко). Действительно, наблюдатель, находящийся на Земле, меняет свою ориентировку по отношению к звездам за счет вращения Земли. При этом ему кажется, что меняется направление оси KL, которая неизменно направлена на отдаленную звезду.

Задача 10.50. Использовать условие и решение предыдущей задачи. Дополнительно считать, что к внутреннему кольцу B (см. рис. к задаче 10.49) слева от внешнего кольца C в точке, лежащей на оси KL, приложена вертикальная сила F, направленная сверху вниз.

Определить происходящее при этом изменение положения оси KL гироскопа.

Решение. В предыдущей задаче главный момент внешних сил относительно точки O был равен нулю. Теперь при наличии добавочной силы F главный момент m_O^e равен моменту силы F относительно точки O, т.е. $m_O^e = m_O(F)$.

Напомним, что момент силы относительно точки направлен перпендикулярно плоскости, содержащей силу и точку (в данном случае перпендикулярно вертикальной плоскости, проходящей через ось KL) так, что с конца его к началу (в данном случае от N к M) видно, будто сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки. Итак момент $m_O(F) = m_O^e$ направлен вдоль оси NM от N к M.

Применив теорему Резаля $u = m_O^e$, выясним, что скорость u точки D конца вектора L_O направлена параллельно оси NM от N к M. При этом ось гироскопа KL вместе с внешним кольцом C начнет поворачиваться вокруг вертикальной оси SQ так, что сверху вниз этот поворот будет виден против хода часовой стрелки.

В данном случае гироскопический эффект проявился в том, что положение внутреннего кольца B, несмотря на действие на него силы F, остается неизменным, но зато начинает поворачиваться внешнее кольцо C. При этом ось KL гироскопа движется в горизонтальной плоскости.

Задача 10.51. Использовать условие и решение задачи 10.49. Дополнительно предположить, что к внешнему кольцу C (см. рис. к задаче 10.49) в точке, совмещенной с изображением гайки, расположенной на оси MN, приложена горизонтальная сила F, направленная слева направо.

Определить происходящее при этом изменение положения оси KL гироскопа.

Решение. В задаче 10.49 главный момент внешних сил относительно точки O был равен нулю. Теперь при наличии добавочной силы F главный момент m_O^e равен моменту силы F относительно точки O, т.е. $m_O^e = m_O(F)$.

Момент силы F относительно точки подвеса O направлен перпендикулярно горизонтальной плоскости, содержащей силу F и точку O, т.е. плоскости осей KL и NM, по вертикали вверх. Действительно, сверху (т.е. от S к Q) видно, что сила F стремится повернуть внешнее кольцо против хода часовой стрелки.

Применив теорему Резаля $u = m_O^e$, выясним, что скорость u конца D вектора L_O параллельна найденному моменту, т.е. также направлена по вертикали вверх. При наличии этой скорости точки D, лежащей на оси KL гироскопа, эта ось вместе с внутренним кольцом B начнет поворачиваться вокруг горизонтальной оси NM так, что от M к N этот поворот виден против ходя часовой стрелки.

В данном случае гироскопический эффект проявляется в том, что положение внешнего кольца C, несмотря на действие на него силы F, остается неизменным, но зато начинает поворачиваться внутреннее кольцо B. При этом ось KL гироскопа движется в вертикальной плоскости.

Это свойство гироскопа в кардановом подвесе было использовано в приборе Обри, предназначенном для сохранения неизменного курса торпеды в заданной вертикальной плоскости. Как было выше указано, положение внешнего кольца C остается фиксированным в пространстве. При изменении намеченного курса торпеды ее корпус поворачивается относительно внешнего кольца. При этом стержень, установленный на внешнем кольце (см. рис. к задаче 10.49), приходит в соприкосновение с регулирующим устройством, укрепленным на внутренней поверхности корпуса торпеды. Это устройство связано с рулевым управлением, которое выправляет курс движущейся торпеды.

Задача 10.52. Ротор гироскопа *1* вращается вокруг подвижной оси y (рис. *а*) с постоянной относительной угловой скоростью $\vec{\omega}_r$. Ось y вместе с рамкой *2* и гироскопом *1* вращается вокруг неподвижной оси z с постоянной переносной угловой скоростью $\vec{\omega}_e$. Ось y является осью симметрии гироскопа *1*.

Определить, к чему приводятся силы инерции гироскопа.

Решение. Центр O гироскопа, где пересекаются оси x, y, z, является неподвижной точкой. Следовательно, гироскоп совершает сферическое движение, которое является равномерной прецессией гироскопа.

Главный вектор сил инерции равен нулю, так как центр масс O гироскопа неподвижен и, следовательно, его ускорение равно нулю. Таким

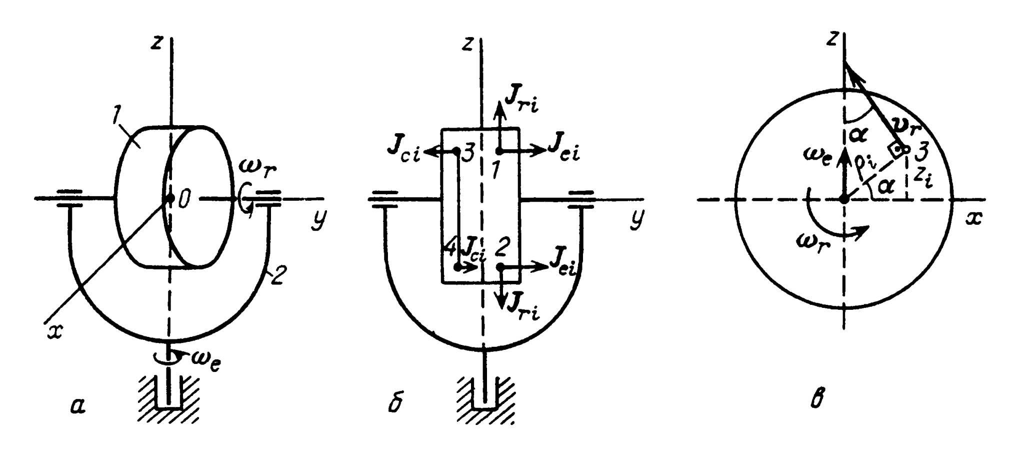
образом, силы инерции приводятся к главному моменту. На рис. *б* и *в* показан вид на конструкцию с конца осей x и y. Рассмотрим четыре симметричные точечные массы: m_1, m_2, m_3, m_4 (рис. *б*). Массы всех четырех точек равны. Сила инерции каждой массы равна

$$J_i = -m_i a_i. \tag{1}$$

Абсолютное ускорение a_i, согласно теореме Кориолиса, представим в виде

$$a_i = a_{ei}^n + a_{ri}^n + a_{ci}. \tag{2}$$

В (2) входят только нормальные составляющие переносного и относительного ускорений, так как, согласно условию, и переносное, и



К задаче 10.52

относительное вращение вокруг осей происходят с постоянными по модулю угловыми скоростями. Следовательно,

$$\begin{aligned} a_{ei}^n &= \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times r_i, \quad a_{ci} = 2\vec{\omega}_e \times \mathrm{v}_{ri}, \\ a_{ri}^n &= \vec{\omega}_r \times \vec{\omega}_r \times r_i, \quad \mathrm{v}_{ri} = \vec{\omega}_r \times r_i. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя (2) в (1), имеем

$$J_i = -m_i a_{ri} - m_i a_{ei} - m_i a_{ci}. \tag{4}$$

Здесь $J_{ri} = -m_i a_{ri}$ – относительная центробежная сила инерции, направленная параллельно оси z; $J_{ei} = -m_i a_{ei}$ – переносная центробежная сила инерции, направленная параллельно оси y; $J_{ci} = -m_i a_{ci}$ – сила инерции Кориолиса, направленная параллельно оси y. Уравнение (4) можно теперь записать в виде

$$J_i = J_{ri} + J_{ei} + J_{ci}. \tag{5}$$

Найдем сумму моментов всех сил инерции относительно центра масс O:

$$\sum_{i=1}^{n} m_O(J_{ri}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_O(J_{ei}) = 0. \tag{6}$$

Поясняя эти формулы (6), обратимся к рис. *б* и рассмотрим точки *1* и *2*. Силы инерции в относительном движении J_{r1} и J_{r2} равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Их равнодействующая равна нулю. Силы инерции в переносном движении J_{e1} и J_{e2} образуют относительно центра масс O равные по модулю моменты с противоположными знаками. Следовательно, сумма этих двух моментов равна нулю. Таким образом, оба уравнения (6) тождественно верны.

Итак, единственной причиной существования главного момента сил инерции относительно центра масс O являются силы инерции Кориолиса. Эти силы, приложенные к симметричным точкам *3* и *4* (рис. *б*), образуют пару сил. (На рис. *б*, чтобы сделать его ясным, к точкам *1* и *2* приложены только переносные и относительные силы инерции, к точкам *3* и *4* – только кориолисовы силы инерции.) Вектор момента этой пары сил направлен по оси x.

Перейдем к вычислению главного момента сил инерции

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} J_{ci} z_i, \tag{7}$$

где (рис. *в*)

$$J_{ci} = m_i a_{ci} = m_i 2\omega_e v_r \sin\alpha. \tag{8}$$

Так как

$$v_r = \omega_r \rho_i, \quad \sin\alpha = \frac{z_i}{\rho_i} \tag{9}$$

(ρ_i – расстояние от точки до оси y), то из (7) и (8) получим

$$M_x = 2\sum_{i=1}^{n} m_i \omega_e \omega_r \rho_i \frac{z_i}{\rho_i} z_i = 2\omega_e\omega_r \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2. \tag{10}$$

Воспользуемся далее свойством симметрии ротора относительно оси y: моменты инерции гироскопа относительно осей x и z равны:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2). \tag{11}$$

Из этого равенства следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2. \tag{12}$$

Учитывая это равенство, представляем (10) в виде

$$M_x = \omega_e \omega_r \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2) = \omega_e \omega_r B, \tag{13}$$

где B — момент инерции гироскопа относительно оси y.

Этим равенством определяется главный момент сил инерции (гироскопический момент).

Кинетический момент собственного вращения ротора равен

$$K_O = B\vec{\omega}_r. \tag{14}$$

Тогда формула (13) примет вид

$$M_x = K_O \times \vec{\omega}_e. \tag{15}$$

Формула (15) определяет гироскопический момент по модулю и по направлению.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 40.1, 40.2.

2. Гироскопический момент. При изменении направления оси симметрии гироскопа возникает гироскопический момент, создающий гироскопические (динамические) давления на опоры. Гироскопический момент определяется равенством

$$m_0^{\text{гир}} = I_z \vec{\omega} \times \vec{\omega}_1, \tag{2*}$$

где I_z — момент инерции гироскопа относительно его оси симметрии, $\vec{\omega}$ — угловая скорость собственного вращения, $\vec{\omega}_1$ — угловая скорость прецессии оси гироскопа. По модулю гироскопический момент равен

$$m_O^{\text{гир}} = I_z \omega \omega_1 \sin\alpha, \tag{3*}$$

где α — угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}_1$.

Гироскопический момент $m_O^{\text{гир}}$ стремится совместить ось гироскопа (вектор $\vec{\omega}$) с осью прецессии (вектор $\vec{\omega}_1$) посредством поворота $\vec{\omega}$ к $\vec{\omega}_1$ (рис. 10.24).

Если расстояние между опорами равно h, то модули гироскопических давлений $N^{\text{гир}}$ на опоры можно определить по формуле

$$N^{\text{гир}} = \frac{m_O^{\text{гир}}}{h} = \frac{I_z \omega \omega_1 \sin\alpha}{h}. \tag{4*}$$

Главный момент внешних сил m_O^e относительно неподвижной точки O определяется формулой

$$m_O^e = -m_O^{\text{гир}} = \vec{\omega}_1 \times I_z \vec{\omega}. \tag{5*}$$

Модули главного момента внешних сил и гироскопического момента равны. Они вычисляются по формуле (3*).

Главный момент внешних сил m_O^e создает гироскопические (динамические) реакции опор $R^{\text{гир}}$, причем

$$R^{\text{гир}} = -N^{\text{гир}}, \qquad (6^*)$$

поэтому по модулю

$$R^{\text{гир}} = \frac{I_z\,\omega\omega_1 \sin\alpha}{h}. \qquad (7^*)$$

Указание. Задачи на определение гироскопических давлений (гироскопических реакций опор) рекомендуется решать в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке вектор угловой скорости ω собственного вращения гироскопа и главный момент количеств движения $L_O = I_z\vec{\omega}$;

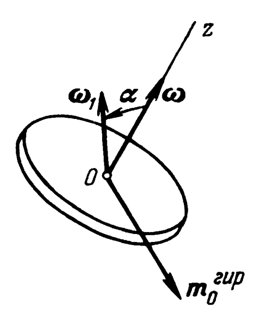


Рис. 10.24

2) определить и изобразить на рисунке вектор угловой скорости $\vec{\omega}_1$ прецессии оси гироскопа;

3) найти гироскопический момент $m_O^{\text{гир}}$ (главный момент внешних сил m_O^e) по формуле (2^*) (по формуле (5^*));

4) определить направления и модули гироскопических давлений на опоры (гироскопических реакций опор) по формуле (4^*) (по формуле (7^*)).

Задача 10.53. Ротор электродвигателя корабельной компрессорной установки имеет горизонтальную ось вращения AB. Ось AB расположена перпендикулярно продольной оси корабля O_1O_2. Оси AB и O_1O_2 пересекаются в центре масс O ротора. Момент инерции ротора относительно оси AB равен I, $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения ротора.

Определить наибольшее значение динамических давлений на опоры A и B при установившейся бортовой качке корабля, происходящей вокруг оси O_1O_2 по гармоническому закону $\varphi_1 = \varphi_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$ с угловой амплитудой φ_0. Расстояние между опорами $AB = h$.

Решение. При бортовой качке корабля ось AB ротора двигателя изменяет свое направление. Следовательно, имеют место гироскопические

явления. Ротор двигателя является гироскопом с осью симметрии AB. Изобразим вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ вдоль оси AB и главный момент количеств движения $L_O = I\vec{\omega}$.

При бортовой качке, происходящей в данный момент в направлении, указанном на рисунке дуговой стрелкой, вектор угловой скорости $\vec{\omega}_1$ направлен вдоль оси O_1O_2 от O_1 к O_2.

Для определения угловой скорости ω_1 бортовой качки корабля вокруг оси O_1O_2 воспользуемся соответствующим уравнением движения $\varphi_1 = \varphi_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$. Тогда

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{2\pi\varphi_0}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t \quad \text{и} \quad \omega_{1\,max} = \frac{2\pi\varphi_0}{T}. \qquad (1)$$

Угловая скорость $\vec{\omega}_1$ бортовой качки корабля одновременно является угловой скоростью прецессии оси AB ротора – гироскопа. Поэтому возникает гироскопический момент $m_O^{гир}$, для определения направления которого воспользуемся формулой (2*):

$$m_O^{гир} = I\vec{\omega} \times \vec{\omega}_1.$$

Напомним, что векторное произведение ($m_O^{гир}$) направлено перпендикулярно плоскости векторов сомножителей ($I\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}_1$) так, что с конца его ($m_O^{гир}$) к началу поворот первого вектора ($I\vec{\omega}$) ко второму ($\vec{\omega}_1$) виден против часовой стрелки на угол, меньший π. В данном случае гироскопический момент $m_O^{гир}$ направлен по вертикали вниз.

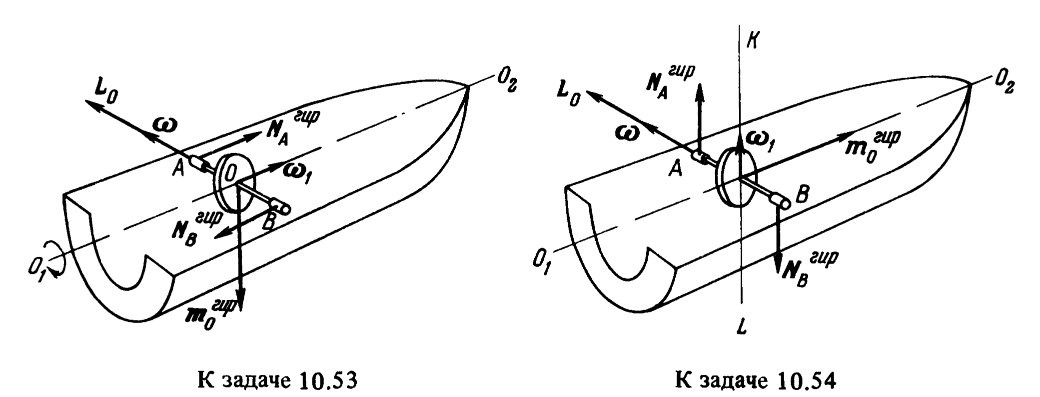
Гироскопический момент создает гироскопические силы давления $N_A^{гир}$ и $N_B^{гир}$ на опоры A и B. Эти силы лежат в плоскости, перпендикулярной к $m_O^{гир}$, и направлены так, что с конца $m_O^{гир}$ к началу вращение пары этих сил видно против часовой стрелки (рис.). Так как через половину периода поворот корабля будет происходить в противоположном направлении, то гироскопические силы $N_A^{гир}$ и $N_B^{гир}$ получат противоположные направления. Таким образом, при бортовой качке корабля, за счет изменения направления оси AB ротора двигателя, появляются гироскопические (динамические) силы давления на опоры, переменные по модулю и направлению. Наибольшие значения модулей этих сил, соответствующие горизонтальному положению оси AB, можно вычислить по формуле (4*). Приняв во внимание выражение (1) и взаимную перпендикулярность векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}_1$, при которой $\alpha = \pi/2$, получим

$$N_A^{гир} = N_B^{гир} = \frac{I\omega\omega_1}{h} = \frac{2\pi\varphi_0 I\omega}{Th}.$$

В моменты перемены направления вращения корабля вокруг оси O_1O_2, т.е. при $\omega_1 = 0$, эти силы обращаются в нуль.

Задача 10.54. Определить гироскопические силы давления на опоры A и B оси ротора электродвигателя, рассмотренного в задаче 10.53, если при отсутствии бортовой качки корабль совершает циркуляцию вокруг вертикальной оси KL с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$.

Решение. Изобразим векторы $\vec{\omega}$ и $L_O = I\vec{\omega}$, так, как это было сделано в предыдущей задаче, т.е. вдоль оси AB от B к A.



К задаче 10.53 К задаче 10.54

Угловая скорость $\vec{\omega}_1$ циркуляции корабля является угловой скоростью прецессии оси AB ротора – гироскопа. При этом прецессионном движении возникает гироскопический момент

$$m_O^{гир} = I\vec{\omega} \times \vec{\omega}_1. \tag{1}$$

В данном случае гироскопический момент $m_O^{гир}$ направлен вдоль оси O_1O_2 от O_1 к O_2. Этот момент создает гироскопические силы давления $N_A^{гир}$, $N_B^{гир}$ на опоры A и B. Силы $N_A^{гир}$ и $N_B^{гир}$ лежат в вертикальной плоскости и образуют пару сил. С конца вектора $m_O^{гир}$ пара сил видна направленной против хода часовой стрелки (рис.), значит, $m_O^{гир} = N^{гир}h$, откуда

$$N_A^{гир} = N_B^{гир} = \frac{m_O^{гир}}{h}. \tag{2}$$

При взаимной перпендикулярности векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}_1$ модуль векторного произведения (1) равен $m_O^{гир} = I\omega\omega_1$. Внеся это значение в формулу (2), получим $N_A^{гир} = N_B^{гир} = I\omega\omega_1/h$. Этот результат можно было непосредственно получить из формулы (4*) при $\alpha = \pi/2$.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 40.3, 40.4, 40.7–40.11.

Глава 11

КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

§ 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При решении задач динамики часто возникают затруднения, связанные с выбором соответствующих теорем и уравнений. Эти затруднения можно успешно преодолеть лишь при наличии достаточных навыков в решении задач динамики. Для приобретения подобных навыков мало практики в решении задач, нужно еще продумать и сопоставить различные методы и приемы. Для облегчения этого сопоставления ниже сделана попытка систематизации методов решения задач динамики.

Задачи динамики можно разбить на три группы: задачи динамики материальной точки, задачи динамики материальной системы, задачи динамики твердого тела.

Задачи всех трех групп делятся на *первые* (определение сил по заданному движению) и *вторые* (определение движения по заданным силам). При сравнительной простоте первых задач решение вторых задач подчас связано с большими трудностями.

§ 2. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Наиболее общим приемом решения задач динамики материальной точки является применение *дифференциальных уравнений движения* точки в проекциях на орты различных систем координат.

Чаще других применяются дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси декартовых координат.

При сложном движении материальной точки пользуются уравнениями динамики относительного движения (либо переносного движения) в проекциях на орты различных систем координат.

При движении несвободной материальной точки по заданной кривой часто удобно пользоваться дифференциальными уравнениями в проекциях на оси натурального триэдра.

При движении несвободной материальной точки по заданной поверхности целесообразно применять дифференциальные уравнения движения в проекциях на орты цилиндрических, сферических или иных криволинейных координат.

Если равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, расположена при движении точки в одной плоскости с ее начальной скоростью, то движение точки происходит в этой плоскости. При этом можно ограничиться применением двух дифференциальных уравнений движения в проекциях на две оси декартовых координат или на оси полярных координат, расположенных в этой плоскости, или на иные оси.

Для определения траектории материальной точки, движущейся под действием центральной силы, удобно пользоваться формулой Бине, предварительно введя полярные координаты (см. стр. 14).

Если равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, расположена при движении точки на одной оси с ее начальной скоростью, то движение точки происходит прямолинейно вдоль этой оси. При этом следует ограничиться применением одного дифференциального уравнения движения в проекции на эту ось.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки поддаются сравнительно просто интегрированию в задачах, где равнодействующая сил, приложенных к точке, постоянна либо зависит *только* от: 1) времени, 2) положения точки, 3) скорости точки, 4) ускорения точки. Труднее решать вторые задачи, если равнодействующая сила одновременно зависит от времени, положения, скорости и ускорения материальной точки. В этих случаях легко решаются задачи, которые приводятся к линейным дифференциальным уравнениям.

Иногда, используя общие теоремы динамики, можно сразу получить первые интегралы дифференциальных уравнений движения и тем самым упростить решение задачи.

Теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме применяют в задачах, где силы постоянны либо являются известными функциями времени (при этом возможно вычисление интеграла, определяющего импульс силы), а в число данных и неизвестных величин входят: масса (вес) материальной точки, силы, приложенные к точке, промежуток времени действия сил, скорости материальной точки в начале и в конце этого промежутка времени.

Теорему об изменении момента количества движения материальной точки преимущественно применяют при движении точки под действием центральной силы, когда в число данных и искомых величин входят: масса (вес) точки, положения точки в некоторые фиксированные моменты времени, скорости точки в эти моменты времени.

Теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме применяют в задачах, где силы, приложенные к точке, постоянны либо зависят от положения точки (при этом возможно вычисление интеграла, определяющего работу силы), а в число данных и неизвестных величин входят: масса точки, силы, приложенные к точке, перемещение точки и ее скорости в начале и в конце этого перемещения.

Подчеркнем, что эту теорему удобно использовать и тогда, когда на систему действуют постоянные силы трения.

Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах применяют для решения задач динамики материальной точки с тремя степенями свободы в тех случаях, когда непосредственное составление дифференциальных уравнений движения затруднительно, например при применении сферических координат.

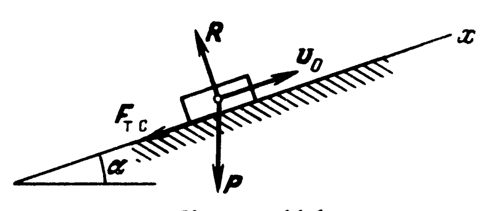
Приведем для пояснения некоторые примеры.

Задача 11.1. На рисунке изображен груз массой M, который движется вверх по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. В начальный момент грузу сообщили скорость v_0 параллельно наклонной плоскости вверх. Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f.

Определить путь s, пройденный грузом до остановки, и соответствующий промежуток времени τ.

Р е ш е н и е. Для определения пути s можно применить теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме: $\frac{1}{2}Mv_2^2 - \frac{1}{2}Mv_1^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} A(F_k)$, ибо $v_1 = v_0$, $v_2 = 0$, $\Sigma A(F_k) = -\int\limits_0^s (Mg\sin\alpha + F_{\text{тр}})dx$. Так как $F_{\text{т.с}} = fMg\cos\alpha$, то $\Sigma A(F_k) = -Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)s$.

Мы смогли использовать эту теорему для определения s потому, что силы, приложенные к грузу, не зависят от его скорости либо ускорения, а



К задаче 11.1

также от времени. Если бы, по условию, надо было учесть силу сопротивления движению, зависящую от скорости груза, например $F_x = -\beta\dot{x}^2$, то невозможно было бы вычислить работу этой силы $A(F) = -\int\limits_0^s \beta\dot{x}^2dx = -\beta\int\limits_0^s \dot{x}^2dx$, так как неизвестна зависимость $\dot{x}$ от x.

Для определения времени движения τ можно использовать теорему об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось x:

$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k)$, ибо $\dot{x}_1 = v_0$, $\dot{x}_2 = 0$, $\Sigma S_x(F_k) = -\int_0^\tau (Mg\sin\alpha + F_{\text{т.с}})\,dt$. Так как $F_{\text{т.с}} = fMg\cos\alpha$, то $\Sigma S_x(F_k) = -Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)\tau$.

Мы смогли применить эту теорему для определения τ потому, что силы, приложенные к грузу, не зависели от его положения, скорости и ускорения. Действительно, при учете силы сопротивления движению, зависящей от скорости, например $F_x = -\beta\dot{x}^2$, нельзя было бы вычислить проекцию импульса

$$S_x(F) = -\int_0^\tau \beta\dot{x}^2\,dt = -\beta\int_0^\tau \dot{x}^2\,dt,$$

так как неизвестна зависимость $\dot{x}$ от t.

Теперь применим для решения этой задачи дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x: $M\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$.

Проинтегрировав соответствующее дифференциальное уравнение, мы можем найти как s, так и τ, независимо от того, действует на груз сила трения $F_{\text{т.с}} = fMg\cos\alpha$ или сила сопротивления движению $F = -\beta\dot{x}^2$. Действительно, при наличии силы трения

$$M\ddot{x} = -Mg\sin\alpha - F_{\text{т.с}}, \quad \text{т.е.} \quad \ddot{x} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

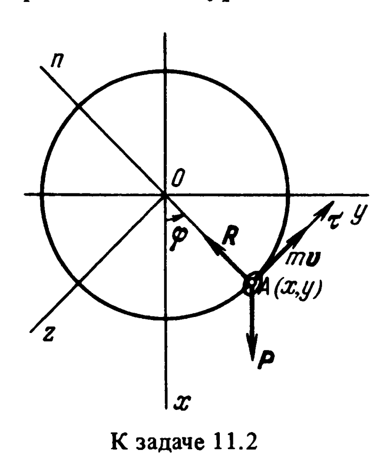
Правая часть этого уравнения постоянна, и оно элементарно интегрируется. Проинтегрировав, найдем $\dot{x} = f_1(t)$ и $x = f_2(t)$. Подставив $\dot{x} = 0$ в $\dot{x} = f_1(t)$, найдем $t = \tau$. Затем, внеся $t = \tau$ в $x = f_2(t)$, получим $x = s$. Если сила трения заменена силой сопротивления, то $M\ddot{x} = -Mg\sin\alpha - \beta\dot{x}^2$. Это дифференциальное уравнение нетрудно проинтегрировать, разделив переменные: $\dfrac{M\,d\dot{x}}{Mg\sin\alpha + \beta\dot{x}^2} = -dt$ и т.д. Затем, внеся $\dot{x} = 0$ в $\dot{x} = f_1(t)$, найдем $t = \tau$, а подставив $t = \tau$ в $x = f_2(t)$, получим $x = s$.

Этот пример демонстрирует ограниченные возможности применения общих теорем динамики: нам пришлось использовать две теоремы для определения двух неизвестных s и τ, притом это удалось выполнить только при наличии постоянной силы трения. Решение же задачи с помощью общих теорем при замене постоянной силы $F_{\text{т.с}}$ переменной силой $F_x = -\beta\dot{x}^2$ невозможно. Вместе с тем решение с помощью дифференциального уравнения движения в проекции на ось x, хотя и оказалось более длинным, но дало возможность решить задачу как при постоянной силе трения $F_{\text{т.с}} = fMg\cos\alpha$, так и при переменной силе сопротивления движению $F_x = -\beta\dot{x}^2$.

Задача 11.2. На рисунке изображена гладкая проволочная окружность радиусом r, расположенная в вертикальной плоскости. По проволоке скользит кольцо A.

Написать дифференциальное уравнение движения кольца, считая его материальной точкой массы M.

Р е ш е н и е. Степень трудности составления и интегрирования дифференциального уравнения движения точки во многом определяется удачным выбором системы отсчета. Для иллюстрации этого положения решим данную задачу двумя способами: используем систему декартовых координат xyz и затем оси натурального триэдра τ, n, b.



К задаче 11.2

К кольцу приложены две силы: сила тяжести $P = Mg$ и нормальная реакция R.

1) Применив дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекциях на декартовы оси координат, запишем: $M\ddot{x} = Mg - R\cos\varphi$; $M\ddot{y} = -R\sin\varphi$, где φ – угол между осью x и движущимся радиусом OA, определяющим положение кольца A. В эти дифференциальные уравнения вошла нормальная реакция R. При движении кольца она изменяется, причем закон ее изменения можно определить только после отыскания уравнения движения кольца. Поэтому пз составленных уравнений надо исключить R. Выполнив это, получим $M\ddot{x} = Mg + M\ddot{y}\,\mathrm{ctg}\varphi$. Это дифференциальное уравнение уже не содержит неизвестную реакцию R, однако проинтегрировать его мы не можем, пока не установлена зависимость между x, y и φ. Как видно из рисунка, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Вычислив вторые производные по времени: $\ddot{x} = -r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi$, $\ddot{y} = r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi$ – и подставив их значения в уравнение $M\ddot{x} = Mg + M\ddot{y}\,\mathrm{ctg}\varphi$, после преобразований получим $\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{r}\sin\varphi = 0$. Это – искомое дифференциальное уравнение движения кольца.

2) Однако это дифференциальное уравнение можно получить во много раз быстрее и проще, если воспользоваться осями натурального триэдра. Для этого достаточно составить лишь одно уравнение в проекции на касательную τ, на которую неизвестная сила R проектируется в нуль: $Ma_\tau = -Mg\sin\varphi$. Заменив a_τ на $r\ddot{\varphi}$, получим искомое дифференциальное уравнение $\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{r}\sin\varphi = 0$.

(Если бы по условию требовалось также определить реакцию R, то, проинтегрировав полученное выше уравнение и найдя $\dot{\varphi} = f(\varphi)$, надо бы-

ло бы составить дифференциальное уравнение движения в проекции на главную нормаль n: $M\dfrac{v^2}{r} = R - Mg\cos\varphi$ и вычислить R, заменив в нем v^2 на $r^2\dot{\varphi}^2$.)

Сопоставление двух методов составления уравнения $\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{r}\sin\varphi = 0$ убедительно подтверждает правильность рекомендации, данной выше: если траектория движущейся материальной точки заранее известна (в данном случае – окружность радиуса r), то целесообразнее пользоваться дифференциальными уравнениями движения материальной точки в проекциях на оси натурального триэдра траектории.

3) Для получения искомого дифференциального уравнения можно было бы также применить теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси z: $\dfrac{dl_z}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k)$.

В данном случае

$$l_z = Mv_\tau r = Mr^2\dot{\varphi}, \qquad \Sigma m_z(\boldsymbol{F}_k) = -Mgr\sin\varphi.$$

Подставив эти значения, находим искомое дифференциальное уравнение движения кольца. Данный способ несколько длиннее второго способа, но значительно короче первого, ибо момент силы $\boldsymbol{R}$ относительно оси z равен нулю и, значит, в составленное уравнение эта сила не входит. (Однако, если бы требовалось также определить R, то, применив теорему и проинтегрировав уравнение, пришлось бы дополнительно составить какое-либо уравнение, содержащее R, например дифференциальное уравнение движения в проекции на главную нормаль.)

Если бы условие этой задачи было усложнено поступательным движением проволочной окружности с ускорением $\boldsymbol{a}$, то для описания относительного движения кольца по окружности (переносным является движение проволочной окружности) следовало бы применить уравнение динамики относительного движения материальной точки: к силам $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ добавить силу инерции переносного движения $\boldsymbol{J}_e = -m\boldsymbol{a}_e = -m\boldsymbol{a}$ и затем составить дифференциальное уравнение относительного движения в проекции на касательную τ.

Задача 11.3. Составить дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки с помощью уравнений Лагранжа в обобщенных координатах, приняв ее сферические координаты за обобщенные: $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \psi$.

Р е ш е н и е. Проекции скорости точки на оси сферической системы координат известны из кинематики (см. I том):

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\psi = r\sin\theta\cdot\dot{\psi}. \tag{1}$$

Тогда кинетическая энергия точки равна

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta \cdot \dot{\psi}^2). \tag{2}$$

Используя уравнения Лагранжа в обобщенных координатах

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \tag{3}$$

составляем первое уравнение Лагранжа. Находим производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m(r\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta \cdot \dot{\psi}^2) \tag{4}$$

и вносим их значения в уравнение (3):

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta \cdot \dot{\psi}^2) = Q_r. \tag{5}$$

Составляем второе уравнение Лагранжа. Находим производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\psi}^2 \tag{6}$$

и вносим их в уравнение (3):

$$m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\psi}^2) = Q_\theta. \tag{7}$$

Составляем третье уравнение Лагранжа. Находим производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = mr^2\sin^2\theta \cdot \dot{\psi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) =$$

$$= m(r^2\sin^2\theta \cdot \ddot{\psi} + 2r\sin^2\theta \cdot \dot{r}\,\dot{\psi} + 2r^2\sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\theta}\,\dot{\psi}),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

и вносим их в уравнение (3):

$$m(r^2\sin^2\theta \cdot \ddot{\psi} + 2r\sin^2\theta \cdot \dot{r}\dot{\psi} + 2r^2\sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\theta}\dot{\psi}) = Q_\psi. \tag{8}$$

Для нахождения обобщенных сил Q_r, Q_θ, Q_ψ составляем элементарную работу силы, сообщив обобщенной координате бесконечно малое приращение:

$$\delta A_1 = F_r\delta r, \quad \delta A_2 = rF_\theta\,\delta\theta, \quad \delta A_3 = r\sin\theta \cdot F_\psi\,\delta\psi.$$

Здесь F_r, F_θ, F_ψ — проекции силы F, приложенной к точке, на оси сфери-

ческой системы координат. Отсюда находятся обобщенные силы

$$Q_r = F_r, \quad Q_\theta = rF_\theta, \quad Q_\psi = r\sin\theta \cdot F_\psi .$$

Если положить в уравнениях (5), (7) и (8) ψ = const, $\dot{\psi} = 0$, то можно найти дифференциальные уравнения движения точки в полярных координатах:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r, \quad m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = rF_\theta .$$

§ 3. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Наиболее общим приемом составления дифференциальных уравнений движения материальной системы, подчиненной голономным связям, является применение уравнений Лагранжа. При наличии идеальных связей в эти уравнения не входят реакции связей. Если на материальную систему наложены голономные связи, то число уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы. Применение этих уравнений особенно целесообразно при рассмотрении систем с несколькими степенями свободы. Так, в случае системы с двумя степенями свободы надо составить два дифференциальных уравнения движения. Если решать задачу, минуя уравнения Лагранжа, то необходимо из многих общих теорем и иных уравнений динамики найти два уравнения, применение которых наиболее целесообразно. Удачно выбрать уравнения и общие теоремы можно лишь на основе значительных навыков в решении задач или путем ряда неудачных проб и ошибок. Вместе с тем применение уравнений Лагранжа дает возможность быстро и безошибочно получить необходимые дифференциальные уравнения движения. Вообще говоря, при отсутствии ясного плана решения задачи лучше всего использовать уравнения Лагранжа. При этом существенную роль играет удачный выбор обобщенных координат.

Вместе с тем уравнениями Лагранжа нецелесообразно пользоваться при наличии сил трения, зависящих от переменного давления. Кроме того, в случаях систем с неудерживающими связями одних уравнений Лагранжа для решения задач может оказаться недостаточно.

Если по условию требуется определить какую-либо реакцию связи, то надо с помощью уравнений Лагранжа определить обобщенные ускорения системы (т.е. вторые производные по времени обобщенных координат), затем, применив закон освобождаемости, составить дифференциальное уравнение движения соответствующей материальной точки или применить метод кинетостатики и из составленного уравнения, решая первую задачу динамики, найти искомую реакцию.

В последнее время применение уравнений Лагранжа вытеснило использование общего уравнения динамики в качестве общего метода составления дифференциальных уравнений движения материальной системы, подчи-

ненной голономным связям. Это вполне закономерно: для уравнений Лагранжа вычисляется кинетическая энергия, а для общего уравнения динамики определяются силы инерции. В выражение кинетической энергии входят скорости точек системы, а в формулы сил инерции – ускорения этих точек. Определение же скоростей точек системы значительно проще вычисления их ускорений.

Во многих более простых задачах могут быть успешно применены общие теоремы динамики. Заметим, что для этих задач использование уравнений Лагранжа является более громоздким и потому нецелесообразным. Так как выбор соответствующей общей теоремы связан с известными трудностями, то полезно иметь в виду следующие соображения:

а) Если в число данных и неизвестных величин входят: массы материальных точек, внешние силы и уравнение движения центра масс либо уравнения движения точек системы, то можно, применив *теорему о движении центра масс материальной системы* в проекциях на оси координат, составить дифференциальные уравнения движения, в которые войдут те реакции связей, которые для рассматриваемой системы являются внешними силами. Эти дифференциальные уравнения движения дают возможность, помимо решения вторых задач, определять искомые реакции связей непосредственно из составленных уравнений.

б) *Если внешние силы постоянны либо зависят от времени,* а в число данных и неизвестных величин входят: массы материальных точек, внешние силы, промежуток времени действия внешних сил и скорости точек системы в начале и конце этого промежутка, то следует применить *теорему об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в интегральной форме.*

в) Если в состав материальной системы входит *твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси,* а в число данных и искомых величин – инерционные характеристики системы (массы, моменты инерции), уравнения движения точек системы и уравнение вращения твердого тела (либо скорости точек системы и угловая скорость твердого тела), а также внешние силы системы, то можно применить *теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы.*

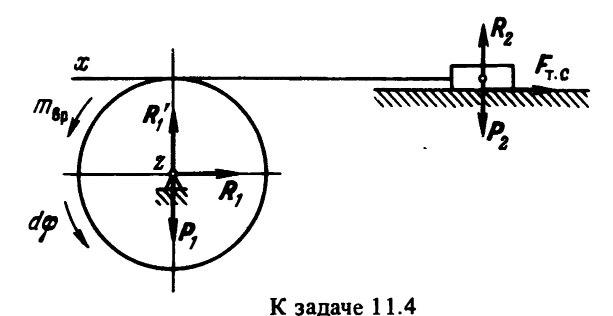
г) *Если внешние силы постоянны либо зависят от положений точек системы,* а в число данных и искомых величин входят: инерционные коэффициенты системы (массы, моменты инерции), внешние и внутренние силы системы (в случае неизменяемой материальной системы – только внешние силы), перемещения точек системы и скорости этих точек в начале и в конце этих перемещений, то следует применять *теорему об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме.*

д) Если рассматриваемая система материальных точек является *сплошной средой* – жидкостью (газом), а в число данных и неизвестных величин входят: секундные массы жидкости (газа), скорости капель жидкости

(газа), проходящих через крайние поперечные сечения рассматриваемого объема жидкости (газа), объемные и поверхностные силы, то следует применять *уравнение Эйлера т.е. теорему об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в приложении к сплошным средам.*

Приведем для пояснения несколько примеров.

Задача 11.4. На рисунке изображена система, состоящая из барабана массой M_1 и радиусом r и груза массой M_2. На боковую поверхность барабана намотана невесомая нить, другой конец которой прикреплен к грузу.



К задаче 11.4

При вращении барабана против хода часовой стрелки груз скользит по негладкой горизонтальной плоскости налево.

Найти угловую скорость барабана, если к нему приложен вращающий момент $m_{вр\,z}$. Рассмотреть два варианта:

1) $m_{вр\,z} = \alpha\varphi$, где α – постоянная, а φ – угол поворота барабана,

2) $m_{вр\,z} = \beta\dot{\varphi}$, где β – постоянная, а $\dot{\varphi}$ – угловая скорость барабана.

Барабан считать однородным кольцом. Коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен f. В начальный момент система находилась в покое. Высотой груза пренебречь.

Р е ш е н и е. За исключением вращающего момента, все силы, приложенные к этой системе, постоянны.

В первом варианте вращающий момент зависит от угла поворота φ барабана. Поэтому можно применить теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

Здесь

$$T_2 = \frac{M_1 + M_2}{2} r^2 \dot{\varphi}^2, \qquad T_1 = 0, \qquad \Sigma A(F_k^e) = \int_0^{\varphi} (m_{вр\,z} - F_{т.с} \cdot r)\,d\varphi.$$

Так как $m_{вр\,z} = \alpha\varphi$, а $F_{т.с} = fM_2 g$, то $\Sigma A(F_k^e) = \dfrac{\alpha\varphi^2}{2} - fM_2 gr\varphi$. После подстановки в $T_2 - T_1 = \Sigma A(F_k^e)$ найдем зависимость $\dot{\varphi}$ от φ.

Во втором варианте вращающий момент зависит от угловой скорости $\dot\varphi$, и мы не можем вычислить сумму работ $\Sigma A(F_k^e) = \int_0^\varphi (m_{\text{вр}\,z} - F_{\text{тр}}\cdot r)d\varphi = \beta\int_0^\varphi \dot\varphi d\varphi - fM_2 gr\varphi$, ибо неизвестна зависимость $\dot\varphi$ от φ. В этом варианте можно применить теорему об изменении главного момента количеств движения. В данном случае

$$L_z = I_z\dot\varphi + M_2 vr = (M_1 + M_2)r^2\dot\varphi;$$

$$\Sigma m_z(F_k^e) = m_{\text{вр}\,z} - F_{\text{тр}}\,r = \beta\dot\varphi - fM_2 gr.$$

Подстановка в $\dfrac{dL_z}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_z(F_k^e)$ дает $(M_1 + M_2)r^2\ddot\varphi = \beta\dot\varphi - fM_2 gr$.

Разделив переменные и проинтегрировав это дифференциальное уравнение, найдем зависимость $\dot\varphi$ от t.

Применение теоремы об изменении главного момента количеств движения не составило большого труда лишь потому, что в системе отсутствуют твердые тела, совершающие сложные движения (см. задачу 11.5). Заметим, что эту теорему можно было использовать и в первом варианте данной задачи. Тогда составленное дифференциальное уравнение имело бы вид $(M_1 + M_2)r^2\ddot\varphi = \alpha\varphi - fM_2 gr$. Умножив его на $d\varphi$, заменив $\ddot\varphi d\varphi$ на $\dot\varphi d\dot\varphi$ и затем проинтегрировав, мы получили бы зависимость $\dot\varphi$ от φ.

Это дифференциальное уравнение, описывающее движение системы в обоих вариантах, можно было получить с помощью уравнений Лагранжа или общего уравнения динамики.

Так, подставив в уравнение Лагранжа $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \dfrac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi$ значения $T = \dfrac{M_1 + M_2}{2} r^2\dot\varphi^2$ и $Q_\varphi = m_{\text{вр}\,z} - fM_2 gr$, получим $(M_1 + M_2)r^2\ddot\varphi = m_{\text{вр}\,z} - fM_2 gr$.

К этому же результату можно прийти с помощью общего уравнения динамики. В данном случае оно имеет вид

$$m_{\text{вр}\,z}\,\delta\varphi + m_{1z}^{(J)}\,\delta\varphi - fM_2 gr\delta\varphi + V_{2x}^{(J)}\,r\delta\varphi = 0,$$

где

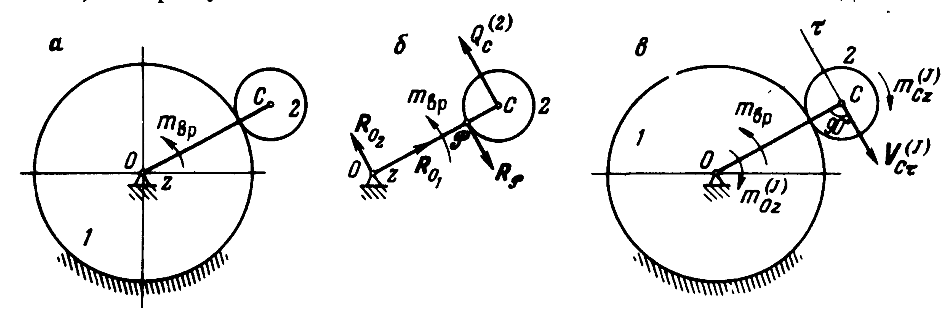
$$m_{1z}^{(J)} = -I_z\ddot\varphi = -M_1 r^2\ddot\varphi, \qquad V_{2x}^{(J)} = M_2 r\ddot\varphi.$$

Решение этой простой задачи иллюстрирует ограниченные возможности применения теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

Задача 11.5. Планетарный механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится во вращение с помощью кривошипа OC, к которому приложен вращающий момент $m_{\text{вр}\,z}$, где z — ось вращения (рис. *а*).

Найти угловое ускорение кривошипа, если I_z – его момент инерции, r_1 – радиус неподвижного колеса, r_2 – радиус подвижного колеса массой M_2. Колесо *2* считать однородным кольцом. Силами сопротивления пренебречь.

Решение. Найдем угловое ускорение четырьмя способами, применив: 1) теорему об изменении главного момента количеств движения;



К задаче 11.5

2) теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме; 3) уравнения Лагранжа; 4) общее уравнение динамики.

1) Для применения теоремы об изменении главного момента количеств движения относительно неподвижной оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e), \tag{1}$$

вычислим L_z по формуле

$$L_z = L_z^{(OC)} + L_z^{(2)}. \tag{2}$$

Имеем

$$L_z^{(OC)} = I_z \dot{\varphi}, \tag{3}$$

где $\dot{\varphi}$ – угловая скорость кривошипа.

Так как колесо *2* совершает плоское движение, то применим формулу

$$L_{zO}^{(2)} = L_{zC}^{(2)} + m_{zO}(Q_C^{(2)}). \tag{4}$$

Имеем $L_{zC}^{(2)} = I_C^{(2)}\omega_{2z}$. Учтя, что $I_C^{(2)} = m_2 r_2^2$, а $\omega_{2z} = \dfrac{r_1 + r_2}{r_2}\dot{\varphi}$, получим

$$L_{zC}^{(2)} = m_2 r_2 (r_1 + r_2)\dot{\varphi}. \tag{5}$$

Далее, $m_{zO}(Q_C^{(2)}) = m_{zO}(m_2 \mathbf{v}_C)$, так как $v_C = (r_1 + r_2)|\dot{\varphi}|$, то (рис. *б*)

$$m_{zO}(Q_C^{(2)}) = m_2 (r_1 + r_2)^2 \dot{\varphi}. \tag{6}$$

Подставив (5) и (6) в формулу (4), находим

$$L_{zO}^{(2)} = m_2(r_1 + r_2)(r_1 + 2r_2)\dot{\varphi}. \tag{7}$$

Внеся значения (3) и (7) в формулу (2), получим главный момент количеств движения системы относительно оси z:

$$L_z = [I_z + m_2(r_1 + r_2)(r_1 + 2r_2)]\dot{\varphi}. \tag{8}$$

К механизму приложены внешние силы: $P_1 = M_1 g$ – сила тяжести кривошипа, $P_2 = M_2 g$ – сила тяжести колеса *2* (они перпендикулярны плоскости рис. *б*), вращающий момент $m_{\text{вр}}$, R_{O_1} и R_{O_2} – составляющие реакции неподвижной оси z_O, $R_{\mathscr{P}}$ – реакция неподвижного колеса *1*.

Имеем

$$\Sigma m_{zO}(F_k^e) = m_{\text{вр}\,z} - R_{\mathscr{P}} \cdot r_1. \tag{9}$$

Подстановка (8) и (9) в уравнение (1) дает

$$[I_z + M_2(r_1 + r_2)(r_1 + 2r_2)]\ddot{\varphi} = m_{\text{вр}\,z} - R_{\mathscr{P}} \cdot r_1. \tag{10}$$

Мы не можем из уравнения (10) определить искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа, ибо неизвестен модуль реакции $R_{\mathscr{P}}$. Поэтому для исключения $R_{\mathscr{P}}$ из уравнения (10) надо дополнительно применить к колесу *2* одну из общих теорем, например теорему об изменении главного момента количеств движения в относительном движении по отношению к центру масс:

$$\frac{dL_{zC}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{zC}(F_k^e). \tag{11}$$

Учтя, что $\Sigma m_{zC}(F_k^e) = R_{\mathscr{P}} \cdot r_2$, и использовав формулу (5), получим после сокращения на r_2:

$$M_2(r_1 + r_2)\ddot{\varphi} = R_{\mathscr{P}}. \tag{12}$$

Лишь теперь, исключив $R_{\mathscr{P}}$ из системы уравнений (10) и (12), находим искомое угловое ускорение:

$$\ddot{\varphi} = \frac{m_{\text{вр}\,z}}{I_z + 2M_2(r_1 + r_2)^2}. \tag{13}$$

2) Решим эту задачу с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k. \tag{14}$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T^{(OC)} + T^{(2)} \tag{15}$$

Имеем

$$T^{(OC)} = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2. \tag{16}$$

Далее, $T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2$, так как $I_C = M_2 r_2^2$, $v_C = (r_1 + r_2)|\dot{\varphi}|$,

а $\omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} |\dot{\varphi}|$, то

$$T^{(2)} = M_2 (r_1 + r_2)^2 \dot{\varphi}^2. \tag{17}$$

Внеся (16) и (17) в формулу (15), получим

$$T = \frac{1}{2} [I_z + 2M_2 (r_1 + r_2)^2] \dot{\varphi}^2. \tag{18}$$

Элементарная работа внешних сил на угловом перемещении $d\varphi$ кривошипа равна

$$\Sigma \delta A_k = m_{\text{вр} z} d\varphi. \tag{19}$$

В выражение (19) реакция $R_{\mathscr{P}}$ не вошла, ибо $\delta A (R_{\mathscr{P}}) = R_{\mathscr{P}} \cdot dr_{\mathscr{P}} = R_{\mathscr{P}} \cdot v_{\mathscr{P}} dt = 0$. Отсутствие в (19) силы $R_{\mathscr{P}}$ значительно упрощает решение задачи.

Внеся значения (18) и (19) в уравнение (14), имеем

$$[I_z + 2M_2 (r_1 + r_2)^2] \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = m_{\text{вр} z} d\varphi. \tag{20}$$

Приняв во внимание, что $\dot{\varphi} \, d\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} d\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} \, d\varphi$, после сокращения уравнения (20) на $d\varphi$ получим искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа (см. формулу (13)).

3) Решим эту задачу с помощью уравнений Лагранжа. При наличии одной обобщенной координаты φ уранение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \tag{21}$$

Так как все связи идеальны, то реакции (в том числе и $R_{\mathscr{P}}$) не войдут в выражение обобщенной силы Q_{φ}. Имеем

$$Q_{\varphi} = m_{\text{вр} z}. \tag{22}$$

Воспользовавшись в уравнении (21) формулами (18) и (22), получим искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа (см. формулу (13)).

4) Применим общее уравнение динамики: $\sum_{k=1}^{n} (F_k^a - M_k a_k) \cdot \delta r_k = 0.$

Силы инерции кривошипа приводятся к паре с главным моментом

$$m_{Oz}^{(J)} = -I_z \ddot{\varphi}. \qquad (23)$$

Силы инерции колеса 2, совершающего плоское движение, приводятся к главному вектору $V_C^{(J)}$ (рис. *в*) и главному моменту $m_{Cz}^{(J)}$, причем

$$V_{C\tau}^{(J)} = -M_2(r_1 + r_2)\ddot{\varphi}, \quad m_{Cz}^{(J)} = -I_C \ddot{\varphi}_2 = -M_2 r_2 (r_1 + r_2)\ddot{\varphi}. \qquad (24)$$

Напомним, что $I_C = M_2 r_2^2$, а $\ddot{\varphi}_2 = \dfrac{r_1 + r_2}{r_2}\ddot{\varphi}$.

Общее уравнение динамики в данной задаче имеет вид

$$m_{\text{вр}\,z}\,\delta\varphi + m_{Oz}^{(J)}\,\delta\varphi + m_{Cz}^{(J)}\,\delta\varphi_2 + V_{C\tau}^{(J)}(r_1 + r_2)\delta\varphi = 0. \qquad (25)$$

Внеся (23) и (24) в уравнение (25) и заметив, что $\delta\varphi_2 = \dfrac{r_1 + r_2}{r_2}\delta\varphi$, после сокращения на $\delta\varphi$ получим искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа (см. формулу (13)).

Сопоставление четырех методов решения этой задачи свидетельствует о нецелесообразности применения теоремы об изменении главного момента количеств движения к системам, в состав которых входят твердые тела, совершающие сложные движения (громоздкость вычисления $L_{zO}^{(2)}$ и необходимость в составлении дополнительного уравнения (11) для исключения неизвестной реакции $R_{\mathscr{P}}$). Решение задачи с помощью общего уравнения динамики, связанное с введением сил инерции, является более громоздким по сравнению с использованием уравнений Лагранжа.

Задача 11.6. Цилиндр с горизонтальной осью, имеющий массу m, может свободно перемещаться в пространстве. Радиус цилиндра r. На цилиндр намотана нить, свободный конец которой движется равноускоренно вверх с ускорением a.

Определить движение цилиндра.

Р е ш е н и е. Применим к цилиндру общее уравнение динамики. К цилиндру приложены активные силы: натяжение нити F и сила тяжести mg (рис.). Силы инерции при плоском движении цилиндра приводятся к силе инерции, приложенной в центре масс O цилиндра, равной произведению массы на ускорение центра масс a_O и направленной в сторону, противоположную ускорению центра масс, а также к паре сил, равной произведению момента инерции цилиндра относительно горизонтальной оси O на

угловое ускорение цилиндра ϵ и направленной в сторону, противоположную угловому ускорению.

Цилиндр имеет две степени свободы: он может перемещаться вверх поступательно и может, сохраняя центр масс O неподвижным, вращаться вокруг горизонтальной оси O при перемещении нити вверх.

При поступательном перемещении цилиндра вверх на величину δx сумма работ всех активных сил и сил инерции равна

$$F\delta x - mg\delta x - ma_O\delta x = 0. \quad (1)$$

Если же центр масс неподвижен, а цилиндр повернулся вокруг центра масс на бесконечно малый угол $\delta\varphi$, то сумма работ всех активных сил и сил инерции будет

$$Fr\delta\varphi - I_z\epsilon\delta\varphi = 0, \quad (2)$$

где $I_z = mr^2/2$.

Положим, нить движется вверх со скоростью $\mathbf{v}$, а цилиндр имеет поступательную скорость $\mathbf{v}_O$. Тогда

$$v = v_O + r\omega. \quad (3)$$

Дифференцируя это равенство по времени, находим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_O}{dt} + r\frac{d\omega}{dt}, \quad (4)$$

К задаче 11.6

где $\dfrac{dv}{dt} = a$, $\dfrac{dv_O}{dt} = a_O$, $\dfrac{d\omega}{dt} = \epsilon$. Тогда равенство (4) примет вид

$$a = a_O + r\epsilon, \quad (5)$$

откуда

$$\epsilon = \frac{a - a_O}{r}. \quad (6)$$

Подставляя найденное угловое ускорение ϵ в уравнение (2), находим

$$F = \frac{mr^2\epsilon}{2r} = \frac{mr}{2}\left(\frac{a - a_O}{r}\right) = \frac{m}{2}(a - a_O). \quad (7)$$

Но из уравнения (1) следует, что

$$F = m(g + a_O), \quad (8)$$

и поскольку левые части уравнений (7) и (8) равны, то равны и правые

части:

$$\frac{m}{2}(a - a_O) = m(g + a_O),$$

откуда

$$\frac{1}{2}a = g + \frac{3}{2}a_O,$$

или окончательно

$$a_O = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2} - g\right) = \frac{a - 2g}{3}.$$

Внося это значение a_O в уравнение (6), находим

$$\epsilon = \frac{a - \frac{a}{3} + \frac{2}{3}g}{r} = \frac{2}{3}\frac{(a+g)}{r}.$$

Задача 11.7. Однородный стержень массой M и длиной $2l$ колеблется вокруг горизонтальной оси z, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка на нас. На стержень надето кольцо A массой m, которое под действием силы тяжести скользит вдоль стержня.

Составить дифференциальные уравнения движения материальной системы. Всеми силами сопротивления пренебречь. Кольцо считать точечной массой.

Решение. Материальная система имеет две степени свободы. Движение системы описывается двумя дифференциальными уравнениями движения. Читателю, недостаточно искушенному в решении задач, трудно из значительного числа общих теорем и уравнений выбрать нужные две теоремы. Поэтому рекомендуется применить уравнения Лагранжа.

В качестве обобщенных координат возьмем: $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$ (рис. *а*). Активные силы Mg и mg потенциальны. Поэтому применим уравнения Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \tag{1}$$

Кинетическая энергия материальной системы равна $T = T_{ст} + T_к$. Кинетическая энергия стержня равна

$$T_{ст} = \frac{1}{2} I_{zст}\dot{\varphi}^2.$$

Так как

$$I_{z\,\text{ст}} = I_{z_C\text{ст}} + Ml^2 = \frac{Ml^2}{3} + Ml^2 = \frac{4}{3}Ml^2,$$

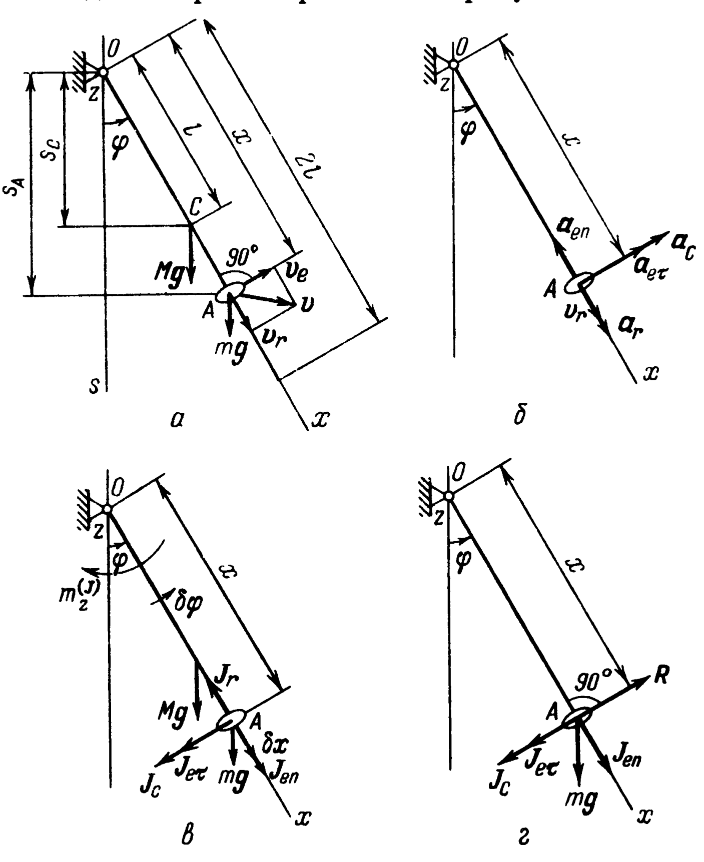
то

$$T_{\text{ст}} = \frac{2}{3}Ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия кольца – точечной массы – равна

$$T_{\text{к}} = \frac{1}{2}mv_A^2.$$

Кольцо совершает сложное движение: переносное вместе со стержнем и относительное вдоль стержня. Применим теорему о сложении скоростей:



К задаче 11.7

$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$. В данном случае $\mathbf{v}_e$ перпендикулярно $\mathbf{v}_r$ (рис. *а*), причем $v_e = x|\dot{\varphi}|$, $v_r = |\dot{x}|$. Поэтому $v_A^2 = x^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2$ и, значит,

$$T_к = \frac{1}{2} m(x^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2).$$

Теперь запишем выражение кинетической энергии системы:

$$T = T_{ст} + T_к = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{4Ml^2 + 3mx^2}{6} \dot{\varphi}^2. \tag{2}$$

Заметим, что $T = T(x, \dot{x}, \dot{\varphi})$. С помощью формулы (2) найдем

$$\frac{\partial T}{\partial x} = mx\dot{\varphi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{4Ml^2 + 3mx^2}{3}\ddot{\varphi}. \tag{3}$$

Вычислим потенциальную энергию материальной системы: $\Pi = \Pi^{(Mg)} + \Pi^{(mg)}$. Нулевое положение примем в точке O. Тогда $\Pi^{(Mg)} = -Mgs_G = -Mgl\cos\varphi$, $\Pi^{(mg)} = -mgs_A = -mgx\cos\varphi$. Значит, потенциальная энергия равна: $\Pi = -g(Ml + mx)\cos\varphi$. Вычислим обобщенные силы:

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = mg\cos\varphi, \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -g(Ml + mx)\sin\varphi. \tag{4}$$

Внеся результаты (3) и (4) в уравнения Лагранжа (1), найдем искомые дифференциальные уравнения движения материальной системы:

$$\ddot{x} - x\dot{\varphi}^2 = g\cos\varphi, \tag{5}$$

$$\frac{4Ml^2 + 3mx^2}{3}\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} = -g(Ml + mx)\sin\varphi. \tag{6}$$

Приведем решение данной задачи с помощью общего уравнения динамики. Для применения этого формального метода надо к активным силам Mg и mg присоединить силы инерции. Стержень вращается вокруг неподвижной оси z. Поэтому силы инерции его точек приводятся к паре сил с моментом: $m_{z\,ст}^{(J)} = -I_{z\,ст}\ddot{\varphi}$. Так как $I_{z\,ст} = {}^4/_3 Ml^2$ (см. выше решение задачи с уравнениями Лагранжа), то

$$m_{z\,ст}^{(J)} = -\frac{4}{3} Ml^2\ddot{\varphi}. \tag{7}$$

Кольцо A совершает сложное движение. Поэтому его ускорение $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{en} + \boldsymbol{a}_{e\tau} + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c$. Все составляющие ускорения $\boldsymbol{a}_A$ изображены на

рис. *б*. По модулю $a_{en}=x\dot\varphi^2$, $a_{e\tau}=x|\ddot\varphi|$, $a_r=|\ddot x|$, $a_c=2|\dot x||\dot\varphi|$ — ускорение Кориолиса. Соответственно сила инерции кольца $J_A=-ma_A$, т.е. $J_A=J_{en}+J_{e\tau}+J_r+J_c$ или $J_A=-ma_{en}-ma_{e\tau}-ma_r-ma_c$, по модулю:

$$J_{en}=mx\dot\varphi^2,\quad J_{e\tau}=mx|\ddot\varphi|,\quad J_r=m|\ddot x|,\quad J_c=2m|\dot x||\dot\varphi|. \qquad (8)$$

Дадим системе два независимых обобщенных возможных перемещения δx и $\delta\varphi$ (рис. *в*).

Будем считать: $\delta x\neq 0$, $\delta\varphi=0$. Это значит, что при неизменном положении стержня кольцо получило возможное перемещение δx. Тогда уравнение работ активных сил и сил инерции имеет вид $mg_x\delta x+J_{enx}\delta x+J_{e\tau x}\delta x+J_{rx}\delta x+J_{cx}\delta x=0$. Так как $g_x=g\cos\varphi$, $J_{enx}=mx\dot\varphi^2$, $J_{e\tau x}=J_{cx}=0$, $J_{rx}=-J_r=-m\ddot x$, то $mg\cos\varphi+mx\dot\varphi^2-m\ddot x=0$, откуда следует дифференциальное уравнение (5).

Далее примем: $\delta\varphi\neq 0$, $\delta x=0$. Это значит, что при неизменном положении кольца на стержне стержень получил угловое возможное перемещение $\delta\varphi$ (рис. *в*). Теперь уравнение работ активных сил и сил инерции примет вид $M_{z\,\text{ст}}^{(J)}\delta\varphi-Mgl\sin\varphi\,\delta\varphi-mgx\sin\varphi\,\delta x+m_z(J_{en})\delta\varphi+m_z(J_{e\tau})\delta\varphi+m_z(J_r)\delta\varphi+m_z(J_c)\delta\varphi=0$. Так как $m_z(J_{en})=m_z(J_r)=0$, то, учтя результаты (7) и (8), получим

$$-\frac{4}{3}Ml^2\ddot\varphi-Mgl\sin\varphi-mgx\sin\varphi-2mx\dot x\dot\varphi-mx^2\ddot\varphi=0,$$

откуда следует дифференциальное уравнение (6).

Из сравнения решений данной задачи с уравнениями Лагранжа и с общим уравнением динамики следует, что метод Лагранжа проще. В ходе его применения определялись скорости точек системы (для кинетической энергии (2)). В случае же общего уравнения динамики пришлось находить ускорения этих точек (для сил инерции), что значительно усложнило решение задачи. Заметим, что составление системы дифференциальных уравнений (5) и (6) с помощью уравнений Лагранжа не потребовало каких-либо догадок или искусственных приемов решения.

Эта задача, подобно другим, может быть решена с помощью удачно найденной комбинации общих теорем и уравнений. Применим теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно оси z и уравнения динамики относительного движения в проекции на ось x.

Упомянутая теорема имеет вид

$$\frac{dL_z}{dt}=\Sigma m_z(F_k^e). \qquad (9)$$

К системе приложены внешние силы: силы тяжести Mg и mg и составляющие реакции неподвижной оси. Сумма моментов этих сил относительно

оси z равна

$$\Sigma m_z(F_k^e) = -g(Ml + mx)\sin\varphi. \tag{10}$$

Вычислим главный момент L_z количеств движения материальной системы относительно оси z: $L_z = L_{z\,\text{ст}} + L_{z\,\text{к}}$. Для стержня имеем $L_{z\,\text{ст}} = I_{z\,\text{ст}}\dot\varphi = \frac{4}{3}Ml^2\dot\varphi$. Для кольца A запишем $l_{z\,\text{к}} = m_z(m\mathbf{v}_A)$. Так как $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$ (рис. *а*), то $l_{z\,\text{к}} = m_z(m\mathbf{v}_e) + m_z(m\mathbf{v}_z)$. Момент количества движения $m\mathbf{v}_r$ относительно оси z равен нулю. Поэтому $l_{z\,\text{к}} = m_z(m\mathbf{v}_e) = mx\dot\varphi \cdot x = mx^2\varphi$. Итак,

$$L_z = L_{z\,\text{ст}} + l_{z\,\text{к}} = \frac{4Ml^2 + 3mx^2}{3}\dot\varphi.$$

Взяв производную по времени

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{4}{3}Ml^2\ddot\varphi + 2mx\dot x\dot\varphi + mx^2\ddot\varphi,$$

внесем это выражение, а также результат (10) в формулу (9):

$$\frac{4}{3}Ml^2\ddot\varphi + 2mx\dot x\dot\varphi + mx^2\ddot\varphi = -g(Ml + mx)\sin\varphi.$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение (6).

Для составления дифференциального уравнения (5) применим к кольцу A уравнение динамики относительного движения в проекции на ось x.

К кольцу приложены: сила тяжести mg и нормальная реакция R гладкого стержня. Эти силы, а также силы инерции J_{en}, $J_{e\tau}$ и J_c изображены на рис. *г*. Приняв во внимание, что $a_{rx} = \ddot x$, $R_x = J_{e\tau x} = J_{cx} = 0$, а $J_{enx} = J_{en} = mx\dot\varphi^2$, получим $m\ddot x = mg\cos\varphi + mx\dot\varphi^2$, откуда следует дифференциальное уравнение (5).

Последнее решение эффективно, но найти необходимую совокупность теорем довольно трудно и потому целесообразно при решении этой задачи применить уравнения Лагранжа.

Задача 11.8. По негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, соскальзывает доска массы M_1, а по доске движется груз массой M_2 (рис. *а*).

Составить дифференциальные уравнения движения этой системы, если f_1 – коэффициент трения скольжения доски о наклонную плоскость, а f_2 – груза о доску.

Решение. Сопоставим три способа решения задачи и применим: 1) уравнения Лагранжа, 2) общее уравнение динамики, 3) теорему о движении центра масс совместно с уравнением динамики относительного движения.

1) Данная система имеет две степени свободы. Выберем обобщеные координаты: $q_1 = x$, $q_2 = s$ (неподвижная ось x связана с наклонной плоскостью, а подвижная ось s – с доской). Уравнения Лагранжа запишутся в виде

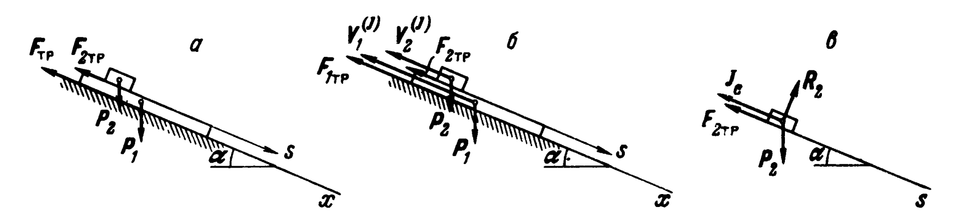
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s. \tag{1}$$

Вычисление обобщенных сил дает

$$Q_x = (M_1 + M_2) g \sin\alpha - F_{1\text{тр}} \cos\alpha,$$

$$Q_s = M_2 g \sin\alpha - F_{2\text{тр}} \cos\alpha.$$

Заметим, что когда при определении Q_x всей системе дается возможное



К задаче 11.8

перемещение δx, то работа силы трения $F_{2\text{тр}}$ равна нулю, ибо отсутствует перемещение груза относительно доски.

Так как $F_{1\text{тр}} = f_1 (M_1 + M_2) g \cos\alpha$, $F_{2\text{тр}} = f_2 M_2 g \cos\alpha$, то обобщенные силы равны

$$Q_x = (M_1 + M_2) g (\sin\alpha - f_1 \cos\alpha),$$
$$Q_s = M_2 g (\sin\alpha - f_2 \cos\alpha). \tag{2}$$

Кинематическая энергия системы равна $T = T^{(1)} + T^{(2)}$, где $T^{(1)}$ – кинетическая энергия доски, $T^{(1)} = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}^2$, а $T^{(2)}$ – кинетическая энергия груза, $T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M_2 (\dot{x} + \dot{s})^2$. Поэтому

$$T = \frac{M_1 + M_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{M_2}{2} \dot{s}^2 + M_2 \dot{x}\dot{s}. \tag{3}$$

Внеся значения (2) и (3) в уравнения (1), получим

$$(M_1 + M_2) \ddot{x} + M_2 \ddot{s} = (M_1 + M_2) g (\sin\alpha - f_1 \cos\alpha), \tag{4}$$
$$\ddot{x} + \ddot{s} = g (\sin\alpha - f_2 \cos\alpha).$$

2) При решении задачи с помощью общего уравнения динамики надо к силам, изображенным на рис. *а*, добавить главные векторы сил инерции доски и груза, проекции которых соответственно равны

$$V_{1x}^{(J)} = -M_1\ddot{x}, \qquad V_{2x}^{(J)} = -M_2(\ddot{x} + \ddot{s}). \tag{5}$$

В данном случае применение общего уравнения динамики дает

$$\begin{aligned} &(M_1 + M_2) g \sin\alpha\,\delta x - F_{1\text{тр}}\delta x + V_{1x}^{(J)}\delta x + V_{2x}^{(J)}\delta x = 0, \\ &M_2 g \sin\alpha\,\delta s - F_{2\text{тр}}\delta s + V_{2x}^{(J)}\delta s = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Использовав формулы (5), внеся значения $F_{1\text{тр}} = f_1(M_1 + M_2)g\cos\alpha$, $F_{2\text{тр}} = f_2 M_2 g \cos\alpha$ и затем сократив уравнения (6) на δx и δs, получим уравнения (4).

3) Эту задачу можно решить с помощью теоремы о движении центра масс системы и уравнения динамики относительного движения груза.

На рис. *б* изображены внешние силы системы. Заметим, что сила трения $F_{2\text{тр}}$ является внутренней силой.

Имеем

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \qquad M_2\ddot{s} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} + J_{ex}. \tag{7}$$

В данном случае

$$M\ddot{x}_C = M_1\ddot{x} + M_2(\ddot{x} + \ddot{s}), \qquad \sum F_{kx}^e = (M_1 + M_2) g \sin\alpha - F_{1\text{тр}}. \tag{8}$$

Подставив (8) в первое уравнение (7) и приняв во внимание, что $F_{1\text{тр}} = f_1(M_1 + M_2)g\cos\alpha$, получим первое уравнение (4).

Использовав рис. *в*, запишем уравнение динамики относительного движения груза:

$$M_2\ddot{s} = M_2 g \sin\alpha - F_{2\text{тр}} + J_{ex}. \tag{9}$$

Внеся в уравнение (9) $J_{ex} = -M_2\ddot{x}$, $F_{2\text{тр}} = f_2 M_2 g\cos\alpha$, находим второе уравнение (4).

В данном примере наиболее эффективным оказался третий метод, но читателю, не имеющему большого опыта в решении задач, трудно среди множества теорем и уравнений динамики остановить свой выбор на совокупности теорем о движении центра масс и уравнения динамики относительного движения. Решение подобных задач обычно сопровождается рядом неудачных попыток. Применение же уравнений Лагранжа обеспечивает эффективное составление дифференциальных уравнений движения системы.

§ 4. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Поступательное движение твердого тела. Наиболее общим приемом составления уравнений динамики поступательного движения твердого тела является применение *теоремы о движении центра масс материальной системы.* Теорема преимущественно используется в проекциях на оси декартовых координат. В число данных и искомых величин должны входить: масса твердого тела, уравнение движения одной из его точек, внешние силы системы. Решение вторых задач упрощается в случаях, когда главный вектор внешних сил, приложенных к твердому телу, постоянен либо зависит *только* от 1) времени, 2) положений точек системы, 3) скоростей точек системы, 4) ускорений точек системы. Труднее решать вторые задачи, в которых главный вектор внешних сил одновременно зависит от времени, положения, скоростей и ускорений точек системы.

В некоторых случаях, используя общие теоремы динамики, можно сразу получить первые интегралы дифференциальных уравнений движения и тем самым упростить решение задачи.

Теорему об изменении количеств движения в интегральной форме применяют в задачах, где *силы или их проекции постоянны либо зависят от времени*, а в число данных и искомых величин входят: масса твердого тела, внешние силы, приложенные к твердому телу, промежуток времени действия сил, скорости центра масс (либо любой другой точки) в начале и в конце этого промежутка времени.

Теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме применяют в задачах, где *силы постоянны либо зависят от положений точек твердого тела*, а в число данных и неизвестных величин входят: масса твердого тела, внешние силы, приложенные к твердому телу, перемещение центра масс (либо любой другой точки), скорости центра масс (либо любой другой точки) в начале и в конце этого перемещения.

2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Наиболее удобно при решении задач пользоваться *дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.* В число данных и неизвестных должны входить: момент инерции твердого тела относительно оси вращения, уравнение вращения твердого тела, внешние силы, приложенные к твердому телу.

Решение вторых задач упрощается в случаях, когда главный момент внешних сил относительно оси вращения постоянен либо зависит *только* от: 1) времени, 2) угла поворота, 3) угловой скорости, 4) углового ускорения твердого тела. Труднее решать задачи, в которых главный момент внешних сил одновременно зависит от времени, угла поворота, угловой скорости и углового ускорения твердого тела. В этих случаях легко решаются задачи, которые приводятся к линейным дифференциальным уравнениям.

Можно получить первые интегралы дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, используя *теорему об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме.* Это осуществимо в задачах, где *главный момент внешних сил постоянен либо зависит от угла поворота твердого тела*, а в число данных и неизвестных величин входят: момент инерции твердого тела относительно оси вращения, внешние силы, приложенные к твердому телу, угловое перемещение, угловые скорости твердого тела в начале и в конце этого углового перемещения.

При определении *динамических давлений на ось твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси*, целесообразно применять теоремы о движении центра масс и об изменении главного момента количеств движения материальной системы либо пользоваться методом кинетостатики (в случае плоской фигуры, перпендикулярной к оси вращения, достаточно применить теорему о движении центра масс).

Задача 11.9. Стержень длиной $2l$ и массой M вращается в горизонтальной плоскости вокруг перпендикулярной оси z, проходящей через его конец (рис. *а*).

Какую угловую скорость ω_0 надо сообщить стержню для того, чтобы он сделал n оборотов? Решить задачу в двух вариантах, считая, что момент сопротивления: 1) постоянен и равен $m_z = -\alpha$; 2) пропорционален угловой скорости стержня $m_z = -\beta\dot{\varphi}$.

Р е ш е н и е. В первом варианте при $m_z = -\alpha$ можно применить теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме. В данном случае

$$T_1 = \frac{1}{2} I_z \omega_0^2 = \frac{2}{3} Ml^2 \omega_0^2, \qquad T_2 = 0,$$

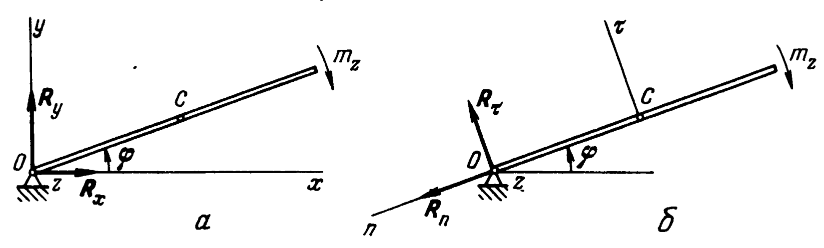
$$\Sigma A(F_k^e) = -\int_0^{2\pi n} m_z d\varphi = -2\pi n\alpha.$$

Подставив эти значения в $T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e)$, определим ω_0.

Во втором варианте мы не можем воспользоваться этой теоремой, ибо при моменте, зависящем от угловой скорости, нельзя определить его работу: $A(m_z) = -\beta \int_0^{2\pi n} \dot{\varphi} d\varphi$. Мы не можем вычислить этот интеграл, ибо неизвестна зависимость $\dot{\varphi}$ от φ. В этом случае надо применить дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e).$$

Имеем $\frac{4}{3}Ml^2\ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi}$. Умножив уравнение на $d\varphi$, заменив $\ddot{\varphi}d\varphi$ на $\dot{\varphi}d\dot{\varphi}$ и проинтегрировав его, найдем зависимость $\dot{\varphi}$ от φ и определим ω_0 (конечно, дифференциальным уравнением вращения вокруг неподвижной оси можно было воспользоваться и в первом варианте, но при этом решение задачи было бы более длинным).



К задаче 11.9

Допустим, что по условию требуется также найти силу давления стержня на ось вращения z. Здесь можно воспользоваться теоремой о движении центра масс в проекциях на неподвижные оси x и y. Заметив, что $x_C = l\cos\varphi$, $y_C = l\sin\varphi$, вычислим: $\ddot{x}_C = -l\dot{\varphi}^2\cos\varphi - l\ddot{\varphi}\sin\varphi$, $\ddot{y}_C = -l\dot{\varphi}^2\sin\varphi + l\ddot{\varphi}\cos\varphi$. Кроме того, $\Sigma F_{kx}^e = R_x$, $\Sigma F_{ky}^e = R_y$. Подставив значения $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, ΣF_{kx}^e и ΣF_{ky}^e в уравнения $M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e$, $M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e$, найдем R_x и R_y. Проекции силы давления N равны $N_x = -R_x$, $N_y = -R_y$, т.е.

$$N_x = Ml(\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi), \qquad N_y = Ml(\dot{\varphi}^2\sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi).$$

Нетрудно видеть, что N_x и N_y переменны. Для определения их значений надо предварительно с помощью дифференциального уравнения вращения найти зависимости $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}$ от угла поворота φ. Модуль N равен

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = Ml\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}.$$

Заметим, что для определения силы давления целесообразнее воспользоваться теоремой о движении центра масс в проекциях на подвижные оси натурального триэдра траектории точки C (рис. *б*): $Ma_{C_\tau} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}^e$, $Ma_{C_n} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}^e$. Учтя, что $a_{C_\tau} = l\ddot{\varphi}$, $a_{C_n} = l\dot{\varphi}^2$, а $\Sigma F_{k\tau}^e = R_\tau$, $\Sigma F_{kn}^e = R_n$, получим $R_\tau = Ml\ddot{\varphi}$, $R_n = Ml\dot{\varphi}^2$. Значит, $N_\tau = -R_\tau = -Ml\ddot{\varphi}$, $N_n = -R_n = -Ml\dot{\varphi}^2$. Модуль искомой силы давления N равен $N = \sqrt{N_\tau^2 + N_n^2} = Ml\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}$.

Определение давления на неподвижную ось с помощью неподвижных осей xy и подвижных осей натурального триэдра вновь подчеркивает важность удачного выбора системы отсчета.

3. **Плоское движение твердого тела.** Наиболее общим приемом составления уравнений в задачах, где определяются реакции связей либо закон движения, является применение *дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела.* В число данных и неизвестных величин должны входить: масса и момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно неподвижной плоскости, уравнения движения центра масс, уравнение вращения твердого тела вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно неподвижной плоскости, внешние силы, приложенные к твердому телу.

Решение вторых задач упрощается в случаях, когда главный вектор и главный момент внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно неподвижной плоскости, являются постоянными либо зависят только: 1) от времени, 2) от положения точек, 3) от скоростей точек, 4) от ускорений точек. Труднее решать задачи, в которых главный вектор и главный момент внешних сил одновременно зависят от времени, положения, скоростей и ускорений точек.

Если требуется определить только закон плоского движения твердого тела, то для составления дифференциальных уравнений движения, не содержащих реакций связей, можно при наличии идеальных связей, наложенных на твердое тело, применять уравнения Лагранжа или общее уравнение динамики.

Можно упростить интегрирование дифференциальных уравнений движения, используя *теорему об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме*, в задачах, где *главный вектор и главный момент сил, приложенных к твердому телу, постоянны либо зависят от положений точек (угла поворота) твердого тела*, а в число данных и неизвестных величин входят масса и момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно неподвижной плоскости, силы, приложенные к твердому телу, перемещения точек твердого тела (угловые перемещения), скорости точек твердого тела (угловые скорости) в начале и в конце этих перемещений.

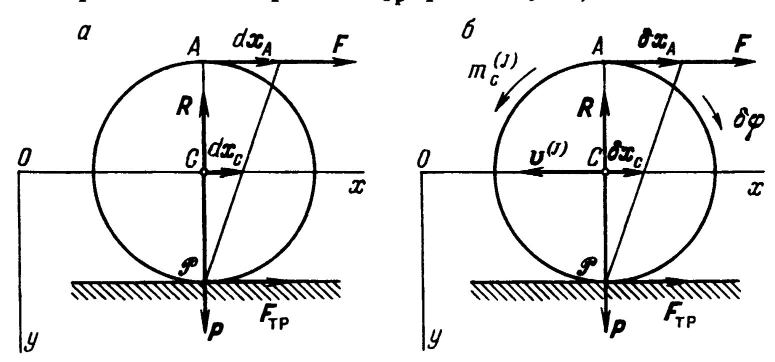
Задача 11.10. На обод колеса массой M намотана невесомая нить, к концу которой приложена горизонтальная сила F (рис. *а*).

Определить ускорение центра масс C колеса при качении его без скольжения по горизонтальной дороге. В начальный момент колесо находилось в покое. Считать его однородным круглым диском. Трением качения пренебречь.

Решение. Для определения скорости $\mathbf{v}_C$ можно воспользоваться рядом теорем и уравнений динамики. Применим: 1) теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, 2) уравнения Лагран-

жа, 3) общее уравнение динамики, 4) метод кинетостатики, 5) дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

1) Кинетическая энергия колеса равна $T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{3}{4} M \dot{x}_C^2$. Элементарная работа сил, приложенных к колесу, на перемещении dx_C (рис. *а*) равна $\delta A = F\,dx_A = 2F\,dx_C$. (Напомним, что при качении без скольжения работа силы трения $F_{тр}$ равна нулю). Подставив T и δA в



К задаче 11.10

теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме $dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_n$, получим $\frac{3}{2} M \dot{x}_C d\dot{x}_C = 2F\,dx_C$. Так как

$$\dot{x}_C d\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} d\dot{x}_C = \ddot{x}_C dx_C,$$

то получим $\ddot{x}_C = \frac{4}{3} \frac{F}{M}$.

2) Вычислим обобщенную силу Q_x. Так как $\delta A = F \delta x_A = 2F \delta x_C$, то $Q_x = 2F$. Подставив Q_x и $T = \frac{3}{4} M \dot{x}_C^2$ в уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, получим $\ddot{x}_C = \frac{4}{3} \frac{F}{M}$.

3) Общее уравнение динамики в данном случае (рис. *б*) имеет вид $F \delta x_A + V_k^{(J)} \delta x_C + m_C^{(J)} \delta\varphi = 0$.

Приняв во внимание, что

$$\delta x_A = 2\delta x_C, \qquad V_x^{(J)} = -M\ddot{x}_C,$$

$$m_C^{(J)} = -I_C \ddot{\varphi} = -\frac{Mr^2}{2} \frac{\ddot{x}_C}{r} = -\frac{Mr}{2} \ddot{x}_C, \qquad \delta\varphi = \frac{\delta x_C}{r},$$

получим $\ddot{x}_C = \frac{4}{3} \frac{F}{M}$.

4) Применив метод кинетостатики (рис. *б*), составим уравнения "равновесия": $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0$, $\sum_{k=1}^{n} m_C(F_k) = 0$. Имеем $F + F_{тр} + V_x^{(J)} = 0$, $Fr - F_{тр}r + m_C^{(J)} = 0$. Так как по-прежнему $V_x^{(J)} = -M\ddot{x}_C$, $m_C^{(J)} = -\frac{Mr}{2}\ddot{x}_C$, то уравнения примут вид $F + F_{тр} - M\ddot{x}_C = 0$, $F - F_{тр} - \frac{M}{2}\ddot{x}_C = 0$. Исключив из этой системы $F_{тр}$, находим $\ddot{x}_C = \frac{4}{3}\frac{F}{M}$.

5) Запишем дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела: $M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e$, $M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e$, $I_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_C(F_k^e)$. В данном случае (рис. *а*) они имеют вид

$$M\ddot{x}_C = F + F_{тр}, \qquad M\ddot{y}_C = Mg - R, \qquad \frac{Mr^2}{2}\ddot{\varphi} = Fr - F_{тр}r.$$

Учтя, что при качении колеса без скольжения $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$, после исключения $F_{тр}$ из первого и третьего уравнений получим $\ddot{x}_C = \frac{4}{3}\frac{F}{M}$.

Сопоставление пяти методов решения этой задачи показывает, что наиболее эффективными являются первые два (теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме и уравнения Лагранжа). С помощью общего уравнения динамики также (но несколько сложнее) составляется лишь одно уравнение. Однако при этом приходится использовать формальный прием введения сил инерции. Применение метода кинетостатики и дифференциальных уравнений плоского движения приводит к составлению не одного, а двух уравнений и поэтому является более громоздким. При этом метод кинетостатики более сложен, ибо дополнительно связан с введением сил инерции.

Вместе с тем, если бы требовалось, кроме ускорения центра масс колеса, также определить силу трения $F_{тр}$, то, пользуясь первыми тремя методами, нам пришлось бы дополнительно составить дифференциальное уравнение плоского движения $M\ddot{x}_C = F + F_{тр}$ либо тождественное ему уравнение кинетостатики: $F + F_{тр} + V_x^{(J)} = 0$, где $V_x^{(J)} = -M\ddot{x}_C$, и, подставив значение $\ddot{x}_C = \frac{4}{3}\frac{F}{M}$, найти $F_{тр} = \frac{1}{3}F$.

Итак, если по условию задачи требуется определить лишь уравнения движения, то следует пользоваться одним из первых трех методов. Если же, помимо уравнений движения, необходимо также определить какие-либо силы, то следует пользоваться двумя последними методами (отдавая

предпочтение дифференциальным уравнениям плоского движения твердого тела).

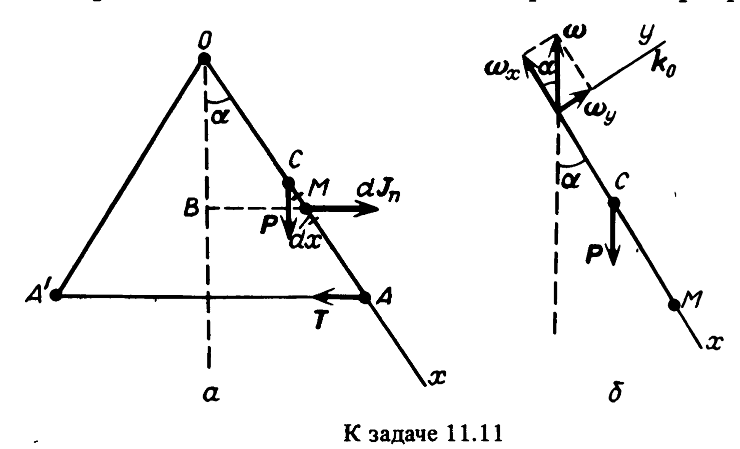
4. **Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела** рассмотрены в третьем томе. В этом томе дана только приближенная теория гироскопов.

В случае симметричного твердого тела (гироскопа), угловая скорость вращения которого вокруг оси симметрии значительно больше угловой скорости вращения вокруг других осей, можно при приближенном решении задач применять *теорему Резаля.* С помощью приближенной теории гироскопов возможно определение угловых скоростей вращения либо динамических давлений на связи.

Задача 11.11. Два однородных тонких стержня, имеющих одинаковые длину l и массу m, шарнирно соединены на одном конце, а другие их концы соединены гибкой нерастяжимой нитью той же длины. Вся система расположена в вертикальной плоскости (стержни симметричны относительно вертикальной оси) и вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью (рис. *а*).

При каком минимальном значении угловой скорости нить будет натянута? Каково будет натяжение нити, если угловая скорость будет вдвое выше указанной минимальной?

Решение. *Способ 1.* Применим метод кинетостатики. Тогда к действующим на стержень силам — силам тяжести и реакции шарнира — нужно



К задаче 11.11

добавить только нормальные силы инерции, поскольку вращение равномерное.

Для определения искомой величины нужно только одно уравнение. Ввиду того что определение силы реакции не требуется, очевидно, таким уравнением должно быть уравнение моментов относительно точки подвеса O.

Обозначим угол отклонения стержня от вертикали через α, силу тяжести стержня P, натяжение нити T, нормальную силу инерции dJ_n, действующую на элемент dx стержня. Кроме того, C – центр масс стержня, BM – перпендикуляр, опущенный из точки M стержня на ось, $OM = x$. Имеем $P = mg$. Расстояние от точки M до оси вращения равно $|\overline{BM}| = x\sin\alpha$. Поскольку стержень однороден, то масса единицы длины равна m/l, а масса элемента длиной dx соответственно

$$dm = \frac{m}{l}\,dx.$$

Нормальная сила инерции, действующая на этот элемент, равна

$$dJ_n = \omega^2 |\overline{BM}|\,dm = \omega^2 x\sin\alpha\cdot\frac{m}{l}\,dx = \frac{m\omega^2\sin\alpha}{l}\,x\,dx,$$

где ω – угловая скорость вращения.

Поскольку при ответе на первый вопрос считается, что нить только натянулась, то ее натяжение нужно пока считать равным нулю, т.е. $T = 0$. Таким образом, при составлении уравнения моментов относительно точки O нужно учитывать только силы тяжести и силы инерции.

Для вычисления момента сил инерции относительно точки O нужно проинтегрировать момент сил инерции, действующих на элементы стержня. Элементарный момент равен

$$dm_O = |\overline{OB}|\,dJ_n.$$

Но $|\overline{OB}| = x\cos\alpha$. Таким образом,

$$dm_O = \frac{m\omega^2\sin\alpha\cos\alpha}{l}\,x^2 dx.$$

Следовательно, момент сил инерции относительно точки O равен

$$m_O = \int_0^l \frac{m\omega^2\sin\alpha\cos\alpha}{l}\,x^2 dx = \frac{m\omega^2\sin\alpha\cos\alpha}{l}\,\frac{l^3}{3}.$$

Составляя уравнение моментов и учитывая, что $OC = l/2$, имеем

$$\Sigma m_O = m\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{l^2}{3} - mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0. \qquad (1)$$

Отсюда

$$\omega^2 = \frac{3g}{2l\cos\alpha}.$$

По условию длина нити AA' равна длине стержня. Следовательно, треугольник OAA' равносторонний и угол α, равный (по симметрии) половине угла при вершине, равен 30°. Отсюда, обозначая через ω_{min} ту минимальную угловую скорость, при которой нить только становится натянутой, имеем

$$\omega^2_{min} = \frac{3g}{2l\cos 30^\circ} = \frac{g}{l}\sqrt{3}.$$

Для ответа на второй вопрос нужно считать, что угловая скорость равна $\omega = 2\omega_{min}$. Таким образом,

$$\omega^2 = \frac{4g}{l}\sqrt{3}. \qquad (2)$$

В уравнении моментов (1) нужно учесть теперь еще и момент силы T. Имеем

$$\Sigma m_O = m\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{l^2}{3} - mg\frac{l}{2}\sin\alpha - Tl\cos\alpha = 0.$$

Отсюда, подставляя (2), имеем

$$T\cos\alpha = \frac{4mg\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{3}}{3} - \frac{mg}{2}\sin\alpha.$$

Учитывая, что $\alpha = 30^\circ$, получаем

$$T\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{mg}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}mg.$$

Отсюда

$$T = \frac{\sqrt{3}}{2}mg = \frac{\sqrt{3}}{2}P.$$

Способ 2. Можно предложить и другое решение той же задачи, основанное на теореме Резаля, но для этого нужно вычислить главный момент количества движения стержня (кинетический момент) относительно точки подвеса. Разлагая вектор угловой скорости на две компоненты (рис. *б*) – вдоль стержня и перпендикулярно стержню ($\vec{\omega}_x$ и $\vec{\omega}_y$), можно видеть, что, поскольку стержень тонкий, его момент инерции относительно оси Ox следует принять равным нулю. Следовательно, равна нулю и соответствующая составляющая кинетического момента. Таким образом, кинетический момент совпадает по направлению с осью Oy. Поскольку момент инерции относительно оси Oy совпадает с моментом инерции стержня

относительно его конца, имеем

$$L_O = I_O \omega_y = \frac{ml}{3}\,\omega \sin\alpha. \tag{3}$$

При равномерном вращении стержня вектор кинетического момента вращается вместе со стержнем и с той же угловой скоростью, сохраняя постоянной длину. Следовательно, скорость его конца равна

$$u = \omega L_O \cos\alpha. \tag{4}$$

По теореме Резаля

$$u = M_O, \tag{5}$$

где M_O — главный момент всех внешних сил относительно точки O.

Если рассматривается первый вопрос задачи (ищется минимальная угловая скорость, при которой нить натянута), то единственной внешней силой, дающей момент относительно точки O является сила тяжести. Этот момент равен

$$M_O = P\frac{l}{2}\sin\alpha = mg\frac{l}{2}\sin\alpha. \tag{6}$$

Из (3) – (6) получаем

$$\omega\frac{ml^2}{3}\,\omega\sin\alpha\cos\alpha = mg\frac{l}{2}\sin\alpha\,.$$

Учитывая, что в положении, когда нить натянута ($\alpha = 30^\circ$, причем, поскольку натяжение было принято равным нулю, соответствующая угловая скорость является минимальной) имеем

$$\omega^2_{\min} = \frac{3g}{2l\cos 30^\circ} = \frac{g}{l}\sqrt{3},$$

что совпадает с ответом, полученным первым способом.

Аналогично находится ответ на второй вопрос, если включить в (6) момент силы натяжения T.

При решении считалось, что вращение происходит в направлении против хода часовой стрелки, если смотреть на стержни сверху. Если вращение происходит в противоположном направлении, это не изменит, разумеется, направления момента сил, но изменит направление кинетического момента, однако направление скорости его конца сохранит то же направление, поскольку угловая скорость также изменит направление.

Задача 11.12. Вычислить угловую скорость прецессии и уход главной оси гироскопа межконтинентальной баллистической ракеты за время ее полета. Угловая скорость гироскопа вокруг оси симметрии равна $n = 100\,000$ об/мин. Момент внешних сил, возникающий из-за несовпадения

центра тяжести ротора гироскопа с неподвижной точкой равен $M_0^e = 1$ Н·мм (несовпадение этих двух точек возникает из-за неизбежных неточностей изготовления гироскопа). Момент инерции ротора гироскопа относительно его оси симметрии равен $I = 300$ г·мм². Время полета баллистической ракеты равно 30 мин.

Решение. Кинетический момент ротора гироскопа равен

$$L_z = I\omega = 300\ \frac{2\pi n}{60} = 1\,000\,000\pi\frac{\text{г}\cdot\text{мм}^2}{\text{с}}.$$

Угловая скорость прецессии находится по формуле

$$\omega_1 = \frac{M_0^e}{L_z \sin(\vec{\omega}_1 L_z)} = \frac{1}{1\,000\,000\pi\cdot\sin 90^\circ} = \frac{1}{3\,140\,000}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Уход главной оси за время полета баллистической ракеты равен произведению угловой скорости прецессии на время полета ракеты:

$$\varphi = \omega_1 30\cdot 60 = \frac{30\cdot 60}{3\,140\,000} = 0{,}000573\ \text{рад}.$$

Качество свободного гироскопа определяется его уходом. Чем меньше уход за 1 мин, тем выше качество и, следовательно, стоимость гироскопа. Уход оси гироскопа тем меньше, чем точнее изготовлен гироскоп и чем больше его угловая скорость.

Задача 11.13. Угловая скорость вращения гироскопа относительно оси симметрии равна $\omega = 100\,000$ об/мин. Переносная угловая скорость вращения оси симметрии гироскопа (угловая скорость прецессии) равна $\omega_1 = 1$ об/мин. Вектор переносной угловой скорости перпендикулярен вектору относительной угловой скорости.

Определить модуль абсолютной угловой скорости гироскопа и ее направление при использовании элементарной теории гироскопа и сравнить с их точными значениями.

Решение. Находим точное значение абсолютной угловой скорости гироскопа

$$\omega_a = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2} = \omega\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2} \approx \omega\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right) = \omega\left(1 + \frac{1}{2\cdot 10^{10}}\right)$$

т.е. значение абсолютной скорости ω_a отличается от относительной скорости ω на $1/(2\cdot 10^{10})$.

Переходим к определению угла α между ω_a и ω:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{100\,000}.$$

Отсюда

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = 0{,}57 \cdot 10^{-3} \cdot 360 = 0{,}208''.$$

Эти расчеты показывают, что при $\omega \gg \omega_1$ допущения элементарной теории гироскопов вполне приемлемы.

Задача 11.14. Ротор турбины, ось которого параллельна продольной оси судна, вращается с угловой скоростью ω = 3000 об/мин. Масса ротора 18 000 кг. Радиус инерции ротора равен $\rho = 1{,}5$ м.

Определить добавочные силы гироскопического давления на подшипники качения, расстояние между которыми равно 7 м, если судно совершает циркуляцию, поворачиваясь на 10° в секунду?

Р е ш е н и е. При вращении ротора образуется момент количества движения $\boldsymbol{L}$, направленный вдоль оси вращения. Этот момент равен

$$L = I_x \omega, \tag{1}$$

где I_x — момент инерции относительно оси ротора, а ω — угловая скорость. При повороте корабля меняется направление этого момента (изменением модуля момента можно пренебречь, поскольку угловая скорость поворота мала по сравнению с угловой скоростью вращения ротора турбины). Согласно закону изменения момента количества движения,

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}^e, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{M}^e$ — момент внешних сил (в данном случае это момент пары сил, действующих от двух подшипников на вал турбины). С другой стороны,

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{u}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{u}$ — скорость конца вектора момента количества движения по его годографу. Поскольку абсолютную величину $\boldsymbol{L}$, как отмечено выше, можно считать постоянной, то

$$\boldsymbol{u} = \vec{\omega}_1 \times \boldsymbol{L}, \tag{4}$$

где $\vec{\omega}_1$ — угловая скорость поворота корабля (циркуляции).

Угловая скорость $\vec{\omega}_1$ направлена по вертикали, а $\boldsymbol{L}$ лежит в горизонтальной плоскости. Поэтому они взаимно перпендикулярны. Отсюда

$$u = |\vec{\omega}_1| \cdot |\boldsymbol{L}| \sin(\widehat{\vec{\omega}_1, \boldsymbol{L}}) = \omega_1 L. \tag{5}$$

Поскольку момент инерции ротора равен

$$I = m\rho^2, \tag{6}$$

где m — масса ротора, то из (1), (5) и (6) получим

$$u = m\rho^2 \omega\omega_1. \tag{7}$$

Обозначая каждую из реакций подшипников через N, а расстояние между ними – через l, имеем для момента пары

$$M^e = Nl. \tag{8}$$

Приравнивая, согласно (2) и (3), выражения (7) и (8), найдем

$$Nl = m\rho^2 \omega\omega_1, \tag{9}$$

или

$$N = \frac{m\rho^2 \omega\omega_1}{l}. \tag{10}$$

Для нахождения реакции необходимо перевести все числовые данные в одну систему (используем систему СИ):

$$m = 18\,000 \text{ кг}, \quad \rho = 1{,}5 \text{ м}, \quad \omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 3000}{30} = 100\pi \text{ рад/с},$$

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot 10^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{36} \text{ рад/с}, \quad l = 7 \text{ м}.$$

Подставляя в формулу (10), получаем

$$N = \frac{m\rho^2 \omega\omega_1}{l} = \frac{1{,}8 \cdot 10^4 \cdot 1{,}5^2 \cdot 100\pi\pi}{7 \cdot 36} = 1{,}543 \cdot 10^5 \text{ Н} = 1{,}543 \cdot 10^2 \text{ кН}.$$

Это реакция подшипника. Такова же, естественно, сила гироскопического давления вала турбины на подшипник.

5. **Принцип возможных перемещений**. Решение задач с применением принципа возможных перемещений рассмотрено в настоящем томе, хотя задачи относятся к статике, а не к динамике. Вызвано это тем, что изучение равновесия сложных систем, состоящих из большого числа тел, с наложенными голономными связями методами, изложенными в статике твердого тела, малоэффективно.

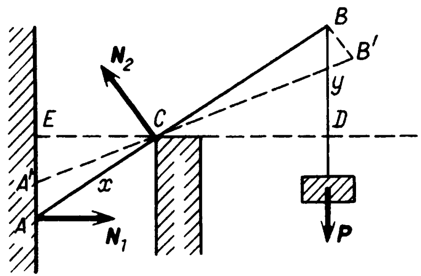
Здесь целесообразно использовать принцип возможных перемещений, основанный на понятиях идеальных связей, возможных перемещениях и работе сил. Эти понятия вводятся в динамике и поэтому этот раздел включен в настоящий том.

В случае системы с несколькими степенями свободы выбираем число независимых возможных перемещений системы равным числу степеней свободы системы. Так, например, для твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил, имеется три независимых возможных перемещения, так как у такого твердого тела три степени свободы.

Задача 11.15. Стержень AB длиной l, массой которого пренебрегаем, опирается концом A на вертикальную абсолютно гладкую стену. В точке C стержень опирается на угол стены (рис.). В точке B подвешен груз силой тяжести $\boldsymbol{P}$. Трением в точке C пренебречь. Кратчайшее расстояние между стенами равно $EC = b$.

Определить угол, образованный стержнем AB с горизонтом в положении равновесия, а также реакции N_1 и N_2.

Р е ш е н и е. Стержень AB находится в равновесии под действием трех сил: силы тяжести P, реакции N_1 и реакции N_2. Для определения трех неизвестных – угла стержня с горизонтом, реакций N_1 и N_2 применим принцип возможных перемещений.



К задаче 11.15

Дадим сначала стержню такое перемещение, чтобы работа неизвестных сил N_1 и N_2 была равна нулю. Тогда из составленного уравнения можно непосредственно найти угол, образованный стержнем с горизонтом. Пусть точка стержня A переместится по вертикали на малое расстояние AA'. Стержень, опирающийся на угол в точке C, может проскальзывать, не отрываясь от стены. Тогда стержень займет новое положение $A'B'$.

Элементарная работа силы N_1 на таком возможном перемещении равна нулю, так как сила и возможное перемещение взаимно перпендикулярны.

Элементарная работа силы N_2 на этом возможном перемещении также равна нулю. Действительно, скорость любой точки стержня можно рассматривать как сумму скорости полюса C, направленной вдоль стержня, и вращательной скорости вокруг точки C. Но для точки C ее скорость будет содержать только первую составляющую. Следовательно, угол между реакцией N_2 и возможным перемещением, совпадающим по направлению со скоростью этой точки, равен 90°. Тогда, согласно принципу возможных перемещений, работа силы P на возможном перемещении должна быть равна нулю:

$$\delta A = P \cdot BB' \cos(\widehat{P, BB'}) = -P \cdot \delta y = 0. \qquad (1)$$

Это – первое уравнение принципа возможных перемещений. Так как $P \neq 0$, то должно быть $\delta y = 0$. Для нахождения δy рассмотрим подобные треугольники AEC и CBD. Обозначим для краткости $AC = x$, $BD = y$. Тогда

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AE}{AC}, \quad \text{или} \quad \frac{y}{l-x} = \frac{\sqrt{x^2 - b^2}}{x}. \qquad (2)$$

Следовательно,

$$y = \frac{(l-x)\sqrt{x^2 - b^2}}{x}. \qquad (3)$$

Дифференцируя эту функцию, находим

$$\delta y = \frac{lb^2 - x^3}{x^2\sqrt{x^2 - b^2}}\,\delta x. \qquad (4)$$

Знаменатель правой части уравнения (4) не может обратиться в бесконечность. Следовательно, $\delta y = 0$, если

$$(lb^2 - x^3)\,\delta x = 0. \qquad (5)$$

Но δx не может обратиться в нуль. Наименьшее значение δx принимает, когда балка AB занимает горизонтальное положение. Но, во-первых, это положение не является равновесным. Во-вторых, и здесь δx – бесконечно малая величина высшего порядка.

Тогда из (5) следует

$$lb^2 - x^3 = 0, \qquad (6)$$

или

$$x = \sqrt[3]{lb^2}. \qquad (7)$$

Положение стержня, определяемое (7), и есть единственно возможное положение равновесия.

Переходим к определению реакций N_1 и N_2. Для нахождения реакции N_2 дадим стержню поступательное перемещение вверх, равное δy. Тогда элементарные работы сил будут равны:

$$\delta A_1 = N_1 \delta y \cos 90^\circ = 0,$$

$$\delta A_2 = N_2 \cos(\widehat{N_2, \delta y})\,\delta y = N_2 \frac{b}{x}\,\delta y,$$

$$\delta A_p = -P\,\delta y.$$

Второе уравнение принципа возможных перемещений имеет вид

$$\left(N_2 \frac{b}{x} - P\right)\delta y = 0,$$

откуда определяем с учетом (7)

$$N_2 = \frac{x}{b} P = P\sqrt[3]{\frac{l}{b}}.$$

Для определения реакции N_1 дадим стержню возможное перемещение δx, направленное вдоль стержня. Элементарная работа сил, приложенных к

стержню, равна

$$\delta A_1 = \frac{b}{x} N_1\,\delta x,\quad \delta A_2 = N_2\,\delta x \cos 90^\circ = 0,$$

$$\delta A_P = P\cos(\widehat{P,\delta x})\,\delta x = -P\frac{\sqrt{x^2-b^2}}{x}\,\delta x.$$

Внося эти значения в уравнение принципа возможных перемещений, находим

$$\left(N_1\frac{b}{x} - P\frac{\sqrt{x^2-b^2}}{x}\right)\delta x = 0,$$

откуда

$$N_1 = P\frac{\sqrt{x^2-b^2}}{b} = P\sqrt{\frac{l^{2/3}-b^{2/3}}{b^{2/3}}}.$$

Таким образом, для плоской системы сил составлены три уравнения принципа возможных перемещений и найдены три неизвестных – две реакции и угол, определяющий положение равновесия. Применение принципа возможных перемещений к новому, четвертому возможному перемещению твердого тела, естественно, ничего нового дать не может.

§ 5. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

1. Эффективность решения задач динамики в значительной мере зависит от удачного выбора системы координат.

2. Основными и вместе с тем наиболее трудными являются вторые задачи динамики, в которых по заданным силам определяется движение. При этом приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений движения. Эти задачи редко удается решить в квадратурах. Иногда приходится применять различные приближенные методы интегрирования.

3. Удобство применения общих теорем динамики заключается в возможности упростить интегрирование дифференциальных уравнений движения системы. В формулировки общих теорем динамики не входят внутренние силы, определение которых обычно связано со значительными трудностями (это замечание о внутренних силах в равной мере относится к дифференциальному уравнению вращения твердого тела вокруг неподвижной оси и дифференциальным уравнениям плоского движения твердого тела). Лишь в формулировку теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы входят не только внешние, но и внутренние силы (в частном случае неизменяемой материальной системы, например абсолютно твердого тела, и в этой теореме фигурируют только внешние силы). Однако, как показано выше, общие теоремы не всегда эффективны.

4. Наиболее общим приемом составления дифференциальных уравнений движения материальной системы является применение уравнений Лагранжа. (Применение общего уравнения динамики является более трудным и длинным методом в связи с использованием сил инерции.)

Вместо сочетания некоторых общих теорем и уравнений динамики, выбор которых представляет значительные трудности, применение уравнений Лагранжа является общим приемом, который приводит к составлению дифференциальных уравнений движения. Удачный выбор обобщенных координат обеспечивает относительную простоту составления этих уравнений. Удобно и то, что в составленные дифференциальные уравнения движения не входят реакции идеальных связей, определение которых обычно связано с большими трудностями (реакции связей при движении системы являются функциями от времени, положения, скоростей и ускорений точек системы).

Однако применение уравнений Лагранжа приводит к относительно меньшей наглядности, а также к необходимости интегрирования дифференциальных уравнений движения в тех случаях, когда первые интегралы могут быть получены из общих теорем. Кроме того, уравнениями Лагранжа нецелесообразно пользоваться при наличии сил трения, зависящих от переменного нормального давления.

5. Применяя общие теоремы динамики в абсолютном движении, дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела, уравнения Лагранжа, часто в число рассматриваемых сил ошибочно включают силы инерции. Следует помнить, что силами инерции следует пользоваться только в случае применения: а) метода кинетостатики, б) общего уравнения динамики, в) уравнений и общих теорем в относительном (либо переносном) движении материальной точки или материальной системы.

6. При решении задач с помощью общих теорем динамики а также при применении дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси и дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела силы разделяются на внешние и внутренние.

При решении задач с помощью уравнений Лагранжа, общего уравнения динамики и метода кинетостатики силы разделяются на активные и реакции связей.

Глава 12

УДАР

§ 1. УДАР ДВУХ ТЕЛ. УДАР ТЕЛА О НЕПОДВИЖНУЮ ПРЕГРАДУ

Ударом называется механическое взаимодействие материальных тел приводящее к конечному изменению скоростей их точек за бесконечно малый промежуток времени. Этот промежуток времени называется *временем удара.*

При ударе тела о неподвижную поверхность или при соударении двух движущихся тел имеет место процесс деформации тел вблизи точки их соприкосновения. При этом возникает и распространяется волна сжатия внутри соударяющихся тел. Изучение этого процесса выходит за рамки теоретической механики абсолютно твердого тела и требует учета деформируемости соударяющихся тел.

Теоретическая механика изучает лишь движение точки или твердого тела до и после удара, рассматривая удар как некоторое скачкообразное явление, продолжительность которого бесконечно мала. Так, например, продолжительность удара двух латунных шариков диаметром по 26 мм при относительной скорости сближения 74 мм/с равна $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ с.

При ударе в течение бесконечно малого промежутка времени действует ударная сила. *Ударной силой* называется сила, импульс которой за время удара является конечной величиной. Модуль ударной силы может в тысячи и даже в десятки тысяч раз превосходить конечные по модулю силы, например силы тяжести, силы сопротивления воздуха или воды, силы трения. Импульсы конечных по модулю сил за бесконечно малое время удара будут бесконечно малы, и ими при изучении удара пренебрегают.

Напомним, что если конечная по модулю сила F действует в течение времени τ, начиная свое действие в момент времени t, то ее импульс имеет вид

$$S = \int_t^{t+\tau} F\,dt.$$

Для определения ударного импульса S совершаем в соответствии со сказанным выше предельный переход, устремляя F к бесконечности и τ –

к нулю, т.е.

$$S = \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ F \to \infty}} \int_{\tau}^{t+\tau} F\,dt.$$

Здесь предполагается, что бесконечно большая ударная сила действует бесконечно малый промежуток времени; при этом считается, что ударный импульс S имеет конечное значение.

Применяя при ударе теорему об изменении количества движения в интегральной форме, следует учитывать только импульсы ударных сил. Теорему об изменении количества движения часто называют для краткости *теоремой импульсов*.

При действии ударной силы перемещение точки приложения силы равно нулю, а скорость точки скачкообразно меняется:

$$v_2 = v_1 + \frac{S}{m}.$$

В действительности скачок скорости происходит в течение очень малого промежутка времени.

Линией центров называется ось, проходящая через центры масс соударяющихся тел.

Удар называется *центральным*, если линия действия ударного импульса, приложенного к ударяемому телу, проходит через его центр масс. На рис.12.1 показаны условия, при соблюдении которых удар будет центральным: точка K соприкосновения соударяющихся тел 1 и 2 должна лежать на прямой линии C_1C_2, соединяющей центры масс обоих тел, а касательная плоскость, проведенная в точке соприкосновения к поверхности этих тел, должна быть перпендикулярна прямой C_1C_2, соединяющей центры масс соударяющихся тел.

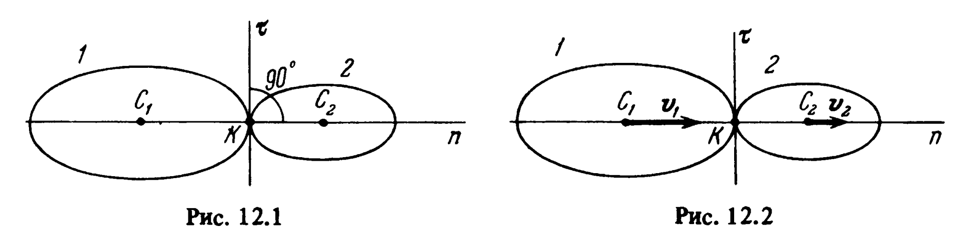


Рис. 12.1 Рис. 12.2

Удар называется *прямым*, если скорость центров масс соударяющихся тел 1 и 2 в начале удара лежит на прямой линии C_1C_2, соединяющей их центры масс (рис. 12.2).

Если хотя бы одна из скоростей центров масс соударяющихся тел 1 и 2 в начале удара не лежит на прямой, соединяющей центры масс C_1 и C_2, то удар называется *косым* (рис. 12.3).

Теорема об изменении количества движения системы материальных точек (теорема импульсов)

$$Q_2 - Q_1 = \sum_{i=1}^{n} S_i^e$$

является основой при изучении удара. Она формулируется так:

Векторное приращение количества движения системы за время удара

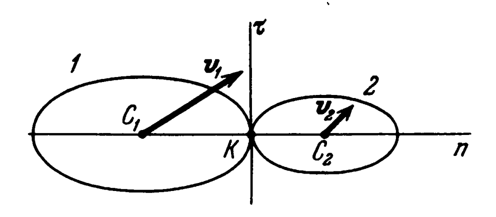


Рис. 12.3

равно главному вектору импульсов ударных внешних сил, приложенных к системе.

Та же теорема для одной материальной точки формулируется так: *Векторное приращение количества движения материальной точки за время удара равно импульсу равнодействующей всех приложенных к точке сил.*

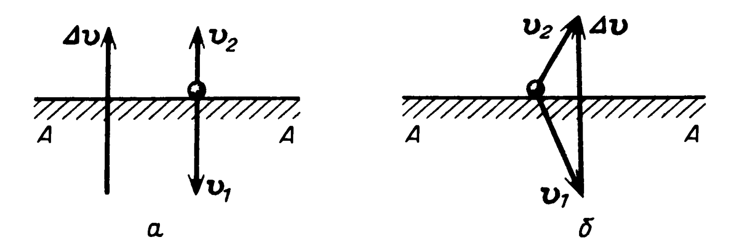


Рис. 12.4

Рассмотрим материальную точку массой m, которая ударяется о неподвижную стену AA. Скорость точки равна до удара $\mathbf{v}_1$, после удара $\mathbf{v}_2$. Приращение скорости составит

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 .$$

На рис. 12.4, *а* показаны эти скорости при прямом ударе, на рис. 12.4, *б* – при косом ударе. *Коэффициентом восстановления* при ударе материальной точки о неподвижную поверхность называется величина, равная модулю отношения проекций на нормаль к поверхности скорости точки в конце и в начале удара.

Коэффициент восстановления при ударе k зависит от материала соударяющихся тел. Для реальных физических тел коэффициент восстановления при ударе находится в пределах

$$0 < k < 1.$$

Удар называется *абсолютно упругим*, если коэффициент восстановления равен единице.

Удар называется *абсолютно неупругим*, если коэффициент восстановления равен нулю.

Для реальных материалов коэффициент восстановления k определялся опытным путем:

Материал соударяющихся тел	k
Дерево о резину	0,26
Деревянные шары	0,50
Стальные шары	0,56
Стеклянные шары	0,94

При соударении двух движущихся тел применяют гипотезу Ньютона: *отношение модуля нормальной составляющей относительной скорости точки контакта тел после удара к ее модулю до удара есть коэффициент восстановления.*

Коэффициент восстановления при ударе зависит от материала соударяющихся тел, но не зависит от их массы и относительной скорости.

Для рассмотрения прямого центрального абсолютно неупругого удара двух тел введем обозначения:

Номер тела	Масса тела	Скорость	
		в начале удара	в конце удара
1	m_1	v_1	u
2	m_2	v_2	u

Тогда проекция на ось n (рис. 12.5) общей скорости соударяющихся тел *1* и *2* в конце удара равна

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} \tag{1*}$$

(ось n проведена вдоль линии центров).

Проекция на ось n импульса ударной силы определяется формулой

$$S_n = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{2n} - v_{1n}).$$

Для рассмотрения прямого центрального упругого удара двух тел разделим процесс удара на два этапа.

В течение первого этапа совершается деформация соударяющихся тел. В течение второго этапа – частичное восстановление недеформированного

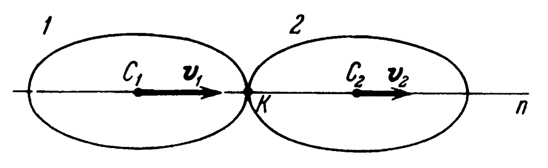


Рис. 12.5

состояния. В момент окончания первого этапа и начала второго центры масс тел обладают одинаковыми скоростями, которые они имели бы в конце соответствующего абсолютно неупругого удара. В конце второго этапа центры масс тел имеют уже различные скорости u_1 и u_2. *Коэффициентом восстановления* k недеформированного состояния называется, согласно гипотезе Ньютона, отношение импульса ударной силы второго этапа к импульсу ударной силы первого этапа:

$$k = \frac{S_{II}}{S_I}.$$

Введение в это определение ударных сил возвращает нас в теорию удара классической механики.

Введем обозначения

Номер тела	Масса тела	Скорость		
		в начале удара	в конце I этапа	в конце удара
1	m_1	v_1	u	u_1
2	m_2	v_2		u_2
		I этап		II этап

Тогда проекции на ось n скоростей соударяющихся тел в конце удара равны соответственно

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}), \qquad u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}), \tag{2*}$$

где

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}$$

(ось n проведена вдоль линии центров $C_1 C_2$). Из этих формул можно получить выражение для коэффициента восстановления

$$k = \frac{u_{1n} - u_n}{v_n - v_{1n}},$$

которое иногда используется в качестве определения этого понятия.

В случае абсолютно упругого удара, т.е. при $k = 1$,

$$u_{1n} = 2u_n - v_{1n}, \quad u_{2n} = 2u_n - v_{2n}.$$

При рассмотрении косого центрального упругого удара двух поступательно движущихся тел *1* и *2* поверхности соударяющихся тел будем

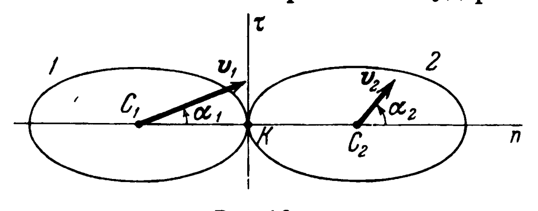


Рис. 12.6

считать абсолютно гладкими. Ось n проводится вдоль линии центров $C_1 C_2$ (рис. 12.6). Ось τ перпендикулярна оси n. Проекции скоростей центров масс соударяющихся тел в начале удара имеют вид

$$v_{1n} = v_1 \cos\alpha_1, \quad v_{2n} = v_2 \cos\alpha_2,$$

$$v_{1\tau} = v_1 \sin\alpha_1, \quad v_{2\tau} = v_2 \sin\alpha_2.$$

Проекции скоростей центров масс соударяющихся тел в конце удара (рис. 12.7) равны

$$u_{1\tau} = v_{1\tau}, \quad u_{2\tau} = v_{2\tau},$$
$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}), \quad u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}), \tag{3*}$$

где

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}, \quad \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{u_{1\tau}}{u_{1n}} = \frac{v_{1\tau}}{u_n + k(u_n - v_{1n})}, \tag{4*}$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{u_{2\tau}}{u_{2n}} = \frac{v_{2\tau}}{u_n + k(u_n - v_{2n})}.$$

Модули скоростей центров масс соударяющихся тел в конце удара равны

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2}, \quad u_2 = \sqrt{u_{2\tau}^2 + u_{2n}^2}. \tag{5*}$$

При более сложных задачах, когда, например, удар двух тел не является центральным, следует пользоваться общими теоремами динамики системы материальных точек, сформулированными с учетом особенностей, характеризующих удар: 1) пренебрежение действием обычных сил по сравнению с ударными силами; 2) равенство нулю перемещений всех точек системы за бесконечно малый промежуток времени удара.

Сформулируем эти теоремы.

Теорема 1. Изменение главного вектора количеств движения системы материальных точек за время удара равно геометрической сумме ударных импульсов внешних сил.

Теорема 2. Изменение главного вектора количества движения центра масс системы материальных точек будет таким же, как если бы в нем была сосредоточена вся масса системы и к нему были бы непосредственно приложены все ударные импульсы внешних сил.

Теорема 3. Изменение главного момента количеств движения относительно неподвижной оси равно сумме моментов ударных импульсов внешних сил относительно этой оси.

Теорема 4. Изменение главного момента количеств движения относительно неподвижной точки равно сумме моментов ударных импульсов внешних сил относительно этой точки.

Так как при ударе, происходящем в течение бесконечно малого промежутка времени, перемещениями точек системы пренебрегают, то за неподвижные оси и точки в указанных выше теоремах можно принять любые оси и точки, связанные с одним из соударяющихся тел.

Указание. Задачи на определение скоростей соударяющихся тел в конце центрального косого упругого удара рекомендуется решать в такой последовательности:

1) выбрать тело или тела, которые нужно рассмотреть для определения неизвестных величин;

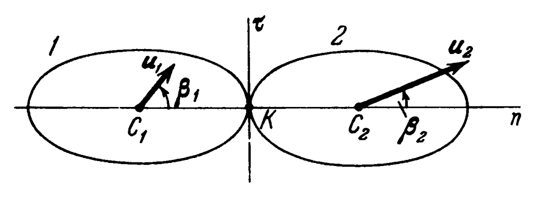


Рис. 12.7

2) направить ось n вдоль линии центров, ось τ — перпендикулярно ей;

3) вычислить проекции v_{1n}, v_{2n}, $v_{1\tau}$, $v_{2\tau}$ на оси n и τ скоростей соударяющихся тел в начале удара;

4) вычислить проекцию общей скорости u_n соударяющихся тел на ось n в конце абсолютно неупругого удара по формуле (1*);

5) вычислить проекции скоростей u_{1n}, u_{2n}, $u_{1\tau}$, $u_{2\tau}$ соударяющихся тел на оси n и τ в конце удара по формулам (3*);

6) определить модули скоростей обоих тел в конце удара по формулам (5*); направления скоростей определяются формулами (4*).

При ударе тела о неподвижную плоскость следует считать массу неподвижной плоскости бесконечно большой, а скорость до удара – равной нулю ($m_2 = \infty$, $v_2 = 0$).

В случае центральных прямых ударов двух тел вычисления упрощаются, так как проекции скоростей на ось τ обращаются в нуль.

В случае нецентрального удара следует применить одну или несколько из теорем 1–4.

Задача 12.1. С какой высоты h_1 падает шарик на неподвижную горизонтальную плиту, если после упругого удара он поднимается на высоту $h_2 = 81$ см? Коэффициент восстановления равен 0,9.

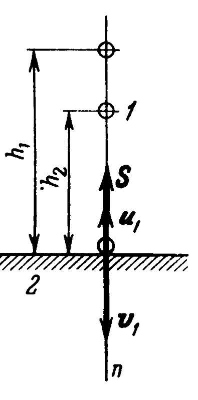
Р е ш е н и е. Ось n направим по вертикали вниз. Обозначим: $\mathbf{v}_1$ – скорость центра масс шарика в начале удара, $\mathbf{u}_1$ – в конце удара, m_1 – масса шарика.

Заметим, что если бы удар был абсолютно неупругим, то шарик в конце удара остался бы неподвижным т.е.

$$\mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

Запишем теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме в приложении к ударным силам:

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{S}(\mathbf{F}_k). \tag{2}$$



К задаче 12.1

В правой части уравнения (2) стоит векторная сумма импульсов ударных сил.

Единственной ударной силой является реакция плиты. Ударный импульс $\mathbf{S}$ этой реакции направлен перпендикулярно неподвижной плите (рис.). Поэтому уравнение (2) в приложении к шарику принимает вид

$$m_1\mathbf{u}_1 - m_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{S}. \tag{3}$$

Спроектировав векторное равенство (3) на ось n, имеем

$$m_1 u_{1n} - m_1 v_{1n} = -S. \tag{4}$$

Разделим процесс удара на два этапа. В течение этапа I совершается деформация шарика. В течение этапа II происходит частичное восстановление недеформированного состояния. В конце этапа I и в начале этапа II центр масс шарика приобретает скорость $\mathbf{u}$, которую он имел бы в случае абсолютно неупругого удара. Поэтому уравнение (4) для этапов I и II

получим вид

$$m_1 u_n - m_1 v_{1n} = -S_{\rm I},$$
$$m_1 u_{1n} - m_1 u_n = -S_{\rm II}.$$

Разделив второе уравнение на первое и приняв во внимание, что отношение импульсов $S_{\rm II}/S_{\rm I}$ является коэффициентом восстановления k, получим

$$\frac{u_{1n} - u_n}{u_n - v_{1n}} = k. \qquad (5)$$

Из формулы (5), учитывая (1), находим

$$u_{1n} = -k v_{1n}. \qquad (6)$$

Знак минус указывает, что скорость центра масс шарика в конце удара направлена вверх. Зависимость между модулями скоростей центра масс шарика в начале и в конце удара имеет вид

$$u_1 = k v_1. \qquad (7)$$

Так как шарик совершал свободное падение, то

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}. \qquad (8)$$

После упругого удара шарик начинает подъем вверх со скоростью u_1. В наивысшей точке подъема h_2 скорость шарика равна нулю. Следовательно,

$$u_1 = \sqrt{2gh_2}. \qquad (9)$$

После подстановки значений v_1 и u_1 из формул (8) и (9) в формулу (7) находим

$$\sqrt{h_2} = k\sqrt{h_1}, \qquad (10)$$

откуда

$$h_1 = \frac{h_2}{k^2} = \frac{81}{0{,}9^2} = 1 \text{ м}.$$

Формула (10), записанная в виде

$$k = \sqrt{h_2/h_1}, \qquad (11)$$

дает возможность экспериментально определить коэффициент восстановления при упругом ударе.

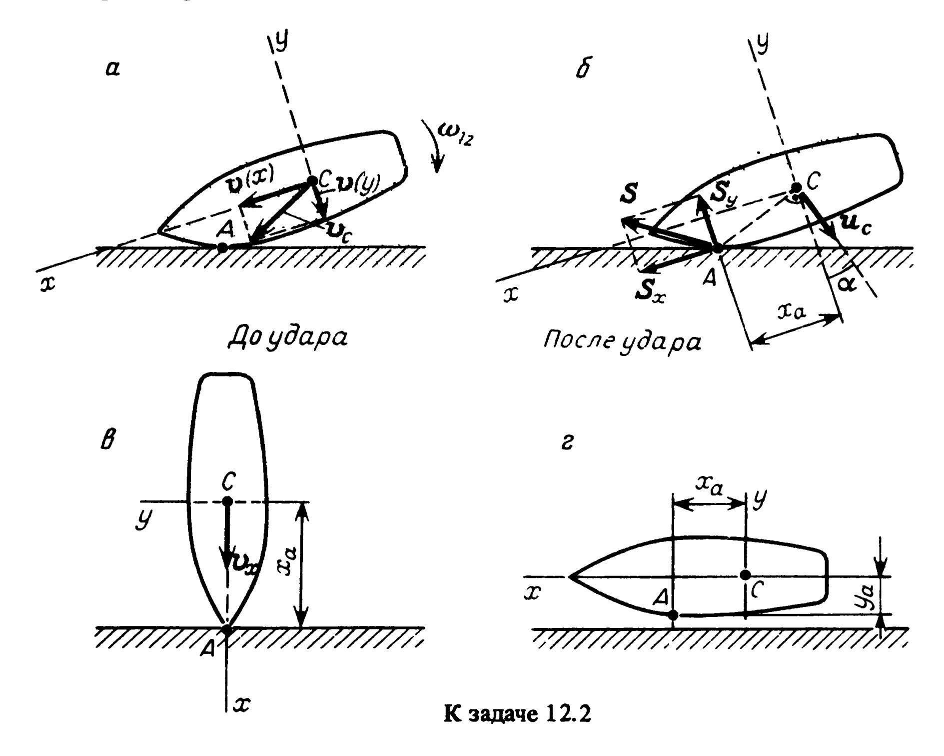
В случае абсолютно неупругого удара шарик от плоскости не отскакивает, т.е. $h_2 = 0$. Из формулы (11) получим $k = 0$.

В случае абсолютно упругого удара шарик должен отскочить в исходное положение, т.е. $h_2 = h_1$. Из формулы (11) находим $k = 1$.

При упругом ударе $h_2 < h_1$ и, следовательно, $0 < k < 1$. Так, при ударе деревянного шарика о стальную плиту $k = 0{,}55$, при ударе шарика из слоновой кости о плиту из того же материала $k = 0{,}90$, при ударе стеклянного шарика о стеклянную плиту $k = 0{,}94$ и т.д.

Задача 12.2. При швартовке происходит столкновение судна с причалом. Задача судоводителя состоит в разработке мер, обеспечивающих уменьшение удара. Судно массой M, момент инерции которого относительно оси z, проходящей через центр масс C, равен I_z, соударяется с причалом в точке A (рис.). Точка A судна не скользит по причалу. Скорость центра масс судна до удара обозначена через $\mathbf{v}_C$, а его угловая скорость вращения – через ω_{1z}.

Полагая удар абсолютно неупругим, определить условия, при которых ударные импульсы обращаются в нуль (рис. *а*). Найти потерю кинетической энергии при ударе.



К задаче 12.2

Р е ш е н и е. Так как удар абсолютно неупругий и скольжения вдоль причала нет, то судно и причал остаются в соприкосновении после удара. Следовательно, судно будет поворачиваться вокруг точки A. Обозначим скорость центра масс после удара u_C (рис. *б*) и угловую скорость вращения после удара ω_{2z}.

Введем систему координат x, y, жестко связанную с корпусом судна, с началом в центре масс. Обозначим координаты точки соударения x_A, y_A проекции скорости центра масс на эти оси v_{Cx} и v_{Cy}. Составляющие ударного импульса обозначим S_x и S_y соответственно.

Воспользуемся теоремой импульсов и теоремой об изменении главного момента количества движения относительно оси z, проходящей через центр масс судна (рис. *б*):

$$u_C - \mathrm{v}_C = \frac{\Sigma S^e}{M}, \tag{1}$$

$$L_{2C} - L_{1C} = \Sigma m_z(S^e). \tag{2}$$

Найдем проекции скорости u_C на оси x, y:

$$u_{Cy} = -\omega_{2z} x_A, \tag{3}$$

$$u_{Cx} = -\omega_{2z} y_A. \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) в проекциях на оси x, y примет вид

$$S_x^e = -M\omega_{2z} y_a - v_{Cx} M. \tag{5}$$

$$S_y^e = -M\omega_{2z} x_a + v_{Cy} M. \tag{6}$$

Уравнение (2) преобразуется так:

$$-\omega_{2z} I_z + \omega_{1z} I_z = -S_y^e x_A - S_x^e y_A. \tag{7}$$

Из системы уравнений (5) – (7) находим

$$\omega_{2z} = \frac{I_z \omega_{1z} + v_{Cy} x_A M - v_{Cx} y_A M}{I_z + M(x_A^2 + y_A^2)}, \tag{8}$$

$$S_x^e = -\frac{\omega_{1z} y_A M I_z + v_{Cy} x_A y_A M^2 + v_{Cx}(I_z M + M^2 x_A^2)}{I_z + M(x_A^2 + y_A^2)}. \tag{9}$$

$$S_y^e = \frac{v_{Cy}(M I_z + M^2 y_C^2) - \omega_{1z} x_A M I_z + v_{Cx} y_A x_A M^2}{I_z + M(x_A^2 + y_A^2)}. \tag{10}$$

Из трех кинематических параметров движения судна до удара (v_{Cx}, v_{Cy}, ω_{1z}) наиболее осуществимо управление величинами v_{Cx}, ω_{1z}. Действительно, v_{Cx} управляется снижением или увеличением угловой скорости винта, а ω_{1z} – углом отклонения руля.

Из формул (9) и (10) следует, что S_x^e, S_y^e обращаются в нуль, если числители в правых частях этих формул равны нулю, т.е.

$$\begin{aligned} &\omega_{1z} x_A M I_z - v_{Cx} y_A x_A M^2 = v_{Cy}(M I_z + M^2 y_A^2), \\ &\omega_{1z} y_A M I_z + v_{Cx}(I_z M + M^2 x_A^2) = -v_{Cy} x_A y_A M^2, \end{aligned} \tag{11}$$

откуда находим

$$\omega_{1z} = \frac{v_{Cy}}{x_A}, \quad v_{Cx} = -v_{Cy}\frac{y_A}{x_A}. \tag{12}$$

Из выражений (12) следует, что в случае удара о причал носовой частью судна необходимо переложить руль на "правый борт" и дать "задний ход".

В случае удара о причал кормовой частью судна ($x_A < 0$) необходимо переложить руль на "левый борт" и дать "передний ход".

Переходим к нахождению потери кинетической энергии при ударе. Потеря кинетической энергии характеризует удар с энергетической точки зрения. Потеря кинетической энергии равна

$$\Delta T = T_1 - T_2, \tag{13}$$

где T_1 – кинетическая энергия до удара, T_2 – кинетическая энергия после удара.

Согласно теореме Кёнига, кинетическая энергия в плоском движении определяется формулами

$$T_1 = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_z\omega_{1z}^2}{2}, \tag{14}$$

$$T_2 = \frac{Mu_C^2}{2} + \frac{I_z\omega_{2z}^2}{2}. \tag{15}$$

Подставляя в (13) значения (3), (4), (8), получаем

$$\Delta T = \frac{M\,[M(v_{Cx}x_A + v_{Cy}y_A)^2 + I_z(v_{Cx} + \omega_{1z}y_a)^2 + I_z(v_{Cy} - \omega_{1z}x_A)^2\,]}{2\,[I_z + M(x_A^2 + y_A^2)]}. \tag{16}$$

Из формулы (16) следует: если кинематические параметры ω_1 и v_x будут удовлетворять условиям (12), то потеря кинетической энергии будет равна нулю.

Формула (16) позволяет рассмотреть частные случаи, встречающиеся на практике.

Рассмотрим некоторые из них.

1. *Центральный удар.* В этом случае (рис. *в*):

$$v_x \neq 0, \quad x_A \neq 0;$$
$$v_y = 0, \quad y_A = 0; \tag{17}$$
$$\omega_{1z} = 0.$$

Подставляя значения (17) в формулу (16), получаем

$$\Delta T = \frac{M[Mx_A^2 v_x^2 + I_z v_x^2]}{2[I_z + Mx_a^2]} = \frac{Mv_x^2}{2}. \tag{18}$$

Формула (18) не требует пояснений, она лишь подтверждает достоверность соотношения (16).

2. *Вращательное движение судна.* В этом случае (рис. *г*):

$$x_A \neq 0, \quad v_{Cx} = 0,$$
$$y_A \neq 0, \quad v_{Cy} = 0, \tag{19}$$
$$\omega_{1z} \neq 0.$$

Внося эти значения в формулу (16), получим

$$\Delta T = \frac{M[I_z \omega_{1z}^2 y_A^2 + I_z \omega_{1z}^2 x_A^2]}{2[I_z + M(x_A^2 + y_A^2)]} = \frac{MI_z(x_A^2 + y_A^2)}{2[I_z + M(x_A^2 + y_A^2)]}\,\omega_{1z}^2. \tag{20}$$

Этот результат легко проверяется. Действительно, кинетическая энергия до удара – это энергия вращательного движения судна вокруг центра инерции, т.е.

$$T_1 = \frac{I_z \omega_{1z}^2}{2}.$$

После удара движения судна также вращательное, но вокруг другого центра – точки A (рис. *г*). Тогда

$$T_2 = [I_z + M(x_A^2 + y_A^2)]\,\frac{\omega_{2z}^2}{2}. \tag{21}$$

Внося в эту формулу значение ω_{2z} из (8), получаем, учитывая (19),

$$T_2 = [I_z + M(x_A^2 + y_A^2)]\,\frac{I_z^2 \omega_{1z}^2}{2[I_z + M(x_A^2 + y_A^2)]}. \tag{22}$$

Теперь находится потеря кинетической энергии

$$\Delta T = \frac{I_z \omega_{1z}^2}{2}\left[1 - \frac{I_z}{I_z + M(x_A^2 + y_A^2)}\right] = \frac{I_z M(x_A^2 + y_A^2)\,\omega_{1z}^2}{2[I_z + M(x_A^2 + y_A^2)]}, \tag{23}$$

что совпадает с (20).

3. *Поступательное движение судна.* Это движение характеризуется соотношениями

$$x_A \neq 0, \quad v_{Cx} \neq 0;$$
$$y_a \neq 0, \quad v_{Cy} \neq 0; \tag{24}$$
$$\omega_{1z} = 0.$$

Подставляя (24) в уравнение (16), находим

$$\Delta T = \frac{M\,[M(v_{Cx}x_A + v_{Cy}y_A)^2 + J_z(v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2)]}{2\,[I_z + M(x_A^2 + y_A^2)]}. \qquad (25)$$

Уравнение (25) еще раз подтверждает, что для уменьшения удара в этом случае нужно иметь противоположные знаки v_{Cx} и v_{Cy}, т.е. направление движения по оси x должно соответствовать ходу "назад" при ударе в носовой части ($x_A > 0$) и ходу "вперед" при ударе в кормовой части ($x_A < 0$).

Современные средства измерения вместе с компьютерной техникой позволяют управлять движением судна при швартовке согласно уравнениям (12), обеспечивающим безударную швартовку.

Задача 12.3. Два гладких мяча A и B, каждый массой m, движутся с одинаковой по модулю скоростью v.

Какой угол α должны составить между собой их скорости, если мяч A после удара отклоняется от своего направления на 90°? Удар считать частично упругим, коэффициент восстановления равен k.

Решение. Поскольку мяч A после удара будет двигаться вперед, первоначальный угол α должен быть тупым.

Проведем ось x в направлении скорости мяча B, а ось y — перпендикулярно ей в плоскости, где лежат обе данные скорости. Поскольку ни сил, ни начальных скоростей вне этой плоскости нет, то задача является плоской. Скорости $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ имеют первоначально проекции

$$v_{Ax} = v\cos\alpha, \quad v_{Ay} = v\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$v_{Bx} = v, \quad v_{By} = 0. \qquad (2)$$

Исходя из того что трение между шарами отсутствует, заключаем, что в направлении оси y не действуют никакие силы и, следовательно, проекции скоростей на ось y в процессе удара не изменяются.

Для нахождения проекций на ось x разобьем процесс на два этапа — до момента наибольшего сближения, когда относительная скорость равна нулю, и от момента сближения до разделения. Обозначим импульс ударных сил, действующих на мяч A на первом этапе, через S; он имеет только проекцию на ось x, так как удар прямой, т.е.

$$S_x = S. \qquad (3)$$

По определению коэффициента восстановления имеем на втором этапе

$$S^{(2)} = kS, \quad \text{или} \quad S_x^{(2)} = kS. \qquad (4)$$

Обозначим одинаковую проекцию скорости мячей на ось x в момент наибольшего сближения через u. Тогда из теоремы о сохранении количества движения (в проекции на ось x) имеем

$$mv_{Ax} + mv_{Bx} = mu + mu, \qquad (6)$$

поскольку скорость u одинакова у обоих мячей. Подставляя (1) и (2) в (6), получаем

$$v\cos\alpha + v = 2u. \tag{7}$$

Отсюда

$$u = \frac{1}{2}v(1+\cos\alpha). \tag{8}$$

Это та проекция скорости на ось x, которую имели бы оба мяча, если бы удар был неупругим (заметим, что в отсутствие трения скорости обоих мячей все равно были бы неодинаковы, так как проекции скоростей на ось y у них были бы различны; если же оба мяча "слились" бы в один, то проекция общей скорости на ось y определялась бы также из уравнения сохранения количества движения).

Рассмотрим теперь второй этап процесса удара. Для этого применим теорему импульсов в проекции на ось x для мяча A на первом и втором этапах. Обозначим скорость мяча A после удара через $v_A^{(2)}$.

Для первого этапа имеем

$$Q_x - Q_{1x} = S_x, \tag{9}$$

где Q_x – количество движения мяча A в конце первого этапа, т.е.

$$Q_x = mu, \tag{10}$$

а Q_{1x} – количество движения мяча A в начале первого этапа, т.е.

$$Q_{1x} = mv_{Ax} = mv\cos\alpha. \tag{11}$$

Из (9)–(11) и (3) имеем

$$mu - mv\cos\alpha = S. \tag{12}$$

Аналогично для второго этапа имеем

$$Q_{2x} - Q_x = S_x^{(2)}, \tag{13}$$

где

$$Q_{2x} = mv_{Ax}^{(2)}. \tag{14}$$

Из (10), (13), (14) и (5) получим

$$mv_{Ax}^{(2)} - mu = kS. \tag{15}$$

Подставляя (12) в (15), находим

$$mv_{Ax}^{(2)} - mu = k(mu - mv\cos\alpha), \tag{16}$$

или

$$v_{Ax}^{(2)} = (1+k)u - kv\cos\alpha. \tag{17}$$

Подставив сюда u из (8), найдем окончательно для проекции скорости мяча $\mathbf{v}_A^{(2)}$ на ось x после удара:

$$v_{Ax}^{(2)} = (1+k)\ \frac{v}{2}(1+\cos\alpha) - kv\cos\alpha, \tag{18}$$

или

$$v_{Ax}^{(2)} = \frac{v}{2}\,[1+\cos\alpha + k(1-\cos\alpha)]. \tag{19}$$

Что касается проекции скорости мяча A на ось y, то, как было указано выше, она после удара не изменится, т.е.

$$v_{Ay}^{(2)} = v_{Ay} \tag{20}$$

и, согласно (1),

$$v_{Ay}^{(2)} = v\sin\alpha. \tag{21}$$

Для нахождения угла между начальной и конечной скоростями мяча A, т.е. $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_2$, применим формулу

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_x b_x + a_y b_y}, \tag{22}$$

определяющую угол между векторами на плоскости $\boldsymbol{a}(a_x, a_y)$ и $\boldsymbol{b}(b_x, b_y)$. Преобразуя эту формулу к виду

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{a_x b_y - a_y b_x}, \tag{23}$$

принимая вектор $\mathbf{v}^{(2)}$ за вектор $\boldsymbol{a}$, а $\mathbf{v}$ за вектор $\boldsymbol{b}$ и подставляя выражения (1), (19), (21) в (23), получаем

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{(v/2)[(1+\cos\alpha)+k(1-\cos\alpha)]\,v\cos\alpha + v\sin\alpha\cdot v\sin\alpha}{(v/2)[(1+\cos\alpha)+k(1-\cos\alpha)]\,v\sin\alpha - v\sin\alpha\cdot v\cos\alpha}. \tag{24}$$

Преобразуя (24), имеем

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos^2\alpha + k(1-\cos\alpha)\cos\alpha + 2\sin^2\alpha}{[(1+\cos\alpha) + k(1-\cos\alpha) - 2\cos\alpha]\sin\alpha}. \tag{25}$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos^2\alpha + 2 - 2\cos^2\alpha + k(1-\cos\alpha)\cos\alpha}{[(1-\cos\alpha) + k(1-\cos\alpha)]\sin\alpha}, \tag{26}$$

или

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\alpha(1-\cos\alpha) + k(1-\cos\alpha)\cos\alpha + 2}{(1+k)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}, \tag{27}$$

т.е.

$$\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2}{(1+k)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}. \tag{28}$$

Для того чтобы скорости мяча A до и после удара (соответственно $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^{(2)}$) были взаимно перпендикулярны, нужно, чтобы $\operatorname{ctg}\varphi = 0$. В этом случае

$$\operatorname{ctg}\alpha + \frac{2}{(1+k)(1-\cos\alpha)\sin\alpha} = 0. \tag{29}$$

Отсюда, считая, что $\alpha \neq 0$ (ясно, что если при $\alpha = 0$ мячи двигались до удара по одной прямой, то и после удара они будут двигаться вдоль той же прямой), получаем

$$\operatorname{ctg}\alpha \sin\alpha(1-\cos\alpha) + \frac{2}{1+k} = 0, \tag{30}$$

или

$$\cos\alpha(1-\cos\alpha) + \frac{2}{1+k} = 0, \tag{31}$$

т.е.

$$\cos\alpha(\cos\alpha - 1) = \frac{2}{1+k}. \tag{32}$$

Иначе,

$$\cos^2\alpha - \cos\alpha = \frac{2}{1+k}. \tag{33}$$

Это уравнение и определяет значения $\cos\alpha$ и, следовательно, α.

Заметим, что правая часть уравнения (33) положительна и принимает значения от 2 (при $k = 0$) до 1 (при $k = 1$); поскольку она монотонно убывает с ростом k, то за интервал (1; 2) ее значения не выходят. Поэтому левая часть должна также быть положительна. В интервале $\alpha \in (0, \pi/2)$ имеем $\cos\alpha \in (0; 1)$ и, следовательно, всегда $\cos\alpha(\cos\alpha - 1) \leqslant 0$. Отсюда следует, как и было указано ранее, что угол α должен быть тупым. Для уточнения рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \cos^2\alpha - \cos\alpha.$$

Имеем

$$f'(\alpha) = (2\cos\alpha - 1)(-\sin\alpha).$$

В интервале $(\pi/2;\ \pi)$ указанная производная положительна, поскольку $\cos\alpha \leqslant 0$, а $\sin\alpha \geqslant 0$. Следовательно, $f(\alpha)$ монотонно возрастает. Имеем

$$f(\pi/2) = 0, \quad f(\pi) = 2.$$

Поскольку наименьшее возможное значение первой части равно 1 (при $k = 1$), то существует наименьший угол (в интервале $(\pi/2;\ \pi)$), для которого решение возможно. Он определяется из уравнения

$$\cos^2\alpha - \cos\alpha = 1,$$

откуда $\cos\alpha = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Смысл имеет только тот корень, который по абсолютному значению меньше 1, т.е.

$$\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-2{,}236}{2} = -0{,}618.$$

Отсюда

$$\alpha = 128^\circ 10'.$$

При начальных углах, меньших найденного, решение невозможно ни при каком коэффициенте восстановления.

При уменьшении k угол α увеличивается, как следует из монотонности функции $f(\alpha)$ (а следовательно, и обратной функции). Решение формально существует и при $k = 0$, когда $\alpha = 180^\circ$, но на самом деле при этом конечная скорость $\mathbf{v}^{(2)}$, как следует из (19) и (21), равна нулю, т.е. вопрос о составляемом ею угле теряет смысл.

Поскольку для решения поставленной задачи скорость мяча B не нужна, то она не определялась. Ее можно было бы найти из уравнения, аналогичного (16).

Задача 12.4. Шар массой m центрально ударяет другой шар, находящийся в покое и имеющий массу $2m$. Шары одинакового размера, гладкие, сделаны из материала разной плотности. Кинетическая энергия обоих шаров после удара уменьшается вдвое.

Определить коэффициент восстановления при ударе. Найти скорость первого шара после удара.

Решение. Обозначим скорость первого шара до удара через $\mathbf{v}$. Разобьем процесс удара на два этапа – до момента наибольшего сближения, когда скорости обоих шаров равны, и от этого момента до полного разделения. Импульс ударных сил, действующих со стороны первого шара на второй в течение первого этапа, обозначим S. Проведем ось Ox через центры обоих шаров. Задача одномерная, поэтому проекции скоростей и импульсов на ось x будем писать без индексов. Нужно, однако, учитывать, что

импульс, действующий со стороны второго шара на первый, в этом случае будет $-\boldsymbol{S}$.

Для определения общей скорости в конце первого этапа применим теоремы о сохранении количества движения:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u + m_2 u. \tag{1}$$

Здесь u обозначает общую скорость обоих шаров в конце первого этапа процесса удара. Имеем по условию

$$mv + 2m\cdot 0 = mu + 2mu. \tag{2}$$

Отсюда

$$u = \frac{1}{3} v. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь процесс удара для первого шара, применяя теорему импульсов. На первом этапе

$$mu - mv = -S, \tag{4}$$

поскольку проекция на ось x количества движения первого шара в конце этапа равна

$$Q_x = mu, \tag{5}$$

а проекция на ось x количества движения первого шара в начале этапа равна

$$Q_{1x} = mv. \tag{6}$$

На втором этапе имеем аналогично

$$mv_1 - mu = -kS, \tag{7}$$

где v_1 – скорость первого шара в конце второго этапа. В правой части вместо S стоит kS, поскольку удар не вполне упругий и коэффициент восстановления равен k.

Подставляя (4) в (7), имеем

$$m(v_1 - u) = km(u - v). \tag{8}$$

Отсюда

$$v_1 - u = ku - kv, \tag{9}$$

или

$$v_1 = (1 + k)u - kv. \tag{10}$$

Подставляя значение u из (3), имеем для скорости первого шара после удара

$$v_1 = (1 + k)\frac{v}{3} - kv = \frac{1}{3}(1 - 2k)v. \tag{11}$$

Для второго шара на первом этапе

$$2mu - 2m \cdot 0 = S, \tag{12}$$

а на втором этапе

$$2mv_2 - 2mu = kS, \tag{13}$$

где v_2 – скорость второго шара после удара. Подставляя (12) в (13), получаем

$$v_2 - u = ku, \tag{14}$$

или

$$v_2 = (1 + k)u. \tag{15}$$

Тогда, согласно (5), для скорости второго шара после удара имеем

$$v_2 = \frac{1}{3}(1 + k)v. \tag{16}$$

Кинетическая энергия системы до удара равна кинетической энергии первого шара (второй шар неподвижен), т.е.

$$T_0 = \frac{1}{2}mv^2. \tag{17}$$

Кинетическая энергия системы после удара равна

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2, \tag{18}$$

где m_1 и m_2 – соответственно массы первого и второго шара, а v_1 и v_2 – их скорости после удара. Подставляя значение масс и выражения (11) и (16) для v_1 и v_2, получаем

$$T = \frac{1}{2}m \cdot \frac{1}{9}(1 - 2k)^2v^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \frac{1}{9}(1 + k)^2v^2. \tag{19}$$

Преобразуя, имеем

$$T = \frac{1}{18}mv^2(1 - 4k + 4k^2 + 2 + 4k + 2k^2) = \frac{1}{18}mv^2(3 + 6k^2), \tag{20}$$

или

$$T = \frac{1}{6}mv^2(1 + 2k^2). \tag{21}$$

По условию

$$T = \frac{1}{2} T_0.$$

Подставляя сюда (17) и (21), имеем

$$\frac{1}{6} mv^2(1 + 2k^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mv^2.$$

Отсюда

$$1 + 2k^2 = \frac{3}{2},$$

или $k^2 = 1/4$. Поскольку k положительно, то $k = 1/2$. Подставляя в формулу (11), получаем для скорости первого шара после удара

$$v_1 = \frac{1}{3}\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) v = 0.$$

Следовательно, скорость ударяющего шара при заданном условии равна нулю независимо от его начальной скорости.

Отметим, что скорость второго шара после удара, как это следует из (16), равна $\frac{1}{2} v$. Это и очевидно, так как при двойной массе и половинной скорости он уносит половину первоначальной кинетической энергии, как и должно быть по условию.

Задача 12.5. Два упругих шара движутся навстречу друг другу с равными скоростями. После удара один из шаров остается в покое.

Найти отношение масс шаров (Walton).

Решение. Обозначим массы шаров соответственно через m_1 и m_2, а одинаковый модуль скорости – через v. Проведем ось x через центры шаров.

Разобьем процесс удара на два этапа – до наибольшего сближения и от наибольшего сближения до взаимного удаления.

Проекцию общей скорости в конце первого этапа (когда относительная скорость равна нулю) на ось x обозначим через u. Векторы скоростей первого и второго шаров до удара обозначим соответственно $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Тогда

$$v_{1x} = v, \tag{1}$$

$$v_{2x} = -v. \tag{2}$$

Из теоремы сохранения количества движения в проекции на ось x имеем

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u + m_2 u. \tag{3}$$

Подставив (1) и (2), найдем

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2) u, \tag{4}$$

или

$$u = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2}. \tag{5}$$

Скорости шаров после удара обозначим соответственно $\mathbf{v}_1^{(2)}$ и $\mathbf{v}_2^{(2)}$. Проекцию импульса силы, действующей со стороны второго шара на первый за время первого этапа, обозначим S_x. Поскольку удар абсолютно упругий, то импульс за время второго этапа также равен S_x. По теореме импульсов имеем на первом этапе

$$Q_x - Q_{1x} = S_x, \tag{6}$$

где Q_x – количество движения первого шара в конце первого этапа, а Q_{1x} – количество движения первого шара в начале этапа. Поскольку

$$Q_x = m_1 u, \tag{7}$$

а

$$Q_{1x} = m_1 v, \tag{8}$$

то из (6) имеем

$$m_1 u - m_1 v = S_x. \tag{9}$$

Для второго этапа

$$Q_{1x}^{(2)} - Q_x = S_x, \tag{10}$$

где $Q_{1x}^{(2)}$ – количество движения первого шара в конце второго этапа, т.е.

$$Q_{1x}^{(2)} = m_1 v_{1x}^{(2)}. \tag{11}$$

Из (7), (11) и (10) имеем

$$m_1 v_{1x}^{(2)} - m_1 u = S_x. \tag{12}$$

Приравнивая левые части (9) и (12), получаем

$$m_1 u - m_1 v = m_1 v_{1x}^{(2)} - m_1 u. \tag{13}$$

Отсюда для скорости первого шара после удара находим

$$v_{1x}^{(2)} = 2u - v. \tag{14}$$

Подставляя сюда u из (5), имеем

$$v_{1x}^{(2)} = 2 \cdot \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2} - v, \tag{15}$$

или, преобразуя,

$$v_{1x}^{(2)} = \frac{2m_1 - 2m_2 - m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v. \tag{16}$$

Если скорость первого шара после удара равна нулю, то

$$v_{1x}^{(2)} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v = 0.$$

Отсюда $m_1 - 3m_2 = 0$, или $m_1/m_2 = 3$.

Для нахождения скорости второго шара после удара можно применить то же рассуждение, учитывая, что если импульс силы, действующей со стороны второго шара на первый, равен S_x, то импульс силы, действующей со стороны первого шара на второй, равен $-S_x$. Кроме того, в уравнении (8) проекция начальной скорости, согласно (2), равна $-v$. Имеем, следовательно, вместо (9) и (12) соответственно

$$m_2 u + m_2 v = -S_x, \quad m_2 v_{2x}^{(2)} - m_2 u = -S_x,$$

и поэтому

$$m_2 u + m_2 v = m_2 v_{2x}^{(2)} - m_2 u.$$

Отсюда

$$v_{2x}^{(2)} = 2u + v.$$

Подставляя значение u из (5), находим для скорости второго шара после удара

$$v_{2x}^{(2)} = 2\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v + v,$$

или после преобразований

$$v_{2x}^{(2)} = \frac{2m_1 - 2m_2 + m_1 + m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v. \qquad (17)$$

Разумеется, ввиду симметрии эту формулу можно получить из (16) заменой индексов. Если после удара останавливается второй шар, то из (17) следует

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}, \quad \text{или} \quad \frac{m_2}{m_1} = 3,$$

что и следовало ожидать.

Отметим, что если массы шаров были бы равны $m_1 = m_2 = m$, то из (16) и (17) следует

$$v_{1x}^{(2)} = -v, \quad v_{2x}^{(2)} = v,$$

т.е. шары разлетаются в обратные стороны с теми же скоростями, что и следовало ожидать.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 44.2, 44.4, 44.8, 44.11, 44.13, 44.15, 44.17, 44.18.

§ 2. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ГЛАВНОГО МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В ПРИЛОЖЕНИИ К УДАРНЫМ СИЛАМ

Приращение главного момента количества движения материальной системы относительно неподвижного центра при ударе равно векторной сумме моментов относительно того же центра импульсов внешних ударных сил:

$$(L_O)_2 - (L_O)_1 = \sum_{k=1}^{n} m_O[S(F_k^e)],$$

или в проекциях на оси декартовых координат

$$(L_x)_2 - (L_x)_1 = \sum_{k=1}^{n} m_x[S(F_k^e)], \quad (L_y)_2 - (L_y)_1 = \sum_{k=1}^{n} m_y[S(F_k^e)],$$

$$(L_z)_2 - (L_z)_1 = \sum_{k=1}^{n} m_z[S(F_k^e)].$$

Та же теорема для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, выражается формулой

$$I_z(\omega_{2z} - \omega_{1z}) = \sum_{k=1}^{n} m_z[S(F_k^e)].$$

Итак, действие ударного импульса на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, проявляется в скачкообразном изменении его угловой скорости.

Этой теоремой следует пользоваться в задачах на удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, когда в число данных и искомых величин входят: ударные импульсы, момент инерции тела относительно оси вращения, угловые скорости тела в начале и конце удара.

Указание. Задачи с помощью теоремы об изменении главного момента количества движения в приложении к ударным силам рекомендуется решать в следующей последовательности:

1) выбрать тело или тела, которые нужно рассмотреть для определения неизвестных величин;

2) изобразить на рисунке внешние ударные импульсы;

3) вычислить сумму моментов ударных импульсов (т.е. импульсов всех внешних ударных сил) относительно оси z вращения тела;

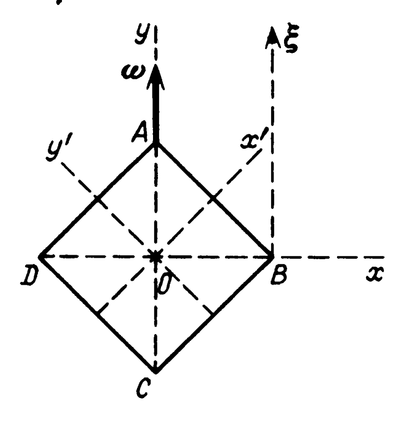
4) подставив результат, полученный в предыдущем пункте, в уравнение

$$I_z(\omega_{2z}-\omega_{1z})=\sum_{k=1}^{n} m_z[S(F_k^e)],$$

определить искомую величину.

Задача 12.6. Тонкая однородная квадратная пластинка $ABCD$ массой M вращается около своей диагонали AC длиной $2r$ с угловой скоростью ω. Ее вершину B мгновенно останавливают.

Определить силу удара (ударный импульс), который испытывает вследствие этого пластинка в точке B, а также угловую скорость ω_1, с которой она вращается после этого около B (вокруг оси ξ, параллельной AC) (рис.).



К задаче 12.6

Решение. Поскольку пластинка является однородной, то ее центр масс O совпадает с геометрическим центром; следовательно, скорость центра масс равна нулю. Проведем через O оси Ox и Oy, совпадающие с диагоналями BD и AC, а также оси Ox' и Oy', параллельные сторонам пластинки. Обозначим стороны квадрата через $2b$. Очевидно, что

$$AO^2+OB^2=AB^2,$$

или $2r^2=4b^2$, откуда $r^2=2b^2$.

Момент инерции тонкой квадратной пластинки относительно оси симметрии, параллельной стороне, равен

$$I_{x'}=I_{y'}=\frac{1}{3}Mb^2.$$

Поскольку пластинка симметрична, то центробежный момент инерции равен нулю:

$$I_{x'y'}=0.$$

Равенство осевых моментов инерции и равенство нулю центробежного момента инерции означают, что эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, а его сечение плоскостью пластинки — окружностью. Следовательно, моменты инерции относительно любой оси, лежащей в той же плоскости и проходящей через центр, равны между собой. Следовательно,

$$I_y=\frac{1}{3}Mb^2. \qquad (1)$$

То же следует из общей формулы для момента инерции относительно произвольной оси:

$$I = I_{x'}\cos^2\alpha + I_{y'}\cos^2\beta + I_{z'}\cos^2\gamma - 2I_{x'y'}\cos\alpha\cos\beta -$$
$$- 2I_{x'z'}\cos\alpha\cos\gamma - 2I_{y'z'}\cos\beta\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы. В данном случае $\cos\gamma = 0$, поскольку ось Oz' перпендикулярна оси Oy, а $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, поскольку $\alpha + \beta = \pi/2$.

Далее, поскольку сечение эллипсоида инерции является окружностью, направление момента количества движения совпадает с направлением угловой скорости ω (ось Oz' можно не учитывать, поскольку скорость ω составляющей по этой оси не имеет). Следовательно, момент количества движения пластинки относительно центра O равен

$$L_O = I_y\vec{\omega};$$

он имеет только одну ненулевую проекцию

$$L_y = I_y\omega. \tag{2}$$

Отметим, что поскольку скорость центра масс равна нулю, момент количества движения относительно любой другой точки

$$L_{O_1} = L_O + M\mathrm{v}_O \times OO_1$$

будет равен моменту количества движения относительно точки O, поскольку первый множитель в векторном произведении равен нулю:

$$L_{O_1} = L_O.$$

В частности, то же значение будет иметь и момент количества движения относительно точки B.

Рассмотрим теперь явления, происходящие после мгновенной остановки, которую мы можем рассматривать как удар. Применим теорему моментов к вращению вокруг точки O. Поскольку ударные силы действуют в точке O, они не дают момента, и, следовательно, момент количества движения сохраняется. Однако вращение будет происходить уже около оси, параллельной Oy, проходящей через точку B.

Момент инерции относительно этой оси, которую мы обозначим через $B\xi$ (рис.), вычисляется по известной формуле для моментов инерции относительно параллельных осей:

$$I_\xi = I_y + M\cdot OB^2,$$

или

$$I_\xi = \frac{1}{3}Mb^2 + M\cdot r^2 = \frac{1}{3}Mb^2 + 2Mb^2 = \frac{7}{3}Mb^2.$$

Момент количества движения относительно этой оси равен

$$L_\xi = I_\xi \omega_1 = \frac{7}{3} Mb^2 \omega_1, \tag{3}$$

где ω_1 – угловая скорость после удара.

Из закона сохранения момента количества движения имеем

$$L_\xi = L_y, \tag{4}$$

поскольку, как уже отмечалось, ударные силы не могут изменить момента количества движения относительно точки B, а следовательно, и относительно оси $B\xi$. Из (1)–(2) имеем, подставляя их в (4),

$$\frac{7}{3} Mb^2 \omega_1 = \frac{1}{3} Mb^2 \omega.$$

Отсюда

$$\omega_1 = \frac{1}{7} \omega. \tag{5}$$

Для нахождения ударного импульса применим теоремы об изменении количества движения. Поскольку точка B до удара движется перпендикулярно оси Ox, т.е. по оси z, очевидно, что для ее остановки так же, т.е. по оси z, должен быть направлен и ударный импульс. До удара центр масс O пластинки неподвижен, и, следовательно, ее количество движения равно нулю:

$$Q_z = Mv_{Oz} = M \cdot 0 = 0.$$

После удара пластинка вращается вокруг оси $B\xi$ с угловой скоростью ω_1. Следовательно, центр масс движения в направлении оси Oz со скоростью

$$v_{1Oz} = \omega_1 \cdot OB = \omega_1 r,$$

где r – половина длины диагонали. Следовательно, количество движения пластинки после удара равно

$$Q_{z1} = Mv_{1Oz} = M\omega_1 r.$$

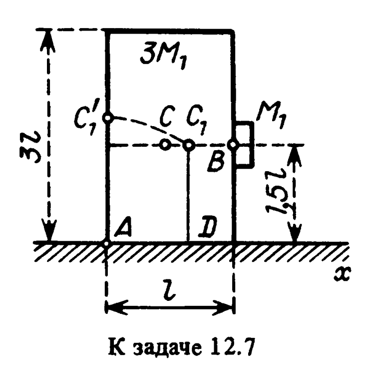
Применяя теорему количеств движения к проекции на ось Oz (единственной не равной нулю), имеем для ударного импульса

$$S_z = Q_{z1} - Q_z = M\omega_1 r - 0 = M\omega_1 r.$$

Подставляя сюда значение ω_1 из (5), окончательно получаем

$$S_z = \frac{M\omega r}{7}.$$

Задача 12.7. Точка массой M_1, брошенная с горизонтальной скоростью v_1 в призму массой $3M_1$, удерживается в точке удара B, находящейся на половине высоты призмы. Последняя стоит на полу и прикреплена в точке A к полу шарниром. Призма может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через шарнир A (рис.).



К задаче 12.7

Какова должна быть скорость v_1 массы, чтобы призма опрокинулась?

Решение. Разобьем процесс на два: 1) удар; 2) поворот призмы и прикрепленной к ней точки массой M_1 вокруг оси, проходящей через точки A. В момент удара внешние ударные силы действуют параллельно плоскости пола. Сразу после удара система начнет поворачиваться вокруг оси, проходящей через A.

Момент внешних ударных сил относительно точки A равен нулю (силы, действующие между массой и призмой, являются внутренними; силы тяжести как неударные в соответствии с теорией удара можно не учитывать). Следовательно, момент количества движения относительно оси, проходящей через A, в процессе удара сохраняется. Обозначая эту ось для краткости через z, имеем до удара

$$L_z = M_1 v_1 \cdot \frac{3}{2} l,$$

где $M_1 v_1$ – количество движения, а $1{,}5l$ – длина перпендикуляра, опущенного из точки A на направление вектора количества движения (рис.). После удара момент количества движения равен

$$L_{z1} = I_z \omega,$$

где ω – угловая скорость относительно оси z, а I_z – момент инерции системы относительно оси z.

После удара система состоит из двух соединившихся частей – призмы и точки массой M_1. Следовательно,

$$I_z = I_{z1} + I_{z2}. \qquad (1)$$

Здесь I_{z1} — момент инерции призмы относительно ребра:

$$I_{z1} = \frac{1}{3} M(d^2 + b^2),$$

где M — масса призмы, d и b — длины соответствующих ребер. В данном случае

$$I_{z1} = \frac{1}{3} \cdot 3M_1 [(3l)^2 + l^2] = 10M_1 l^2.$$

Момент инерции I_{z2} материальной точки, находящейся в B, относительно оси, проходящей через точку A, равен

$$I_{z2} = M_1 \cdot AB^2 = M_1 \left[l^2 + \left(\frac{3}{2} l \right)^2 \right] = \frac{13}{4} M_1 l^2.$$

Отсюда момент инерции всей системы, согласно (1), равен

$$I_z = 10M_1 l^2 + \frac{13}{4} M_1 l^2 = \frac{53}{4} M_1 l^2.$$

Приравнивая теперь моменты количества движения до и после удара, имеем

$$I_z \omega = \frac{3}{2} M_1 v_1 l,$$

или

$$\frac{53}{4} M_1 l^2 \omega = \frac{3}{2} M_1 v_1 l.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{6}{53} \frac{v_1}{l}. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь движение после удара. Система вращается вокруг оси, проходящей через A. Для того чтобы она опрокинулась, ее центр масс должен пройти вертикаль, проходящую через точку A. При этом кинетическая энергия системы должна быть такой, чтобы общий центр масс, находящийся в точке C_1, поднялся до вертикали $C_1'A$ и при этом система еще сохранила какую-то скорость. Для этого кинетическая энергия системы в момент после удара должна быть больше работы сил тяжести, производимых при переходе центра масс от начального положения C_1 до C_1'. Следовательно, должно выполняться неравенство

$$T > A, \qquad (3)$$

где T – кинетическая энергия системы после удара:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

A – работа сил тяжести:

$$A = P(h_1 - h_2) = 4M_1 g(C_1'A - C_1 D). \tag{4}$$

Здесь $P = 4M_1 g$ – сила тяжести всей системы; $C_1'A$ – высота конечного положения общего центра масс системы; $C_1 D = 1{,}5l$ – высота начального положения общего центра масс системы (на самом деле работа A, конечно, имеет обратный знак, рассматривается та работа, на преодоление которой уходит кинетическая энергия системы).

Координаты центра масс всей системы находим по обычным формулам, зная координаты центра масс призмы $\left(\frac{l}{2};\ \frac{3}{2}l\right)$, координаты центра тяжести массы M_1 (точка B) – $\left(l;\ \frac{3}{2}l\right)$; отсюда

$$x_{C1} = \frac{3M_1 l/2 + M_1 l}{3M_1 + M_1} = \frac{5}{8} l,$$

$$y_{C1} = \frac{3M_1 \cdot 3l/2 + M_1 \cdot 3l/2}{3M_1 + M_1} = \frac{3}{2} l.$$

Отсюда

$$h_2 = C_1 D = y_{C1} = \frac{3}{2} l,$$

$$h_1 = C_1'A = C_1 A = \sqrt{x_{C1}^2 + y_{C1}^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{8} l\right)^2 + \left(\frac{3}{2} l\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{169}{64}}\, l = \frac{13}{8} l.$$

Подставляя в (4), получаем

$$A = 4M_1 g\left(\frac{13}{8} l - \frac{3}{2} l\right) = \frac{M_1 g l}{2}. \tag{5}$$

Из неравенства (3) имеем

$$\frac{1}{2} I_z \omega^2 > A.$$

Используя (2), (5), получаем

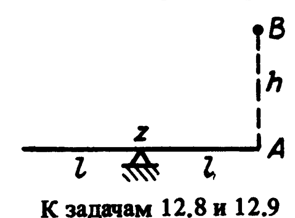
$$\frac{1}{2}\,\frac{6}{53}\,\frac{v_1}{l}\,\frac{3}{2}M_1v_1l > \frac{M_1gl}{2},$$

или

$$v_1^2 > \frac{53}{9}gl.$$

Это – условие опрокидывания.

Задача 12.8. На две одинаковые чаши равноплечих весов с высот h_1 и h_2 брошены два груза массой m_1 и m_2. Масса каждой чаши m. Оба



К задачам 12.8 и 12.9

груза падают на чаши одновременно. Центры чаш весов расположены на расстоянии l от оси z, вокруг которой чаши могут поворачиваться без трения (рис.).

Считая удар неупругим, определить скорость v, с которой движутся чаши весов после падения грузов. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Скорости падения обоих грузов в момент удара обозначим v_1 и v_2. Эти скорости равны

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}, \quad v_2 = \sqrt{2gh_2}. \tag{1}$$

Момент количества движения относительно оси z системы материальных точек, состоящей из двух грузов и двух чаш, перед ударом равен

$$L_z = m_1v_1l - m_2v_2l.$$

Взят знак минус, так как грузы падают на две различные чаши весов и моменты количеств движения действуют в противоположных направлениях. Скорость чаш перед ударом равна нулю.

Момент количества движения относительно оси z системы материальных точек после удара равен

$$L_{z1} = (m_1 + m)vl + (m_2 + m)vl,$$

где v – искомая скорость всей системы после удара.

Приравнивая значения моментов количеств движения системы относительно оси z до и после удара, находим

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (2m + m_1 + m_2)v,$$

откуда

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{2m + m_1 + m_2},$$

или, учитывая формулы (1), имеем

$$v = \sqrt{2g}\,\frac{m_1\sqrt{h_1} - m_2\sqrt{h_2}}{2m + m_1 + m_2}.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 44.24–44.27.

§ 3. ПОТЕРЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ УДАРЕ ДВУХ ТЕЛ

При абсолютно неупругом ударе двух тел происходит потеря кинетической энергии, которая расходуется на остаточную деформацию и нагревание тел.

При упругом ударе двух тел на первом этапе при возрастании деформации кинетическая энергия переходит в другие формы энергии. На втором этапе в. процессе восстановления недеформированного состояния снова приобретается кинетическая энергия. При упругом ударе потеря кинетической энергии меньше, чем при соответствующем абсолютно неупругом ударе.

При абсолютно упругом ударе происходит полное восстановление недеформированного состояния и, следовательно, потеря кинетической энергии равна нулю.

Пусть T_1 – кинетическая энергия системы в начале удара, T_2 – кинетическая энергия системы в конце удара, m_1 и m_2 – массы соударяющихся тел, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ – скорости тел в начале удара, k – коэффициент восстановления недеформированного состояния при ударе. Тогда потеря кинетической энергии при прямом центральном упругом ударе двух поступательно движущихся тел вычисляется по формуле

$$T_1 - T_2 = (1 - k^2)\,\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\,(v_{1n} - v_{2n})^2.$$

При абсолютно неупругом ударе $k = 0$ и, следовательно,

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\,(v_{1n} - v_{2n})^2.$$

При абсолютно упругом ударе $k = 1$ и, следовательно, $T_1 - T_2 = 0$

Если до удара второе тело было в покое, т.е. $v_2 = 0$, то кинетическая энергия системы в начале удара равна $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$, а потеря кинетической

энергии при ударе дается выражением

$$T_1 - T_2 = (1 - k^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1.$$

Решение задач на вычисление потери кинетической энергии при ударе двух тел следует выполнить по приведенным выше формулам.

Задача 12.9. Балка длиной $2l$ и массой m закреплена шарнирно в своей середине O. Балка может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O. Балка в начальный момент находилась в покое в горизонтальном положении. На конец балки A падает с высоты h точка B, масса которой m_1. Удар абсолютно упругий (рис. к задаче 12.8).

Какую скорость v_2 имеет точка B после удара и какую угловую скорость ω_2 получает балка? Балку считать однородным тонким стержнем.

Р е ш е н и е. При падении с высоты h точка B получает скорость

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \tag{1}$$

При столкновении действуют упругие силы, являющиеся внутренними для системы, и внешние силы – сила тяжести и реакция опоры O. Как обычно при ударе, импульс конечной силы (силы тяжести) можно не учитывать.

Для того чтобы исключить импульс реакции опоры, рассмотрим уравнение моментов количества движения относительно опоры, поскольку момент реакции опоры относительно опоры равен нулю. Следовательно, полный момент количества движения системы относительно опоры до и после удара сохраняется:

$$L_1 = L_2,$$

где моменты количества движения берутся относительно точки опоры O, причем L_1 – момент количества движения до удара, а L_2 – после удара.

До удара движется только точка B, и ее момент количества движения относительно точки O равен

$$L_1 = m_1 v_1 l \tag{2}$$

и совпадает с моментом количества движения системы. После удара момент количества движения точки B относительно O равен

$$L_2^{(1)} = m_1 v_2 l,$$

где v_2 – скорость точки B после удара.

Балка после удара начинает вращаться вокруг своей опоры с угловой скоростью ω_2. Ее момент количества движения относительно точки O равен

$$L_2^{(2)} = I_O \omega_2,$$

где I_O – момент инерции балки относительно точки O (точнее, это момент инерции относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости через точку O). Поскольку балка представляет собой однородный стержень длиной $2l$, то

$$I_O = \frac{ml^2}{3}. \tag{3}$$

Следовательно,

$$L_2^{(2)} = \frac{ml^2}{3}\,\omega_2.$$

Полный момент количества движения системы после удара равен

$$L_2 = L_2^{(1)} + L_2^{(2)} = m_1 v_2 l + \frac{ml^2}{3}\,\omega_2.$$

В соответствии с уравнением (2) находим

$$m_1 v_1 l = m_1 v_2 l + \frac{ml^2}{3}\,\omega_2, \tag{4}$$

откуда после преобразования получим уравнение, содержащее два неизвестных:

$$3m_1(v_1 - v_2) = ml\omega_2. \tag{5}$$

Для получения второго уравнения используем закон сохранения энергии. Поскольку столкновение является абсолютно упругим, то в точке столкновения энергия не расходуется. Реакция же опоры работы не производит, поскольку опора неподвижна. Следовательно,

$$T_1 = T_2, \tag{6}$$

где T_1 и T_2 – кинетические энергии системы соответственно до и после удара.

До удара движется только точка B. Следовательно,

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

После удара кинетическая энергия точки B равна

$$T_2^{(1)} = \frac{m_1 v_2^2}{2},$$

а кинетическая энергия балки с учетом (3) –

$$T_2^{(2)} = I_O\,\frac{\omega_2^2}{2} = \frac{ml^2}{3}\,\frac{\omega_l^2}{2}.$$

Полная кинетическая энергия системы после удара равна

$$T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)} = \frac{m_1 v_2^2}{2} + \frac{ml^2\omega_2^2}{6}.$$

Согласно (5),

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_2^2}{2} + \frac{ml^2\omega_2^2}{6},$$

или после преобразования

$$3m_1(v_1^2 - v_2^2) = ml^2\omega_2^2. \qquad (7)$$

Это второе уравнение (вместе с уравнением (5)) позволяет определить v_2 и ω_2. Умножим обе части уравнения (7) на m и подставим вместо $ml\omega_2$ значение из (5). Имеем

$$3mm_1(v_1^2 - v_2^2) = m^2l^2\omega_2^2 = (ml\omega_2)^2 = 9m_1^2(v_1 - v_2)^2.$$

Сокращая на $3m_1(v_1 - v_2)$ и проводя очевидные преобразования, получаем

$$v_2 = \frac{3m_1 - m}{3m_1 + m} v_1. \qquad (8)$$

Для определения ω_2 подставляем значение v_2 из (8) в (5). Имеем

$$\omega_2 = \frac{v_1}{l}\,\frac{6m_1}{3m_1 + m}. \qquad (9)$$

Выражения (8) и (9) дают ответ на поставленную задачу. Если нужно выразить v_2 и ω_2 через величины, данные в условии, нужно подставить вместо v_1 выражение из (1). Получим

$$v_2 = \sqrt{2gh}\,\frac{3m_1 - m}{3m_1 + m}, \qquad \omega_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{l}\,\frac{6m_1}{3m_1 + m}.$$

Можно решить задачу и без использования уравнения энергии. Для этого нужно подробнее рассмотреть процесс удара. Этот процесс состоит из двух частей. В первой половине происходит взаимное сжатие соударяющихся тел до момента относительного покоя, когда они движутся совместно с одинаковой скоростью, как это было бы при неупругом ударе. Во второй половине происходит взаимное расталкивание до полного разделения. При абсолютно упругом ударе изменение сил взаимодействия в этой половине процесса представляет собой повторение в обратном порядке соответствующих изменений, имевших место в первой половине (поскольку силы представляют однозначную функцию деформаций).

Обозначим скорость точки B в момент наибольшего сближения через u. Тогда для угловой скорости балки получим

$$\omega' = \frac{u}{l},$$

поскольку относительная скорость равна нулю.

Приравнивая моменты количества движения в начальный момент и в момент наибольшего сближения, имеем аналогично (4)

$$m_1 v_1 l = m_1 u l + \frac{ml^2}{3} \frac{u}{l} \tag{10}$$

(здесь вместо v_2 поставлено u, а вместо ω_2 – величина $\omega' = u/l$).

Отсюда

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m/3} = \frac{3m_1 v_1}{3m_1 + m}. \tag{11}$$

Это скорость точки B к моменту наибольшего сжатия (относительного покоя). Такую же скорость имела бы точка B, если бы удар был неупругим.

Для нахождения скорости после удара рассмотрим отдельно движение точки B в процессе удара. В первой половине движения ее скорость изменяется от v_1 до u. Согласно теореме импульсов,

$$m_1 u - m_1 v_1 = S^{(1)}, \tag{12}$$

где $S^{(1)}$ – импульс внешних сил, т.е. в данном случае упругих сил.

Во второй половине движения ее скорость изменяется от u до v_2. Имеем

$$m_1 v_2 - m_1 u = S^{(2)}. \tag{13}$$

При абсолютно упругом ударе, как было объяснено выше,

$$S^{(1)} = S^{(2)}, \tag{14}$$

поскольку упругие силы во второй половине процесса те же, что и в первой. (Для неупругого удара было бы $S^{(2)} = 0$. Для частично упругого удара принимают $S^{(2)} = kS^{(1)}$, где k называется *коэффициентом восстановления.*)

Из (12)–(14) получим

$$m_1 v_2 - m_1 u = m_1 u - m_1 v_1,$$

или

$$v_2 = 2u - v_1.$$

Подставляя значение u из (11), имеем

$$v_2 = 2\frac{3m_1 v_1}{3m_1 + m} - v_1 = v_1\frac{3m_1 - m}{3m_1 + m},$$

что совпадает с выражением (8).

Величину ω_2 можно получить либо из соотношения (5), либо независимо, проводя то же рассуждение, но исходя из теоремы моментов. Уравнение (10) нужно записать в виде (учитывая, что $u = \omega' l$)

$$m_1 v_1 l = m_1 \omega' l^2 + \frac{ml^2}{3}\omega',$$

откуда

$$\omega' = \frac{v_1}{l}\,\frac{3m_1}{3m_1 + m}. \tag{15}$$

Вместо (12) и (13) получим

$$\frac{ml^2}{3}\omega' - \frac{ml^2}{2}\omega_1 = M^{(1)}, \quad \frac{ml^2}{3}\omega_2 - \frac{ml^2}{2}\omega' = M^{(2)},$$

где $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ – соответственно моменты импульса упругих сил за первую и вторую половину процесса удара.

Поскольку $M^{(1)} = M^{(2)}$, то

$$\frac{ml^2}{3}\omega_2 - \frac{ml^2}{3}\omega' = \frac{ml^2}{3}\omega' - \frac{ml^2}{3}\omega_1.$$

Отсюда

$$\omega_2 = 2\omega' - \omega_1 = 2\omega',$$

поскольку $\omega_1 = 0$ (балка до удара находилась в покое). Подставляя вместо ω' значение (15), имеем

$$\omega_2 = \frac{v_1}{l}\,\frac{6m_1}{3m_1 + m},$$

что совпадает с (9).

Задача 12.10. Брусок OA, вращаясь вокруг оси O без трения, падает из состояния покоя. Начальный угол бруска с горизонтом равен α (рис.). Ударившись о неподвижный горизонтальный брусок B, он отскакивает от последнего на угол β. Масса бруска OA равна m; $OA = l$, $OB = l_1$.

Определить коэффициент восстановления k при ударе.

Решение. Следует предполагать, что брусок B остается неподвижным и после удара, поскольку удар происходит по закрепленному брус-

ку B. Разобьем процесс на три этапа: 1) падение бруска OA до горизонтального положения; 2) удар; 3) обратный подъем.

При падении брусок приобретает угловую скорость, определяемую теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = A, \tag{1}$$

где T_1, T_2 — кинетические энергии соответственно в начале и конце движения, A — работа активных сил. Имеем

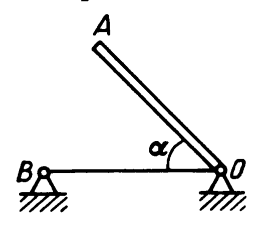
$$T_1 = 0, \tag{2}$$

$$T_2 = I\frac{\omega^2}{2}, \tag{3}$$

где

$$I = \frac{ml^2}{3} \tag{4}$$

— момент инерции бруска относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O, а ω — угловая скорость.



К задаче 12.10

Единственной активной силой является сила тяжести, приложенная в середине бруска. Работа этой силы равна

$$A = mgh, \tag{5}$$

где h — высота, на которую перемещается центр тяжести:

$$h = \frac{l}{2}\sin\alpha. \tag{6}$$

Подставляя (2)–(6) в (1), получаем

$$\frac{ml^2}{3}\frac{\omega^2}{2} = mg\frac{l}{2}\sin\alpha. \tag{7}$$

Из (7), сокращая общие множители, имеем

$$l\omega^2 = 3g\sin\alpha. \tag{8}$$

На третьем этапе, при подъеме, применимо то же уравнение (1), но здесь

$$T_2 = 0, \tag{9}$$

поскольку брусок поднимается до остановки;

$$T_1 = I\frac{\omega_1^2}{2}, \tag{10}$$

где ω_1 – угловая скорость после удара;

$$A = -mgh_1, \tag{11}$$

где

$$h_1 = \frac{l}{2}\sin\beta \tag{12}$$

(знак минус взят потому, что при подъеме конечная точка находится выше начальной).

Подставляя (9)–(12) в уравнение (1) и учитывая (3), получаем

$$-\frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega_1^2 = -mg\frac{l}{2}\sin\beta, \tag{13}$$

откуда

$$l\omega_1^2 = 3g\sin\beta. \tag{14}$$

Этот результат, разумеется, совершенно аналогичен выражению (8) и мог бы быть написан прямо по аналогии.

Рассмотрим теперь второй этап – процесс удара. Он состоит из двух фаз – сближения соударяющихся тел до состояния наибольшего сжатия (в данном случае до полной остановки, поскольку брусок B, как указано выше, остается неподвижным) и обратного подъема, при котором упругие силы частично восстанавливают положение бруска OA.

В соответствии с теорией удара считаем, что за время удара положение тела не изменяется. Если импульс упругих сил в первой фазе равен S и направлен перпендикулярно бруску OA, то этот импульс во второй фазе имеет то же направление и равен kS.

Рассмотрим теперь уравнения моментов относительно точки O для первой и второй фаз. Для первой фазы

$$L_2 - L_1 = M_S, \tag{15}$$

где L_2 – момент количества движения бруска к концу первой фазы, L_1 – до удара, причем

$$L_2 = 0, \tag{16}$$

так как к концу первой фазы брусок неподвижен, а

$$L_1 = I\omega. \tag{17}$$

Момент импульса M_S относительно точки O равен

$$M_S = -Sl_1, \tag{18}$$

если считать, что ударные силы приложены в точке B (фактически это не имеет значения, существенно только, чтобы распределение ударных сил вдоль соударяющихся поверхностей во второй фазе было такое же, как и в первой, чтобы соотношение между импульсами сил в обоих фазах переходило в соотношение между их моментами).

Подставляя (16)–(18) в (15) и учитывая (3), имеем

$$0 - \frac{ml^2}{3}\omega = Sl_1, \tag{19}$$

или

$$ml^2\omega = 3Sl_1. \tag{20}$$

Уравнение (15) можно применить и ко второй фазе, только здесь

$$L_1 = 0, \tag{21}$$

поскольку в начале этой фазы брусок OA неподвижен.

Далее имеем

$$L_2 = -I\omega_1, \tag{22}$$

поскольку в конце фазы брусок OA вращается с угловой скоростью ω_1 по ходу часовой стрелки.

В соответствии с условием момент импульса равен

$$M_S = -kSl_1, \tag{23}$$

так как коэффициент восстановления равен k.

Подставляя (21)–(23) в (15), имеем

$$-\frac{ml^2}{3}\omega_1 = -kSl_1, \tag{24}$$

или

$$ml^2\omega_1 = 3kSl_1. \tag{25}$$

Подставляя в (25) величину Sl_1 из (20), получаем

$$ml^2\omega_1 = kml^2\omega, \tag{26}$$

или

$$\omega_1 = k\omega. \tag{27}$$

Разделим теперь соотношение (24) на соотношение (8). Получим

$$\frac{l\omega_1^2}{l\omega^2} = \frac{3g\sin\beta}{3g\sin\alpha},$$

или

$$\frac{\omega_1^2}{\omega^2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Подставляя сюда ω_1 из (27), получаем

$$k^2 = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

и окончательно

$$k = \sqrt{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}. \tag{28}$$

Заметим, что в ответ не вошли ни l, ни l_1. Более того, как нетрудно видеть, при выводе по существу не использовались ни однородность, ни упругие свойства бруска. Необходимо только постоянство момента инерции I и положения центра масс, а также, как указывалось выше, пропорциональность коэффициентов восстановления упругих сил во всех точках соприкосновения.

Поэтому вычисления, приведенные в решении, можно заменить следующим рассуждением. Поскольку ударяемое тело неподвижно, а коэффициент восстановления равен k, то значения скоростей точек ударяющего тела после удара находятся в отношении k к значениям скоростей до удара (направления противоположны), а кинетические энергии, следовательно, находятся в отношении k^2. Но кинетическая энергия до удара равна работе сил тяжести при падении, а после удара — работе сил тяжести при подъеме до положения покоя. Эти работы пропорциональны $\sin\alpha$ и $\sin\beta$, поэтому

$$\sin\beta = k^2\sin\alpha,$$

что и приводит к соотношению (28).

Задача 12.11. Брусок массой m_1 и длиной l может вращаться вокруг шарнира O_1. Он образует вначале угол α с вертикалью и находится в покое. Вращаясь, он падает и в вертикальном положении ударяет точкой A по точке B куба массой m_2 и длиной ребра b, который может вращаться вокруг шарнира O_2 (рис.). Коэффициент восстановления при ударе равен $k = 2/3$.

При каком начальном отклонении бруска от вертикали куб ударом может быть опрокинут вокруг ребра O_2? Трением между бруском и кубом пренебречь.

Решение. Рассмотрим сначала процесс движения. Он распадается на три этапа: 1) падение стержня до вертикального положения; 2) удар; 3) поворот куба около оси, проходящей через O_2.

На первом этапе используем теорему об изменении кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = A_1. \quad (1)$$

Здесь

$$T_1 = 0 \quad (2)$$

– кинетическая энергия бруска в начальный момент;

$$T_2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \quad (3)$$

– кинетическая энергия бруска в конечный момент:

$$I_1 = \frac{1}{3} m_1 l^2 \quad (4)$$

К задаче 12.11

– момент инерции бруска относительно оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости рисунка; ω_1 – угловая скорость; A_1 – работа активных сил (в данном случае – силы тяжести). Поскольку брусок считается однородным, то центр масс находится в его середине – на расстоянии $l/2$ от точки O_1. В начальном положении расстояние по вертикали от него до точки O_1 равно $(l/2)\cos\alpha$, а в конечном положении оно составляло $l/2$. Следовательно, разность высот равнялась

$$h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha, \quad (5)$$

и работа силы тяжести –

$$A_1 = m_1 g h = m_1 g \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha). \quad (6)$$

Подставляя (2)–(4), (6) в (1), имеем

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} m_1 l^2 \omega_1^2 = m_1 g \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha), \quad (7)$$

откуда

$$l\omega_1^2 = 3g(1 - \cos\alpha). \quad (8)$$

Рассмотрим теперь собственно удар. Он распадается на две фазы. В первой фазе ударяющиеся тела двигаются до наибольшего сближения, причем горизонтальная составляющая относительной скорости в точке соприкос-

новения становится равной нулю, а затем, во второй фазе, под действием упругих сил соударяющиеся тела отталкиваются. По основному предположению теории удара этот процесс протекает "мгновенно", т.е. положение тел за это время не изменяется. В данном случае соприкасаются конец бруска A и точка B куба. Обозначим горизонтальную составляющую их общей скорости в момент наибольшего сближения через u (подчеркнем еще раз, что эта скорость одинакова, иначе относительная скорость не была бы равна нулю, и, следовательно, это не был бы момент наибольшего сближения). Отметим, что у точки B куба имеется и вертикальная составляющая скорости, но она роли не играет и учитываться не будет.

Применим к каждому из тел теорему об изменении момента количества движения. Для бруска рассмотрим моменты относительно точки O_1, чтобы исключить момент импульса реактивных сил в опоре O_1 (импульсы конечных сил во внимание не принимаются):

$$L_2 - L_1 = M_S. \tag{9}$$

Здесь

$$L_1 = I_1 \omega_1 \tag{10}$$

— момент количества движения до момента соприкосновения,

$$L_2 = I_1 \omega_1' \tag{11}$$

— момент количества движения в момент наибольшего сближения,

$$\omega_1' = \frac{u}{l} \tag{12}$$

— угловая скорость в момент наибольшего сближения.

Величина

$$M_S = -Sl \tag{13}$$

— момент импульса сил S, действующих на брусок со стороны куба относительно точки O_1 (очевидно, что силы со стороны куба действуют в сторону бруска). Подставляя (10), (11) и (13) в (9) и учитывая (12) и (4), имеем

$$\frac{m_1 l^2}{3}\frac{u}{l} - \frac{m_1 l^2}{3}\omega_1 = -Sl, \tag{14}$$

или

$$\frac{1}{3} m_1 u - \frac{1}{3} m_1 l \omega_1 = -S. \tag{15}$$

Применим теперь уравнение (9) к кубу. Здесь

$$L_1 = 0, \tag{16}$$

поскольку вначале куб неподвижен, а

$$L_2 = -I_2 \omega', \tag{17}$$

поскольку после удара куб начинает вращаться по ходу часовой стрелки. Для куба момент инерции относительно ребра равен

$$I_2 = \frac{2}{3} m_2 b^2. \tag{18}$$

Угловая скорость куба в момент удара равна

$$\omega' = \frac{u}{b}. \tag{19}$$

Здесь ω' взята по абсолютной величине, поскольку знак был учтен в (17). Можно было взять в (17) знак "плюс" и учесть знак в (19).

Момент ударных сил для куба равен

$$M_S = -Sb, \tag{20}$$

поскольку ударные силы действуют со стороны бруска на куб.

Подставляя (16)–(20) в (9), имеем

$$-\frac{2}{3} m_2 b^2 \frac{u}{b} = -Sb, \tag{21}$$

или

$$\frac{2}{3} m_2 u = S. \tag{22}$$

Подставим значение S из (22) в (15), тогда

$$\frac{1}{3} m_1 u - \frac{1}{3} m_1 l \omega_1 = -\frac{2}{3} m_2 u. \tag{23}$$

Отсюда можно определить горизонтальную составляющую общей скорости в момент наибольшего сближения. Имеем

$$m_1 u + 2m_2 u = m_1 l \omega_1, \tag{24}$$

отсюда

$$u = \frac{m_1 l \omega_1}{m_1 + 2m_2} \tag{25}$$

и

$$\omega_1 = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 l} u. \tag{26}$$

Рассмотрим теперь вторую фазу удара (только для куба: движение бруска после удара нам не интересно). Обозначим угловую скорость куба после удара через ω_2, используем снова уравнение (19). Теперь

$$L_1 = -I_2 \omega' = -I_2 \frac{u}{b} \tag{27}$$

— момент количества движения в начальный момент, а

$$L_2 = -I_2 \omega_2 \tag{28}$$

— момент количества движения после расхождения.

Момент импульса равен

$$M_S = -\frac{2}{3} Sb, \tag{29}$$

поскольку по условию коэффициент восстановления равен 2/3, и, следовательно, импульс сил при восстановлении равен (2/3) S. Подставляя (27)–(29) в (9), имеем, учитывая (18),

$$-\frac{2}{3} m_2 b^2 \omega_2 + \frac{2}{3} m_2 b^2 \frac{u}{b} = -\frac{2}{3} Sb, \tag{30}$$

или

$$m_2 b \omega_2 - m_2 u = S. \tag{31}$$

Подставляя сюда значение S из (22), получаем

$$m_2 b \omega_2 = m_2 u + \frac{2}{3} m_2 u, \tag{32}$$

или

$$\omega_2 b = \frac{5}{3} u. \tag{33}$$

Отсюда

$$u = \frac{3}{5} b \omega_2. \tag{34}$$

Если дан угол α, то из (8) можно определить ω_1, из (25) – величину u, из (33) – величину ω_2. Для решения же поставленной задачи этого не нужно. Нам нужно найти угол α. Рассмотрим поэтому третий этап движения.

Определим связь величины ω_2 и высоты подъема центра тяжести C_2 куба. При подъеме центра тяжести куба из положения C_2 в C_2' (это необ-

ходимо, чтобы куб опрокинулся) сила тяжести производит отрицательную работу

$$A = -m_2 gh = -m_2 g\left(b\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{b}{2}\right), \tag{35}$$

поскольку высота подъема равна разности половины диагонали квадрата и половины его стороны (рис.). Из теоремы об изменении кинетической энергии (1) получаем, что кинетическая энергия в этом положении

$$T_2 = T_1 + A. \tag{36}$$

Очевидно, что для того, чтобы куб продолжал движение, нужно, чтобы соблюдалось неравенство $T_2 > 0$, т.е.

$$T_1 > m_2 g \frac{b}{2}(\sqrt{2} - 1). \tag{37}$$

Кинетическая энергия куба в начальный момент равна

$$T_1 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2. \tag{38}$$

Учитывая (18), имеем из (37) и (38) условие опрокидывания

$$\frac{1}{2}\frac{2}{3} m_2 b^2 \omega_2^2 > m_2 g \frac{b}{2}(\sqrt{2} - 1), \tag{39}$$

или

$$\omega_2^2 > \frac{3}{2}\frac{g}{b}(\sqrt{2} - 1). \tag{40}$$

Выразим теперь величину α через ω_2. Имеем из (8)

$$1 - \cos\alpha = \frac{l}{3g}\omega_1^2.$$

Тогда из (26)

$$1 - \cos\alpha = \frac{1}{3lg}\frac{(m_1 + 2m_2)^2}{m_1^2} u^2$$

и из (34)

$$1 - \cos\alpha = \frac{3b^2}{25lg}\frac{(m_1 + 2m_2)^2}{m_1^2}\omega_2^2,$$

и, наконец, из (40) имеем

$$1-\cos\alpha > \frac{3b^2}{25lg}\frac{(m_1+2m_2)^2}{m_1^2}\frac{3}{2}\frac{g}{b}(\sqrt{2}-1) =$$
$$= \frac{9b}{50l}\frac{(m_1+2m_2)^2}{m_1^2}(\sqrt{2}-1).$$

Более просто это неравенство можно представить, заменив $1-\cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$. Тогда, извлекая из обоих частей квадратный корень, получаем неравенство в виде

$$\sin\frac{\alpha}{2} > \frac{3}{10}\sqrt{\frac{b}{l}}\frac{m_1+2m_2}{m_1}\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Указание. Рекомендуем решить задачу 44.6 из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского.

§ 4. УДАР ПО ТЕЛУ, ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

При ударе по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, в опорах возникают реактивные ударные импульсы S_A и S_B. Пусть ось z подвижной системы координат, связанной с телом, направлена вдоль оси вращения. Плоскость xz проведена через ось вращения и центр масс C. Ось y образует вместе с осями x и z правую систему осей координат (рис. 12.8). Предположим, что ударный импульс S приложен в точке D, лежащей на оси x. Пусть, далее: $OD = d$, $OA = a$, $OB = b$, $S = S_x i + S_y j + S_z k$, $S_A = S_{Ax} i + S_{Ay} j + S_{Az} k$, $S_B = S_{Bx} i + S_{By} j + S_{Bz} k$, $\vec{\omega}_1$ — угловая скорость тела в конце удара.

Для определения проекций реактивных ударных импульсов S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{Bz} на подвижные оси декартовых координат, связанные с телом, вращающимся вокруг неподвижной оси z, следует решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} &S_{Ax}+S_{Bx} = -S_x,\quad S_{Ay}+S_{By} = Mx_C(\omega_{2z}-\omega_{1z})-S_y,\\ &S_{Az}+S_{Bz} = -S_z,\\ &S_{Ay}a - S_{By}b = -I_{xz}(\omega_{2z}-\omega_{1z}),\\ &-S_{Az}a + S_{Bx}b = S_z d - I_{yz}(\omega_{2z}-\omega_{1z}).\end{aligned} \tag{1*}$$

(Эта система уравнений является результатом применения теорем об изменении главного вектора количества движения в интегральной форме и об изменении главного момента количества движения в приложении к ударным силам в проекциях на подвижные оси декартовых координат.)

Проекции реактивных ударных импульсов на ось вращения S_{Az} и S_{Bz} входят только в третье уравнение системы. Поэтому может быть вычислена только их сумма, а каждая из этих величин в отдельности не определяется. Если же верхняя опора B выполнена в виде подшипника, то $S_{Bz} = 0$, и из третьего уравнения системы вычисляется S_{Az}.

Чтобы при ударе по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, реактивные ударные импульсы S_A и S_B обращались в нуль (что является существенным при выполнении конструкций, работающих на удар), должны быть удовлетворены следующие условия:

1) ударный импульс S должен быть направлен перпендикулярно плоскости xz, проходящей через ось вращения и центр масс тела, т.е. $S_x = S_z = 0$ и $\boldsymbol{S} = S_y\boldsymbol{j}$;

2) ось вращения тела z должна быть главной осью инерции в точке пересечения с перпендикулярной плоскостью xy, содержащей ударный импульс S, т.е. $I_{xz} = I_{yz} = 0$;

3) точка приложения D ударного импульса S должна отстоять от оси вращения z на расстоянии приведенной длины физического маятника, ось подвеса которого совпадает с осью вращения данного тела, т.е. $d = \dfrac{I_z}{Mx_C}$.

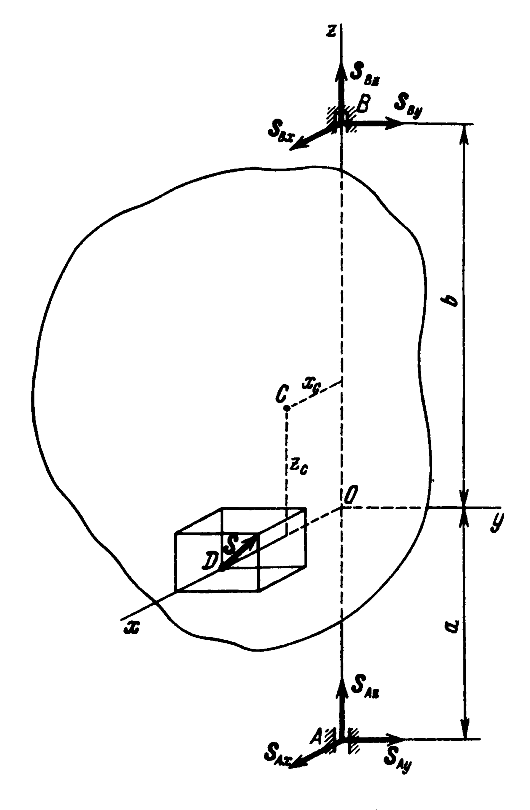


Рис. 12.8

При отсутствии реактивных ударных импульсов S_A и S_B точка D приложения ударного импульса S является центром удара. *Центром удара* называется точка абсолютно твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения и обладающая тем свойством, что приложенный к телу ударный импульс, линия действия которого проходит через эту точку и который направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через ось вращения и центр масс тела, не вызывает ударных реакций в точках закрепления оси.

Решение задач на определение положения центра удара сводится к выполнению трех указанных выше условий.

Указание. Задачи, в которых по заданным скоростям соударяющихся тел в начале удара, силам тяжести, моментам инерции этих тел и положениям их центров масс требуется определить реактивные ударные импульсы, рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать тело или тела, которые нужно рассмотреть для определения неизвестных величин;

2) направить подвижные координатные оси, связанные с телом: ось z выбрать вдоль оси вращения, плоскость xz провести через ось вращения и центр масс C тела, ось x направить через точку D пересечения линии действия ударного импульса S с плоскостью xz. Ось y выбрать так, чтобы вместе с осями x и z она образовала правую систему осей координат;

3) рассмотрев каждое из соударяющихся тел в отдельности, изобразить импульсы внешних ударных сил и применить теорему об изменении главного момента количества движения в приложении к ударным силам к движению тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; в случае поступательного движения одного из соударяющихся тел применить к этому телу теорему об изменении главного вектора количества движения в приложении к ударным силам;

4) решив систему уравнений, составленных в предыдущем пункте, определить ударный импульс S в конце удара;

5) составить систему уравнений (1*) применительно к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси;

6) решив систему уравнений (1*), определить проекции искомых реактивных ударных импульсов.

Если в условии задачи заданы ударный импульс S и угловая скорость ω_2 тела в конце удара, то второй и третий пункты решения задачи следует опустить.

Задача 12.12. Маятниковый копер Шарпи служит для испытания материалов на сопротивление удару. Массивный маятник, снабженный стальным ножом b, может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O в двух симметрично расположенных подшипниках. Маятник поднимают, отклоняя его от равновесного нижнего положения на угол α. Испытываемый образец d закладывают так, чтобы нож b ударил по образцу при прохождении маятника через нижнее вертикальное положение. Ломая образец d и теряя при этом часть кинетической энергии, маятник продолжает затем свое движение, отклоняясь на некоторый угол β (рис.). Масса маятника M. Расстояние от оси O до центра масс C маятника равно r. Радиус инерции маятника относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через точку O, равен ρ.

Определить угловую скорость маятника в наинизшем положении до удара. Вычислить работу, затраченную на разрушение испытываемого образца. Найти условие, при котором ось O и поддерживающие ее подшипники не будут испытывать мгновенных ударных нагрузок.

Решение. Для определения угловой скорости маятника в наинизшем положении до удара применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}, \quad (1)$$

где $T_1 = 0$ — кинетическая энергия маятника в начальном положении; $T_2 = \frac{1}{2} I_z \omega_1^2$ — кинетическая энергия в наинизшем положении; $A_{1,2} = Mgh$. Следовательно,

$$\frac{1}{2} I_z \omega_1^2 = Mgh. \quad (2)$$

Внося в это уравнение $I_z = M\rho^2$, $h = r(1 - \cos\alpha) = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ (рис.), находим

$$\frac{1}{2} M\rho^2 \omega_1^2 = Mg \cdot 2r \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (3)$$

откуда получаем

$$\omega_1 = \frac{2}{\rho} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gr}, \quad (4)$$

— угловую скорость маятника в наинизшем положении до удара.

Переходим к вычислению работы, затраченной на разрушение испытываемого образца. Применим теорему об изменении кинетической энергии к движению маятника.

В начальном положении маятника его угловая скорость равна нулю (угол отклонения маятника α). В конечном положении (маятник отклонен от вертикали на угол β) его угловая скорость также равна нулю. Следовательно, кинетическая энергия маятника в его начальном и конечном положении равна нулю. Тогда, согласно теореме об изменении кинетической энергии, сумма работ всех активных сил, приложенных к маятнику на рассматриваемом перемещении, также равна нулю:

$$MgH - A = 0, \quad (5)$$

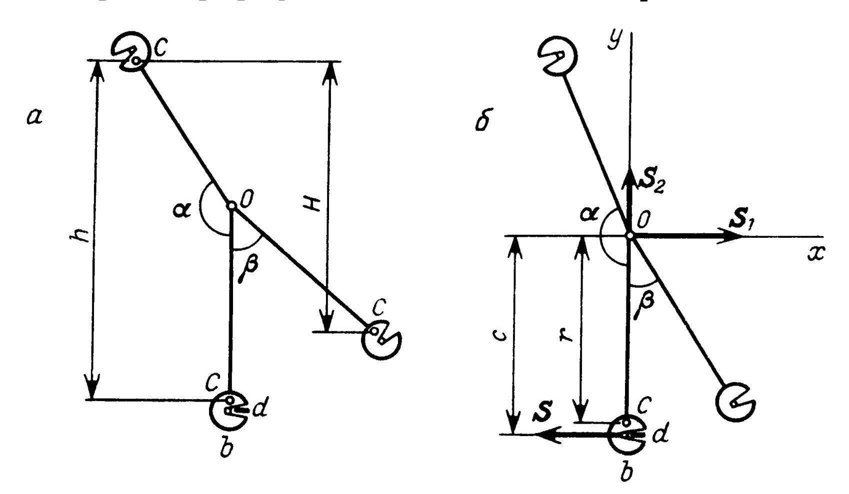
где H — вертикальное перемещение центра тяжести (рис.), равное

$$H = r(\cos\beta - \cos\alpha). \quad (6)$$

Следовательно, силы сопротивления образца разрушению совершают работу A, равную

$$A = Mgr(\cos\beta - \cos\alpha). \quad (7)$$

Переходим к определению условий, при соблюдении которых подшипники, поддерживающие ось вращения маятника, не будут испытывать ударных нагрузок при разрушении испытываемого образца.



К задаче 12.12

Угловую скорость маятника в момент окончания удара, т.е. в момент разрушения образца, обозначим ω_2. Определим ее, пользуясь теоремой об изменении кинетической энергии

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}, \qquad (8)$$

где $T_2 = 0$ – кинетическая энергия маятника при угле отклонения β, когда маятник становится; $T_1 = \dfrac{1}{2} I_z \omega_2^2$ – кинетическая энергия маятника после удара, когда испытуемый образец разрушился. Работа силы тяжести на этом перемещении равна

$$A_{1,2} = -Mgr(1 - \cos\beta) = -2Mgr\sin^2\frac{\beta}{2}. \qquad (9)$$

Внося найденные значения в уравнение (8), находим

$$-\frac{1}{2} I_z \omega_2^2 = -2Mgr\sin^2\frac{\beta}{2}. \qquad (10)$$

Учитывая, что $I_z = M\rho^2$, получаем

$$\omega_2 = \frac{2}{\rho}\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sqrt{gr}. \qquad (11)$$

Итак, найдены угловые скорости маятника в момент начала удара ω_1 (4) и в момент окончания удара (т.е. в момент разрушения образца) ω_2 (11).

При ударе маятника об образец на маятник действует (в точке касания его с образцом) реакция образца, имеющая характер ударной силы (рис. б). Найдем импульс S этой ударной силы за время удара. Для этого запишем теорему об изменении главного момента количества движения в приложении к ударным силам относительно оси O:

$$I_O(\omega_2 - \omega_1) = -Sc, \tag{12}$$

где c – расстояние от оси вращения O до испытуемого образца. Из (12) находим

$$S = \frac{I_O(\omega_1 - \omega_2)}{c}. \tag{13}$$

Импульс S, приложенный к маятнику во время удара, вызывает ударные силы давления на подшипники, в которых укреплена ось вращения маятника. Соответственно возникают и равные этим силам, но противоположно направленные реакции подшипников. Полагая подшипники расположенными симметрично по отношению к точке O, заменим эти две реакции одной реакцией, равной их сумме и приложенной к точке O. Будем искать импульс этой ударной реакции за время удара. Для этого применим уравнения, которыми определяется действие ударных сил на центр масс твердого тела.

Выберем оси x и y, как показано на рис. б, разложим искомый импульс на горизонтальную и вертикальную составляющие S_1 и S_2. Скорости центра масс C в момент начала удара и в момент его окончания обозначим $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Тогда

$$M(v_{2x} - v_{1x}) = S_1 - S, \tag{14}$$

$$M(v_{2y} - v_{1y}) = S_2. \tag{15}$$

Но в рассматриваемой задаче $v_{1y} = v_{2y} = 0$ и, согласно (15), $S_2 = 0$. Далее имеем

$$v_{1x} = r\omega_1, \quad v_{2x} = r\omega_2. \tag{16}$$

Вносся эти значения (16) в уравнение (14) и учитывая равенство (13), находим

$$S_1 = Mr(\omega_2 - \omega_1) + S = \left(\frac{I_z}{c} - Mr\right)(\omega_1 - \omega_2). \tag{17}$$

Отсюда вытекает, что $S_1 = 0$, если

$$c = \frac{I_z}{Mr}. \tag{18}$$

Следовательно, подшипники, в которых вращается ось маятникового копра, не будут испытывать ударных нагрузок, если расстояние от оси до ножа b будет определяться уравнением (18).

Точка прямой OC, к которой должен быть приложен ударный импульс S, для того чтобы не было ударного давления на подшипники, называется *центром удара*.

Заметим, что полученная ранее (см. задачу 9.68) приведенная длина физического маятника

$$l = \frac{I_z}{Mr}$$

в точности совпадает с расстоянием от оси маятника до центра удара. Следовательно, центр удара совпадает с центром качания физического маятника.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из "Сборника задач по теоретической механике" И.В. Мещерского: 44.21, 44.22, 44.25.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

БАТЬ Моисей Иосифович
ДЖАНЕЛИДЗЕ Георгий Юстинович
КЕЛЬЗОН Анатолий Саулович

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

Том II

Динамика

Заведующий редакцией *Л.А. Русаков*
Редактор *Н.П. Рябенькая*
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*
Технические редакторы *О.Б. Черняк, С.Н. Баронина*
Корректоры *Н.П. Круглова, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 41080

Сдано в набор 18.07.90. Подписано к печати 27.12.90
Формат 60 X 88/16. Бумага книжно-журнальная
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 39,20. Усл.кр.-отт. 39,20. Уч.-изд.л. 36,10
Тираж 71 700 экз. Тип. зак. 210. . Цена 3 р. 90 к.

Издательско-производственное и книготорговое
объединение "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Типография им. И.Е. Котлякова
Издательства "Финансы и статистика"
Государственного комитета СССР
по печати
195273 Ленинград, ул. Руставели, 13